

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.

Mathematisk-fysiske Meddelelser. **X**, 1.

EINLEITUNG IN DIE
ALLGEMEINE KONGRUENZLEHRE

VON

JOHANNES HJELMSLEV

ZWEITE MITTEILUNG



KØBENHAVN

HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL

BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI

1929

In dem ersten Abschnitte dieser zweiten Mitteilung beschäftigen wir uns noch mit einigen Fragen aus der allgemeinen Kongruenzlehre, wie diese durch das ursprüngliche Axiomensystem der ersten Mitteilung¹ definiert wurde. In dem zweiten Abschnitte gehen wir dann zu dem Spezialfall über, wo ausserdem das Eindeutigkeitsaxiom gültig ist. Zum Schluss besprechen wir die Frage von der Unabhängigkeit der Axiome der Anordnung.

I.

1. Geradenbüschel.

1. Der eigentliche Geradenbüschel (Realbüschel) besteht aus allen Geraden durch einen Punkt O , den Mittelpunkt des Büschels. Durch einen beliebigen von O verschiedenen Punkt P geht eine einzige Gerade, oder unendlich viele Geraden, oder keine Gerade des Büschels, je nachdem die beiden Punkte O und P eine oder unendlich viele oder keine Verbindungsgeraden haben. Im letzten Falle sagen wir, dass der Punkt P ausserhalb des Büschels liegt, während in den beiden ersten Fällen P als einfacher bzw. mehrfacher Punkt innerhalb des Büschels bezeichnet werden soll.

Durch eine Halbdrehung² geht der Büschel in einen

¹ Det Kgl. Danske Vidensk. Selskab. Math.-fys. Meddelelser. VIII, 11. 1929.

² Erste Mitteilung S. 29.

anderen Büschel über. Alle Punkte P bewahren durch die Transformation ihren Charakter dem Büschel gegenüber (als Punkt ausserhalb oder innerhalb, einfach oder mehrfach, des Büschels).

2. Von einem beliebigen Punkte P aus lassen sich immer Lote auf die Geraden des Büschels (O) fällen. Die Fusspunkte der Lote bilden eine Punktmenge, zu welcher O und P selbst hören oder nicht, je nachdem P innerhalb oder ausserhalb des Büschels liegt. Diese Punktmenge soll als Fusspunktmenge (O, P) oder (P, O) bezeichnet werden. Liegt P ausserhalb des Büschels, sind irgend zwei Punkte der Menge voneinander getrennt (d. h. sie haben keine Verbindungsgerade). Ist P innerhalb des Büschels (O), haben P und O eine (eindeutig oder mehrdeutig bestimmte) Verbindungsgerade, und je zwei Punkte der Menge (O, P) haben dann auch eine (eindeutig oder mehrdeutig bestimmte) Verbindungsgerade. Dies folgt aus den früher angegebenen

Eigenschaften der nebenstehenden Figur 1¹:

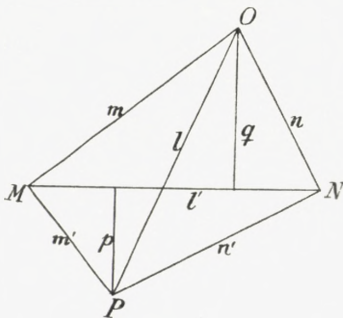


Fig. 1.

Es seien m und n zwei Geraden des Büschels (O), m' und n' die Lote von P auf diese beiden Geraden, M und N die Fusspunkte der Lote. Es sei ferner $OP = l$ eine Verbindungsgerade von O und P . Es wird dann eine Verbindungsgerade l' von M und N der Geraden l so entsprechen, dass, wenn die Lote von O und P auf l' mit q und p bezeichnet werden, die folgenden Gleichungen bestehen:

$$ml = qn, \quad m'l = pn', \quad Mp = qN.$$

Der Satz soll als **Lotensatz** bezeichnet werden.

¹ Erste Mitteilung S. 24—25.

2. Der Fusspunktsatz.

3. In einem Büschel (O) betrachten wir eine beliebige Anzahl Geraden, welche mit den Zahlen $1, 2, 3, \dots$ bezeichnet werden. Drei beliebige von ihnen seien i, k, l

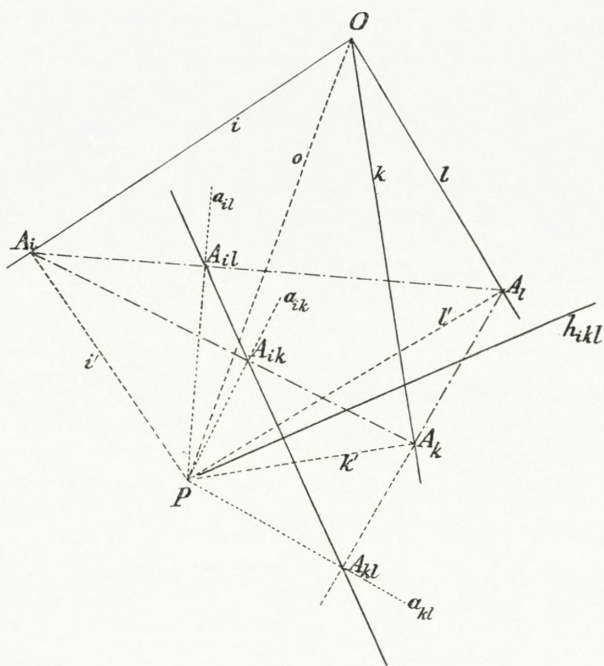


Fig. 2.

(Fig. 2). Von dem festen Punkte P innerhalb des Büschels ziehen wir eine Gerade o nach O und fällen die Lote i', k', l' auf die drei Geraden i, k, l . Die Fusspunkte der Lote seien A_i, A_k, A_l . Durch P ziehen wir 3 Geraden a_{ik}, a_{il}, a_{kl} , welche derart bestimmt werden, dass

$$a_{ik} = i'ok', \quad a_{kl} = k'ol', \quad a_{il} = l'oi'.$$

Es wird also

$$o = i'a_{ik}k' = k'a_{kl}l' = l'a_{il}i'.$$

Durch A_i und A_k (und analog für die anderen Zeiger) lässt sich dann nach dem Lotensatz (2) eine Gerade $\perp a_{ik}$ ziehen, d. h. es existiert ein Dreieck $A_i A_k A_l$, dessen Seiten senkrecht zu den Geraden a_{kl} , a_{li} , a_{ik} stehen. Die Seiten des Dreiecks $A_k A_l$, $A_l A_i$, $A_i A_k$ werden von den entsprechenden Geraden a_{kl} , a_{li} , a_{ik} in den Punkten A_{kl} , A_{li} , A_{ik} geschnitten. Es wird sich zeigen, dass diese 3 Punkte immer in einer geraden Linie enthalten sind.

Bestimmen wir nämlich eine Gerade h_{ikl} derart, dass

$$h_{ikl} = a_{ik} i' a_{il},$$

so wird nach dem Lotensatz das Lot von A_{ik} auf h_{ikl} durch A_{il} gehen, und es wird leicht nachgewiesen, dass der Ausdruck für h_{ikl} in den drei Zeigern symmetrisch ist. Aus den obigen Ausdrücken für o

$$\begin{aligned} o &= i' a_{ik} k' = k' a_{kl} l' = l' a_{li} i' \\ &= k' a_{ik} i' = l' a_{kl} k' = i' a_{li} l', \end{aligned}$$

folgt nämlich

$$a_{ik} k' = a_{il} l',$$

und die hierzu analogen Gleichungen; also wird

$$a_{ik} i' a_{il} = a_{kl} l' a_{il} = a_{kl} k' a_{ik},$$

woraus gerade hervorgeht, dass h_{ikl} nach der Definition unverändert bleibt, wenn die Zeiger i, k, l vertauscht werden.

Wir haben somit den folgenden Satz bewiesen:

Fusspunktsatz. Drei beliebige Punkte der Fusspunktmenge (O, P) sind immer die Ecken eines Dreiecks derart, dass die Fusspunkte der Lote von P (oder O) auf die Seiten des Dreiecks in einer geraden Linie gelegen sind.

Ist die gerade Linie $OP = o$ mehrdeutig bestimmt, wird auch das Dreieck $A_i A_k A_l$ mehrdeutig bestimmt, und die gerade Linie $A_{ik} A_{kl} A_{li}$ ebenso.

4. Betrachten wir vier Geraden i, k, l, m des Büschels (O), können wir vier Fusspunktgeraden $h_{ikl}, h_{ilm}, h_{imk}, h_{klm}$ erhalten, den 4 Geradentripeln ikl, ilm, imk, klm entsprechend. Es lässt sich zeigen, dass die Fusspunkte der Lote von P auf diese 4 Fusspunktgeraden in einer Geraden h_{iklm} gelegen sind (der Fusspunktgeraden der vier Geraden i, k, l, m für den Punkt P).

Um dies zu zeigen, brauchen wir nur die vorstehenden Entwicklungen auf die Geraden $A_m A_i, A_m A_k, A_m A_l$ (wo A_m der Fusspunkt des Lotes von P auf die Gerade m bezeichnet) zu verwenden. Die Lote von P auf diese Geraden sind a_{mi}, a_{mk}, a_{ml} , und wir brauchen nun nur die obigen Gleichungen derart zu transformieren, dass $i' \rightarrow a_{mi}$ (für festen m und alle i), ferner $a_{ik} \rightarrow h_{mik}$ und $h_{ikl} \rightarrow h_{mikl}$. Es wird dann

$$i' a_{ik} k' \rightarrow a_{mi} h_{mik} a_{mk},$$

$$h_{mikl} = h_{mik} a_{mi} h_{mil},$$

und wir haben nur noch nötig zu zeigen, dass dieser Ausdruck symmetrisch in allen 4 Zeigern m, i, k, l ausfällt. Es ist aber

$$h_{mik} = a_{mk} m' a_{mi},$$

$$h_{mil} = a_{ml} m' a_{mi},$$

also

$$\begin{aligned} h_{mikl} &= a_{mk} m' a_{mi} a_{mi} a_{ml} m' a_{mi} \\ &= (a_{mk} m') a_{ml} (m' a_{mi}), \end{aligned}$$

wo alle 3 Faktoren symmetrisch in m und l sind, und dies wird eben genügen, um die erwähnte Symmetrieeigenschaft festzustellen. Die Gerade h_{mikl} kann als Fusspunktgerade der 4 Geraden m, i, k, l bezeichnet werden.

Der Satz lässt sich unmittelbar erweitern für eine größere Anzahl von geraden Linien. Für 5 Geraden des Büschels i, k, l, m, n gibt es 5 Geraden h_{iklm}, h_{ikmn} , u. s. w., und die Fusspunkte der Lote von P auf diese 5 Geraden sind in einer geraden Linie h_{iklmn} enthalten. Es wird leicht verständlich, wie die Untersuchung sich auf höhere Anzahlen von Geraden ausdehnen lässt.

3. Die Gegenpaarung.

5. Im Realbüschel sprechen wir von *Gegenpaarung*, wenn die Geraden des Büschels derart gepaart werden, dass die verschiedenen Paare aa_1, bb_1, cc_1, \dots die durch die folgenden Gleichungen gegebenen Bedingungen erfüllen:

$$ab_1 = a_1b, ac_1 = a_1c, bc_1 = b_1c, \dots \text{ u. s. w.}$$

Eine Gegenpaarung wird z. B. hergestellt, wenn jede Gerade des Büschels an einer festen Geraden x des Büschels gespiegelt wird. Die Spiegelungsachse x und die darauf senkrechte Gerade y des Büschels (welche auch als Spiegelungsachse aufgefasst werden kann) sind dann Doppelstrahlen der Paarung. Es besteht aber auch die Möglichkeit einer Gegenpaarung, wo keine Doppelstrahlen vorhanden sind.

In jedem Büschel gibt es eine bestimmte Gegenpaarung, bei welcher zwei gegebene Geraden des Büschels a, a_1 einander entsprechen. Ein beliebiges Paar xx_1 lässt sich nämlich durch die Bedingung

$$ax_1 = xa_1, \text{ oder } x_1 = axa_1,$$

bestimmen. Aus $x_1 = axa_1, y_1 = aya_1$, folgt sofort

$$xy_1 = xaya_1 = yaxa_1 = yx_1.$$

Hat das Paar aa_1 eine Spiegelungsachse (und somit zwei zueinander senkrechte Spiegelungsachsen) so haben alle Paare xx_1, yy_1 , u. s. w. dieselben Spiegelungsachsen.

Zwei Geradenpaare aa_1, bb_1 sollen im allgemeinen gegengepaart heissen, wenn

$$ab_1 = ba_1, \quad \text{oder} \quad b_1 = aba_1.$$

Wir werden in diesem Falle auch die Redeweise einführen, dass b an dem Paar aa_1 gespiegelt wird.

6. Es sei vorgelegt ein Dreieck ABC mit den Seiten a, b, c , und 3 Geraden a', b', c' durch die Ecken A, B, C . Diese Geraden werden an den Paaren bc, ca, ab (»an den Winkeln des Dreiecks«) gespiegelt, und wir erhalten hierdurch 3 entsprechende Geraden a'', b'', c'' , derart, dass

$$\begin{aligned} a'' &= ba'c, \\ b'' &= cb'a, \\ c'' &= ac'b. \end{aligned}$$

Hieraus folgt, dass

$$a''b''c'' = ba'ccb'aac'b = b(a'b'c')b,$$

oder

$$a''b''c'' = (a'b'c')^b.$$

Die Bewegung $a''b''c''$ ist also die Transformierte von $a'b'c'$ durch b .

Wenn die 3 Geraden a', b', c' durch denselben Punkt P' gehen, so wird $a'b'c'$, und somit auch $a''b''c''$, eine Spiegelung darstellen.

Haben zwei von den drei Geraden $a''b''c''$ ausserdem einen eindeutigen Schnittpunkt P'' , so werden alle drei Geraden durch diesen Punkt gehen. Die Achse der Spiegelung $a''b''c''$ ist das Spiegelbild von der Achse der Spiegelung $a'b'c'$ in Bezug auf b , und geht folglich durch das

Spiegelbild von P' in Bezug auf b . Es lässt sich übrigens leicht nachweisen, dass die Geraden a'' , b'' , c'' die Mittelsenkrechten sind der Seiten des Dreiecks $(P')^a(P')^b(P')^c$.

7. Es sei vorgelegt ein Viereck $ABCD$ mit den Seiten $DA = a$, $AB = b$, $BC = c$, $CD = d$; es sei ferner ein Punkt P' gegeben, welcher mit A , B , C , D die Verbindungsgeraden a' , b' , c' , d' hat. Wir spiegeln a' , b' , c' , d' an den Winkeln des Vierecks und erhalten die entsprechenden Geraden a'' , b'' , c'' , d'' .

Es wird dann

$$a'' = aa'b, \quad b'' = bb'c, \quad c'' = cc'd, \quad d'' = dd'a,$$

woraus folgt

$$a''b''c''d'' = a(a'b'c'd')a = (a'b'c'd')^a.$$

Die Bewegung $a''b''c''d''$ wird somit eine In-Bewegung mit festem Punkt in dem Spiegelbild von P' in Bezug auf a . Ist insbesondere $a'b'c'd'$ die Identität, so wird $a''b''c''d''$ ebenfalls die Identität vorstellen, d. h. wenn $a'c'$, $b'd'$ gegengepaart sind, so werden die Paare $a''c''$, $b''d''$ ebenfalls gegengepaart.

II.

8. In diesem Abschnitte gehen wir nun dazu über, die Kongruenzlehre weiter zu entwickeln in dem besonderen aber sehr wichtigen Falle, wo das Eindeutigkeitsaxiom unbedingt gültig ist, d. h. wo man ausser den bisher zu Grunde gelegten Axiomen noch das Eindeutigkeitsaxiom zur Verfügung hat, welches besagt:

Irgend zwei Punkte haben eine und nur eine Verbindungsgerade.

Die bisher gewonnenen allgemeinen Resultate erhalten

in dieser einfachen Geometrie eine besonders einfache Gestalt, die aber sofort aus den Tatsachen hervorgeht, dass nunmehr zwei beliebige Punkte nur eine Verbindungsgerade und zwei Geraden höchstens einen gemeinsamen Punkt haben. Ein Geradenbüschel (O) sendet genau eine Gerade durch jeden von O verschiedenen Punkt. Durch jeden Punkt P geht eine und nur eine Gerade c , welche mit zwei gegebenen Geraden a und b , welche nicht beide durch P gehen, in Involution ist ($abc = cba$, siehe Erste Mitteilung S. 24 ff.).

Die Theorie der direkten und inversen Halbdrehungen (Erste Mitteilung S. 29) wird sich besonders einfach gestalten, weil nun die Möglichkeit der Mehrdeutigkeit der Transformationen weggefallen ist.

Gibt es in der einfachen Geometrie ein Rechteck, so wird jedes Viereck mit 3 rechten Winkeln notwendig als Rechteck ausfallen, und zwei Geraden mit einem gemeinsamen Lot haben dann alle Lote gemein (der singuläre Fall der einfachen Geometrie). In diesem Falle ist immer ABC (die Transformation, welche aus 3 Umwendungen um drei beliebige Punkte A, B, C zusammengesetzt ist) eine involutorische Transformation (eine Umwendung).

Gibt es aber in unserer Geometrie überhaupt kein Rechteck (der ordinäre Fall), so wird die Transformation ABC zwar auch eine involutorische Transformation darstellen können, aber nur in dem Falle, wo die Punkte A, B, C in derselben geraden Linie gelegen sind.

Es soll nun im folgenden die weitere Begründung der einfachen Geometrie gegeben werden. Die Ergebnisse meiner alten Arbeit (Math. Ann. 64) sollen dabei im wesentlichen noch massgebend werden. Einige Vereinfachungen in der Darstellung sollen gegeben werden. Vor allen Dingen wird die Begründung von den Axiomen der Anordnung unab-

hängig gemacht. Ich muss aber zugeben, dass ich keine wesentlichen Vereinfachungen des Hauptbeweises des Fundamentalsatzes habe erzielen können. Wenn man von Seiten der Leser, die meine alte Arbeit gewürdigt haben, hervorgehoben hat, dass die Beweise verwickelt¹ oder umständlich² sind, so möchte ich doch die Gegenbemerkung machen, dass die Sache selbst nicht ganz einfach ist. Es ist wohl kein Zufall, wenn man bis jetzt meines Wissens keinen allgemeingültigen Beweis für den Mittelliniensatz eines Dreiecks hat erbringen können, mit alleiniger Hilfe derjenigen Hilfsmittel, welche für die Formulierung der Aufgabe selbst massgebend sind (Ebene Kongruenzaxiome, ohne Stetigkeit oder Parallelenaxiome).

4. Idealbüschel und Idealpunkte.

9. Ein allgemeiner Geradenbüschel (a, b) soll definiert werden als die Gesamtheit derjenigen Geraden c , von denen jede mit zwei festen, untereinander verschiedenen Geraden a, b eine involutorische Transformation abc bildet. Wenn a und b einen gemeinsamen Punkt O aufweisen, so wird der Geradenbüschel aus der Gesamtheit aller Geraden durch diesen Punkt bestehen.

Haben die beiden Geraden a und b ein gemeinsames Lot n , wird der Büschel aus allen Geraden, welche senkrecht auf n stehen, zusammengesetzt.

Sind a und b zwei beliebige Geraden ohne gemeinsamen Punkt, soll der Geradenbüschel (a, b) als Idealbüschel bezeichnet werden. Durch jeden Punkt P geht genau eine

¹ F. SCHUR, Grundlagen der Geometrie, S. 160.

² M. DEHN, Die Grundlegung der Geometrie in historischer Entwicklung (Pasch-Dehn, Vorlesungen über neuere Geometrie, 1926, S. 236).

Gerade des Büschels. Die Konstruktion dieser Geraden haben wir früher angegeben (Erste Mitteilung S. 24—25).

10. In der Figur 3 ist vorausgesetzt, dass a und b kein gemeinsames Lot haben. Auf a wählen wir einen Punkt A , und von diesem fällen wir das Lot $p = AB$ auf b . Es gibt nun eine Halbdrehung um A , welche a in p überführt.

Diese Halbdrehung transformiert die Gerade b in eine neue Gerade b' durch B ($pq = ap$, $b' \perp q$). Ist nun c eine beliebige Gerade des Büschels (a, b), und fällen wir von A das Lot $AC = r$ auf c , ziehen die Gerade BC und fällen das Lot s von A auf BC , so wird nach dem Lotensatz $rs = ap$. Die ganze Figur ($a, b, c, r, s, p, A, B, C$) wird nun bei der erwähnten Halbdrehung in eine ganz gleichartige Figur übergehen, und aus dieser Figur entnehmen wir sofort die Tatsache, dass die den drei Geraden a, b, c entsprechenden Geraden p, b', c' , wiederum in Involution sind. Da nun p und b' den Schnittpunkt B haben, muss die Gerade c' auch durch diesen Punkt gehen.

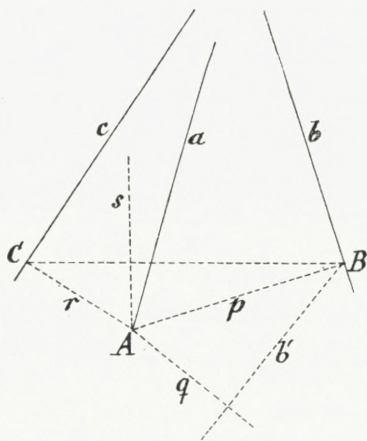


Fig. 3.

Ebenso wird jede neue Gerade d des Idealbüschels (a, b) durch unsere Halbdrehung in eine Gerade d' verwandelt, welche auch durch den Punkt B geht. Infolgedessen können wir auf die 3 Geraden p, c', d' den Lotensatz (2) anwenden, indem wir Lote von A auf c' und d' fällen, und geht man dann durch die Halbdrehung mit der so erhaltenen Figur zu den Geraden a, c, d zurück, so folgt sofort, dass a, c, d in Involution sind, d. h. d gehört dem Büschel (a, c),

und c gehört dem Büschel (a, d) . Es ist also hierdurch der folgende Satz bewiesen:

Wenn c und d dem Büschel (a, b) angehören, so wird auch d dem Büschel (a, c) (oder (b, c)) angehören. Je drei Geraden des Büschels (a, b) sind in Involution. Irgend zwei Geraden eines Büschels bestimmen diesen Büschel.

Ferner: Eine Halbdrehung verwandelt einen Büschel in einen neuen Büschel. Jeder Idealbüschel lässt sich durch eine Halbdrehung in einen Realbüschel verwandeln.

11. Wir wollen jetzt statt »Idealbüschel« das Wort »Idealpunkt« (oder »uneigentlicher Punkt«) einführen, indem wir statt »Geraden die dem Idealbüschel angehören« sagen »Geraden, die durch den Idealpunkt gehen«; statt zu sagen, dass ein Idealbüschel durch irgend zwei seiner Geraden bestimmt wird, können wir demnach sagen, dass ein Idealpunkt durch Schnitt von irgend zwei Geraden, welche durch den Punkt gehen, eindeutig erzeugt wird.

Nach diesen Verabredungen gelten also folgende Sätze:

Zwei Geraden haben immer einen und nur einen Punkt gemein: einen gewöhnlichen (oder eigentlichen) Punkt oder einen Idealpunkt (oder uneigentlichen Punkt).

Durch zwei Punkte, welche nicht beide Idealpunkte sind, geht eine und nur eine Gerade.

Durch zwei Idealpunkte geht höchstens eine Gerade.

Die Lote einer geraden Linie l haben einen uneigentlichen Punkt gemein, welcher der absolute Pol von l genannt werden soll. Wie schon früher erwähnt, gibt es zwei Hauptfälle unserer Geometrie: Der singuläre Fall, wo

Rechtecke existieren, und der ordinäre Fall, wo keine Rechtecke existieren. Im singulären Fall wird der absolute Pol P einer Geraden p , auch der Pol anderer Geraden sein. Diese Geraden bilden einen Büschel, welcher einen anderen Idealpunkt P' bestimmt. Je zwei Geraden, welche durch P und P' laufen, sind senkrecht zueinander.

Im ordinären Fall hingegen gibt es überhaupt keine zwei Geraden mit gemeinsamem Pol.

5. Satz der Gegenpaarung.

12. Die früher erwähnte Gegenpaarung der Geraden eines Realbüschel (S. 8) lassen sich natürlich unmittelbar auf den Idealbüschel übertragen, und die Sätze (6 und 7) über das Dreieck und das Viereck lassen sich in dieser Hinsicht in leicht verständlicher Weise erweitern. Für jedes Dreieck ABC , wo A, B, C Realpunkte sind, wird man z. B. zu jedem Punkt P' (Real- oder Idealpunkt), welcher nicht auf einer Seite des Dreiecks liegt, einen Gegenpunkt P'' finden können.

Wir wollen nun die Redeweise einführen, dass die Punktepaare AA_1, BB_1, CC_1, \dots von dem Punkte P aus gegengepaart heißen sollen, wenn die Geradenpaare, welche von dem Punkte P als Mittelpunkt die Punktepaare AA_1, BB_1, CC_1, \dots ausprojizieren, gegengepaart sind. Es folgt hieraus, dass die Gegenpaarung nicht gestört wird, wenn die Punkte mit anderen vertauscht werden, wenn nur die projizierenden Strahlen von P nicht geändert werden.

Wir wollen dann den folgenden Satz beweisen:

Satz der Gegenpaarung. Wenn zwei von den drei Gegeneckenpaaren eines vollständigen Vierseits von einem Punkte P aus gegengepaart sind,

dann sind alle drei Gegeneckenpaaren von diesem Punkte aus gegengepaart.

Es seien p, q, r, s vier Geraden (Fig. 4), von denen keine drei durch einen Punkt gehen, und es seien die Gegeneckenpaare des von den vier Geraden gebildeten vollständigen Vierseits durch AA_1, BB_1, CC_1 bezeichnet; wenn nun diese Gegeneckenpaare mit einem Punkt P , der nicht

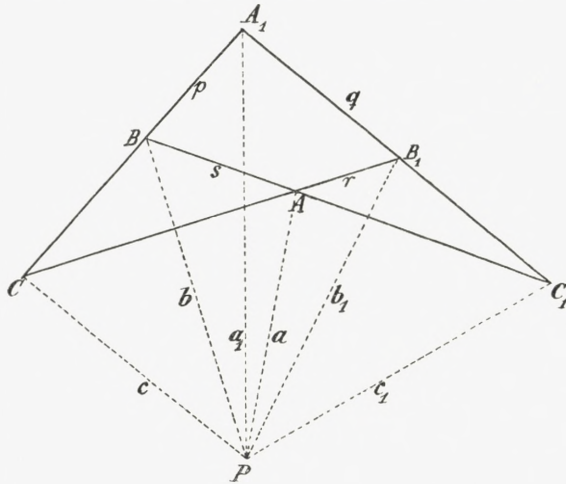


Fig. 4.

in eine Ecke des Vierseits fällt, durch die Geradenpaare aa_1, bb_1, cc_1 verbunden werden, und wenn dann zwei von diesen Paaren gegengepaart sind, so besagt unser Satz, dass alle drei Geradenpaare gegengepaart sind. Mit anderen Worten, wenn $bc = c_1b_1$, so wird auch $ca = a_1c_1, ab = b_1a_1$.

Zum Beweis dieses Satzes brauchen wir 6 Hilfsgeraden $a', a'_1, b', b'_1, c', c'_1$ derart, dass

$$\begin{aligned} a' &= ras, & a'_1 &= pa_1q, \\ b' &= sbp, & b'_1 &= qb_1r, \\ c' &= pcr, & c'_1 &= qc_1s. \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen leiten wir nun die folgenden ab:

$$a'_1 b'_1 c' = p(a_1 b_1 c) p, \quad (1)$$

$$a'_1 c'_1 b' = p(a_1 c_1 b) p, \quad (2)$$

$$b' a' c' = p(bac) p. \quad (3)$$

Es leuchtet ein, dass die Ausdrücke auf den rechten Seiten von diesen Gleichungen Spiegelungen darstellen, und es folgt hieraus, dass jedes der auf den linken Seiten stehenden Geradentripel $a'_1 b'_1 c'$, $a'_1 c'_1 b'$, $b' a' c'$ einen gemeinsamen Punkt hat. Da nun ferner $bc = c_1 b_1$, oder $b_1 c = c_1 b$, sind die Spiegelungen (1) und (2) identisch, und es folgt hieraus

$$b'_1 c' = c'_1 b',$$

woraus man wiederum schliesst, dass die 4 Geraden b'_1 , c' , c'_1 , b' einen Punkt gemein haben. Es folgt dann, dass alle 6 Geraden a' , b' , c' , a'_1 , b'_1 , c'_1 einen Punkt P' gemein haben. Die Achsen der 3 Spiegelungen (1), (2), (3) gehen alle durch P' ; sie gehen aber auch, nach der Form der rechten Seiten, durch den Punkt P^p , und da dieser Punkt sicher von P' verschieden ist, weil z. B. b' durch P' , aber nicht durch P^p geht, so müssen die 3 Spiegelungen (1), (2), (3) identisch ausfallen, d. h.

$$a_1 b_1 c = a_1 c_1 b = bac,$$

woraus folgt

$$a_1 b_1 = ba, \quad a_1 c_1 = ca, \quad \text{w. z. b. w.}$$

13. Der Satz wird natürlich auch gültig, wenn P ein Idealpunkt ist, überhaupt wenn alle vorkommenden Punkte Idealpunkte sind, unter der Voraussetzung natürlich, dass alle vorkommenden Verbindungsgeraden existieren.

Der Satz wird z. B. eine wichtige Anwendung haben in dem Falle, wo P der absolute Pol einer Geraden p darstellt. Der Satz wird dann die folgende Formulierung erhalten:

Wenn die Gegeneckenpaare eines vollständigen Vierseits auf eine Gerade p projiziert werden, und wenn zwei von den hierdurch entstehenden Punktpaaren gemeinsamen Mittelpunkt haben, so wird das dritte Paar denselben Mittelpunkt haben.

14. Wir wollen diesen Satz für einen Beweis des Mittelliniensatzes eines Dreiecks verwenden. Die Mittelpunkte der Seiten des Dreiecks ABC seien mit P, Q, R bezeichnet (Fig. 5).

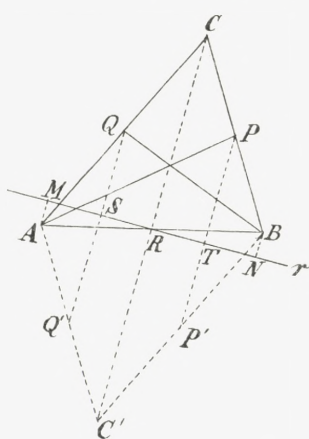


Fig. 5.

Die Mittelpunkte der Seiten des Dreiecks ABC seien mit P, Q, R bezeichnet (Fig. 5). Durch Umwendung um R entsteht das Dreieck ABC' , wo die Seiten AC' und BC' die Mittelpunkte Q' und P' haben. Auf der Geraden CR errichten wir in R das Lot r ; r wird auch $\perp QQ'$ und PP' . Projizieren wir Q und P auf r in S und T , A und B in M und N , ist sofort ersichtlich, dass die Umwendung um R , S mit T , und M mit N vertauscht.

Durch Verwendung des obigen Satzes auf das vollständige Vierseit, welches von den Geraden AC, BC , und die beiden Mittellinien AP, BQ gebildet wird, schliesst man dann, dass die Projektion des Schnittpunktes von AP und BQ auf r nach R fällt, d. h. der Schnittpunkt von AP und BQ fällt auf CR , was zu beweisen war.

15. Der allgemeine Satz der Gegenpaarung wird überhaupt sehr wichtig für die Beweise der Schnittpunktsätze, indem er ein Hilfsmittel gibt zur Entdeckung von Gegenpaaren von einem Punkte aus. Wenn man z. B. weiss, dass AB und AC Gegenpaare derselben Paarung für P sind, folgt hieraus, dass P, B und C in einer Geraden liegen. Eben diese

Betrachtung wird für den folgenden Beweis des Pascalschen Satzes Anwendung finden.

6. Der Realfall des Pascalschen Satzes.

16. Wenn die Ecken eines Sechsecks sämtlich eigentliche Punkte sind und abwechselnd auf

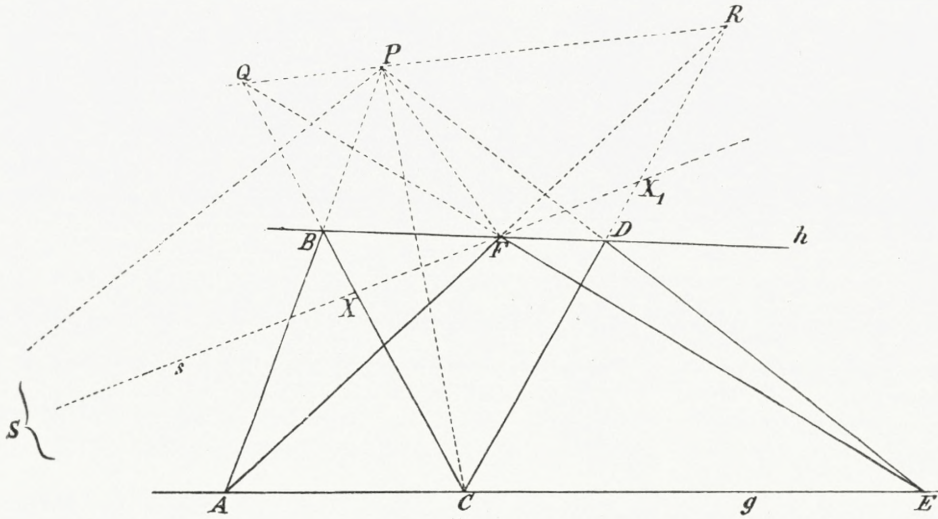


Fig. 6.

zwei Geraden liegen, und wenn ferner die drei Schnittpunkte der Gegenseitenpaare eigentliche Punkte sind, dann liegen diese 3 Punkte auf einer und derselben Geraden.

Der Beweis wird hier ganz wie früher nach dem Vorgange von HESSENBERG gegeben (Fig. 6).

Das Sechseck $ABCDEF$ sei dem Geradenpaar gh eingeschrieben, und die Schnittpunkte der gegenüberliegenden Seiten seien mit P, Q, R bezeichnet. Auf g bestimmen wir einen Punkt S derart, dass die Geradenpaare PS, PQ und PC, PF gegengepaart sind, d. h. das Paar SQ ist dem Paar CF für den Punkt P gegengepaart.

Die Gerade $FS = s$ schneidet die Geraden CB und CD in bezw. X und X_1 . Die Gerade s bildet mit jedem der Dreiecke CQE , BCD , ACR ein vollständiges Vierseit, und wenn wir den Satz der Gegenpaarung auf diese Vierseite anwenden, erhalten wir der Reihe nach folgende Paare derselben Gegenpaarung (von P aus):

CF, SQ, XE, XD (aus XE durch einfache Projektion aus P), BX_1, AX_1 (aus BX_1 durch Projektion aus P), SR .

Da also SQ und SR derselben Gegenpaarung für P angehören, liegen Q und R mit P auf einer Geraden.

17. Bei dem Beweise braucht man nicht die Voraussetzung dass alle vorkommenden Punkte Realpunkte seien. Es kommt nur darauf an, dass die in Rede stehenden geraden Linien existieren. Es könnten sogar sämtliche Punkte P, Q, R Idealpunkte sein; wenn nur eine Gerade PQ existiert, dann wird sie auch durch R gehen.

7. Idealgeraden.

18. Wir wählen einen festen eigentlichen Punkt O als festen Mittelpunkt von direkten und inversen Halbdrehungen. Wir wissen, dass je zwei solche Halbdrehungen vertauschbar sind (Erste Mitteilung S. 30).

Wir definieren nun eine Idealgerade als ein System von Punkten, welches entweder durch eine Halbdrehung um den Fundamentalpunkt O in die Gesamtheit der Punkte einer gewöhnlichen Geraden übergehen kann, oder mit der Gesamtheit der absoluten Pole aller Geraden durch O zusammenfällt. Im letzteren Fall soll die Idealgerade als Fundamentalgerade bezeichnet werden.

Es lässt sich nun leicht — wie in meiner alten Arbeit — erweisen, dass 3 Punkte einer so definierten Idealgeraden

durch Halbdrehungen um P in drei Punkte einer Geraden (gewöhnlichen oder Idealgeraden) übergehen.

Nach Einführung der Idealgeraden gelten ferner folgende Sätze: Irgend zwei Punkte haben eine und nur eine Verbindungsgerade. Irgend zwei Geraden haben einen und nur einen Punkt gemein. Beide Sätze lassen sich durch Verwendung von Halbdrehungen beweisen.

19. Die absoluten Pole aller Geraden durch einen festen eigentlichen Punkt P liegen auf einer Geraden. Diese Gerade soll die absolute Polare von P heissen.

Wenn P in den Fundamentalpunkt O fällt, ist der Satz eine unmittelbare Folge unserer Definition.

Fällt P nicht in O , so ziehen wir (Fig. 7) die Gerade $OP = a$, das Lot b auf a in P , und schliesslich zwei beliebige aufeinander senkrechte Geraden c und d durch P . Es wird nun genügen zu beweisen, dass die absoluten Pole der Geraden a, b, c auf einer Geraden liegen.

Wir fällen die Lote $OC = c_1$ auf c , und $OD = d_1$ auf d , ziehen die Gerade $CD = z$, und fällen die Lote x von O , und y von P , auf die Gerade z . Wir fällen ferner das Lot $DB = p$ auf b , und $OA = a_1$ auf p . In dem Falle wo $OA \perp a$, haben die Geraden a und p zwei gemeinsame Lote b und a_1 ; die absoluten Pole der Geraden durch P werden dann mit den absoluten Polen der Geraden durch O zusammenfallen, und sie bilden dann die Fun-

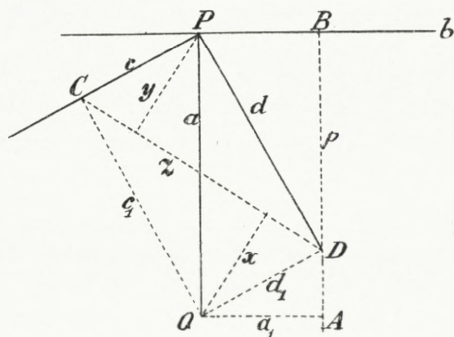


Fig. 7.

damentalgerade. In allen anderen Fällen gibt es eine Halbdrehung um O , welche a nach a_1 führt. Und durch diese Halbdrehung werden die absoluten Pole von a , b und c in 3 Punkte der Geraden p übergeführt. Erstens geht der Pol von a , in der Pol von a_1 über, zweitens geht der Pol von b als Schnittpunkt der beiden Geraden a und p in den Punkt A über, und drittens soll nun gezeigt werden, dass der Pol von c in den Punkt D übergehen wird.

Es wird nämlich:

$$P = ab = cd, \quad \text{also} \quad ca = db; \quad (1)$$

ferner

$$\begin{aligned} yd &= ca \quad (\text{Lotensatz}) \\ &= db; \quad \text{also } d \text{ Spiegelungsachse von } y \text{ und } b; \\ zd &= dp \quad (d \text{ Spiegelungsachse von } z \text{ und } p), \\ zd_1 &= d_1p \quad (d_1 \text{ zweite Spiegelungsachse von } z \text{ und } p), \\ xd_1 &= d_1a_1, \\ &= c_1a \quad (\text{Lotensatz}), \\ c_1a &= d_1a_1, \quad \text{oder} \quad c_1d_1 = aa_1. \end{aligned}$$

Hieraus folgt aber, dass der Schnittpunkt von c_1 und d durch unsere Halbdrehung in D übergeführt wird.

8. Die projektive Geometrie.

20. Um die Begründung der projektiven Geometrie für das erweiterte System von Punkten und Geraden durchführen zu können, brauchen wir ausser dem Realfall des Pascalschen Satz noch einen anderen Sonderfall dieses Satzes, und zwar den folgenden:

Wenn die Ecken eines Sechsecks sämtlich eigentliche Punkte sind und abwechselnd auf zwei Geraden liegen, deren Schnittpunkt ein eigentlicher Punkt O ist, und wenn ferner

zwei Paare von gegenüberliegenden Seiten des Sechsecks je ein gemeinsames Lot haben, das durch O läuft, dann hat auch das dritte Paar von Gegenseiten ein gemeinsames Lot durch O .

Der Beweis dieses Satzes gelingt mit Hilfe des Lotensatzes, oder mit Hilfe einer Reihe von Halbdrehungen um O , ganz wie der bekannte Hilbertsche Beweis für den Pascalschen Satz in der Euklidischen Ebene.¹

21. Für den singulären Fall unserer Geometrie beweist man dann den folgenden Satz:

Hat ein Sechseck seine Ecken abwechselnd auf zwei Geraden mit dem Schnittpunkt S , und liegen zwei von drei Schnittpunkten der Gegenseitenpaare auf der Fundamentalgeraden, dann muss auch der dritte Schnittpunkt auf dieser Geraden liegen.

Der Satz wurde schon oben für den speziellen Fall behandelt, wo alle Ecken wie auch der Punkt S eigentlich sind; der allgemeine Fall kann aber durch Halbdrehungen um den Fundamentalpunkt auf den speziellen Fall zurückgeführt werden. In der Tat kann, da keine der Ecken auf der Fundamentalgeraden liegt, durch die Aufeinanderfolge von geeigneten Halbdrehungen um den Fundamentalpunkt erzielt werden, dass alle Ecken in eigentliche Punkte übergehen, während der Punkt S entweder nach einem eigentlichen Punkt geführt wird oder auf der Fundamentalgeraden liegt. Tritt der erstere Fall ein, so ist der Beweis mithin zu Ende, und für den letzteren Fall lässt sich dann der Beweis indirekt führen.

¹ HILBERT, Grundlagen d. Geometrie 6. Aufl. S. 36—40. Vgl. auch F. SCHUR, Grundlagen der Geometrie S. 159, wo eine andere Beweisanordnung gegeben wird.

Mit diesem Beweis können wir die Begründung der projektiven Geometrie im singulären Fall als erledigt betrachten.

22. Was nun den ordinären Fall anbetrifft, beweisen wir den allgemeinen Pascalschen Satz über das einem Geradenpaare eingeschriebene Sechseck:

Hat ein Sechseck seine Ecken abwechselnd auf zwei Geraden, so liegen die drei Schnittpunkte der Gegenseitenpaare auf einer Geraden.

Durch die Aufeinanderfolge geeigneter Halbdrehungen um den Fundamentalpunkt können wir eine derartige Verwandlung der Figur erzielen, dass unter den zu betrachtenden neun Punkten jedenfalls keine anderen uneigentlichen Punkte vorhanden sind als solche, die auf der Fundamentalgeraden liegen; unter den Verbindungsgeraden der neun Punkte findet man alsdann höchstens eine uneigentliche Gerade, nämlich die Fundamentalgerade.

Durch kongruente Verschiebung der in dieser Weise erhaltenen Figur kann man ferner erreichen, dass die zurückgebliebenen uneigentlichen Punkte nach Punkten ausserhalb der Fundamentalgeraden geführt werden; da durch diese Verschiebung die Fundamentalgerade in die absolute Polare eines eigentlichen Punktes übergeht, also nach dem Satz 19 in eine uneigentliche Gerade, und da ferner die eigentlichen Punkte und Geraden in ebensolche übergehen, so wird es genügen, unseren Satz für die nach der Verschiebung erhaltenen Figur zu beweisen.

Schliesslich kann nun diese Figur wiederum durch Halbdrehungen um den Fundamentalpunkt derart verwandelt werden, dass sämtliche neun Punkte und deren Verbindungsgeraden in lauter eigentliche Elemente übergehen, und da der Pascalsche Satz für die solchergestalt verwan-

delte Figur Geltung hat, so muss er auch für die ursprüngliche Figur gelten.

9. Über die Axiome der Anordnung.

23. Wir haben unsere Begründung der projektiven Geometrie ohne Axiome der Anordnung zu Ende gebracht.

Wie steht es nun aber mit diesen Axiomen? Sind sie von der Kongruenzlehre ganz unabhängig? Ich habe die Frage schon in meiner alten Arbeit aufgestellt, und ich habe damals angezeigt, dass die Frage im wesentlichen davon abhängen würde, ob es Zahlensysteme gibt, für welche folgende Sätze gültig sind:

A. Die Sätze der Verknüpfung sind sämtlich befriedigt.

B. Die Gleichung $x^2 = -1$ hat keine Lösung.

C. Die Sätze der Anordnung können nicht befriedigt werden.

Kürzlich hat mir Herr G. THOMSEN, der sich für diese Sache interessierte, brieflich mitgeteilt, dass die betreffende Frage neuerdings durch eine Arbeit von ARTIN und SCHREIER¹ ihre Beantwortung gefunden haben dürfte. In dieser Arbeit wurde nämlich bewiesen, dass die in Rede stehenden Zahlensysteme nicht existieren, indem die Bedingungen A und B notwendig die Folgerung nach sich ziehen, dass die Zahlen des betreffenden Systems geordnet werden können, derart, dass die gewöhnlichen Gesetze der Ungleichungen gültig sind, obwohl diese Ordnung auf verschiedener Weise ausgeführt werden kann.

Dieses Resultat wird tatsächlich für unsere geometrische Frage von wesentlicher Bedeutung sein.

Fügen wir zu unserer Kongruenzlehre ausser dem Ein-

¹ E. ARTIN u. O. SCHREIER, Algebraische Konstruktion reeller Körper Abhdl. aus d. Math. Seminar d. Hamburgischen Univ. V, 1926, S. 85—91

deutigkeitsaxiom noch das Parallelenaxiom hinzu, so lassen sich tatsächlich die Axiome der Anordnung beweisen in dem Sinne, dass man eine Anordnung für die Punkte einer Geraden definieren kann, derart, dass alle gewöhnlichen Axiome der Anordnung (auch das Axiom von Pasch) hieraus folgen werden. Wenn wir aber die Geometrie auf Grund der allgemeinen Kongruenzlehre, unter Annahme des Eindeutigkeitsaxioms, aber ohne das Parallelenaxiom (oder andere Parallelenaxiome), behandeln sollen, wird die Sache nicht so einfach. Erstens können wir, wie wir gesehen haben, das System der Punkte und geraden Linien derart erweitern, dass für das erweiterte System die projektive Geometrie (die Schnittpunktsätze) gültig ist. In der so hergestellten projektiven Ebene lässt sich dann in projektiver Weise eine Euklidische Geometrie definieren, indem wir eine beliebige (uneigentliche) Gerade als die »unendlich ferne Gerade« einführen. Nach den Artin-Schreierschen Untersuchungen kann man nun in dieser Euklidischen Geometrie eine Anordnung einführen. Durch diese Anordnung wird dann auch in der projektiven Ebene eine Anordnung definiert, und schliesslich lässt sich die Strecke AB , welche zwei Realpunkte A und B verbindet, als diejenige projektive Strecke AB definieren, welche den Mittelpunkt von A und B enthält. Es ist aber hier unsicher, ob alle Punkte dieser Strecke reell sind. Es kommen also noch verschiedene Fragen in Betracht, auf die wir aber nicht hier eingehen wollen.

10. Über das Eindeutigkeitsaxiom.

24. Zum Schluss möchte ich noch einige Bemerkungen über das Eindeutigkeitsaxiom hinzufügen.

Verschiedene Versuche sind gemacht worden, um das

Eindeutigkeitsaxiom zu beweisen. Wir erinnern an den bekannten Halbkreisbeweis von PROKLOS, welcher Beweis auch bei Euklid XI, 1 (Elementa, Ausgabe von J. L. Heiberg) zum Vorschein kommt. Ferner an die Bemerkungen LEIBNIZENS in seiner Abhandlung: In Euclidis *ΠΡΩΤΑ*¹. Auch SACCHERI hat sich eingehend aber sehr unklar mit der Frage beschäftigt.² Schliesslich sei nur angeführt, dass LEGENDRE in seinen *Éléments de Géométrie* die Eindeutigkeit der Strecke AB als Axiom angenommen, die Eindeutigkeit der Verlängerung aber als beweisbare Eigenschaft der geraden Linie aufgestellt hat.

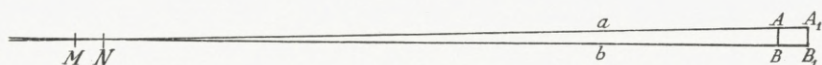


Fig. 8.

Wir haben in der ersten Mitteilung erwiesen, dass das Eindeutigkeitsaxiom auf Grund der allgemeinen Kongruenzlehre mit Hinzunahme der Axiome der Anordnung in Verbindung mit dem Eudoxischen Axiom, beweisbar ist. Wir wollen hier nur noch hinzufügen, dass wenn ausser den Axiomen der Anordnung (ohne das Eudoxische Axiom) noch die Euklidischen Grössenaxiome angenommen werden, dann wird hieraus das Eindeutigkeitsaxiom folgen.

Wir brauchen nämlich nur auf folgende Tatsache hinzuweisen: Wenn zwei Geraden a, b zwei Punkte M, N gemeinsam haben, so gibt es Bewegungen, durch welche beide Geraden in sich verschoben werden, z. B. so, dass M in N übergeht. Ein Lot AB auf b wird dabei in das Lot A_1B_1 übergehen. Die von den Geraden AB, a, b begrenzte Fläche wird dann mit der von den Geraden A_1B_1, a, b be-

¹ LEIBNIZENS mathematische Schriften, herausg. v. Gerhardt. Zw. Abt. Bd. I. S. 207, 209.

² Siehe ENGEL-STÄCKEL, Parallellinien, S. 109—119.

grenzten Fläche zur Deckung gebracht. Das Ganze würde also einem Teil gleich werden, was den Grössenaxiomen widerspricht.

Hierdurch würde also im wesentlichen innerhalb des Rahmens der Euklidischen Darstellung ein wirklicher Beweis für die Eindeutigkeit des Schnittpunktes zweier Geraden (ohne das Eudoxische Axiom) hergestellt sein.

In der nächsten Mitteilung soll nun die weitere Entwicklung der allgemeinen Kongruenzlehre verfolgt werden, indem wir die im Schlusswort der ersten Mitteilung erwähnten »Grossgeometrie« entwickeln werden.

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.

Mathematisk-fysiske Meddelelser. **X**, 2.

FORMELN ZUR
GENÄHERTEN STÖRUNGSRECHNUNG
IN BAHNELEMENTEN

VON

BENGT STRÖMGREN

ANGEWANDT AUF DIE PLANETEN 633 ZELIMA, 956 [1921 IW],
979 ILSEWA, 1035 AMATA UND 1049 [1925 RB]

VON

O. MÖLLER NIELSEN UND E. LAURSEN



KØBENHAVN

HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI

1929

In einer Abhandlung »Genäherte Störungsrechnung und Bahnverbesserung« hat G. STRACKE Formeln zur genäherten Störungsrechnung veröffentlicht. Die Abkürzungen gegenüber einer strengen Störungsrechnung sind durch vier Faktoren bedingt. Erstens wird die Störungsrechnung nur dreistellig geführt, und zweitens werden Störungen zweiter Ordnung vernachlässigt, indem die Berechnung der störenden Kräfte ephemeridenartig für längere Perioden (etwa 5 Jahre) mit Hilfe der ungestörten Elemente erfolgt. Drittens werden alle Integrationen durch Summationen ersetzt. Endlich wird von den störenden Planeten nur Jupiter berücksichtigt. Die Genauigkeit einer genäherten Störungsrechnung nach diesen Richtlinien reicht aus, um die Beobachtungen bis auf etwa ein Hundertstel Grad darzustellen.

Die Abhandlung von STRACKE wendet sich hauptsächlich an »Liebhaber der edlen Rechenkunst«; die Formeln sind deshalb natürlich logarithmisch angelegt.

Nun bieten gerade Formelsysteme, die für Maschinenrechnen geeignet sind, dadurch dass einer Behandlung der Aufgabe in rechtwinkligen Koordinaten der Vorzug gegeben wird, gewisse Vorteile.

Im folgenden soll ein solches Formelsystem abgeleitet und die Formeln zusammengestellt werden, in einer Form, wie sie als Grundlage zur genäherten Störungsrechnung auf der Kopenhagener Sternwarte gedient haben.

Es sei die auf einen Kleinen Planeten wirkende störende Kraft (abgesehen vom Massenfaktor des Kleinen Planeten) durch den Vektor $\bar{\gamma}$ dargestellt. In jedem Augenblick sind die oskulierenden Elemente durch die Vektoren $\bar{r}(x, y, z)$ (Radius Vektor) und $\bar{v}(x, y, z)$ (Geschwindigkeitsvektor) bestimmt. \bar{r} und \bar{v} ändern sich fortwährend; wäre aber $\bar{\gamma} = 0$, so würden die Elemente konstant bleiben. Nun bewirkt ein $\bar{\gamma} \neq 0$ Modifikationen in den Änderungen von \bar{r} und \bar{v} gegenüber dem ungestörten Problem. Nach einer Zeit dt sind diese Modifikationen $d\bar{v} = \bar{\gamma}_0 dt$, $d\bar{r} = \frac{1}{2} \bar{\gamma}_0 dt^2$ plus Gliedern höherer Ordnung. Im Grenzfall $dt \rightarrow 0$ können wir also $d\bar{v} = \bar{\gamma} dt$, $d\bar{r} = 0$ setzen und erhalten so eine Regel zur Bestimmung der Differentiale der Elemente, nach der Zeit dt : Man berechnet die Änderungen der Elemente, die den Änderungen $d\bar{v} = \bar{\gamma} dt$ und $d\bar{r} = 0$ der instantanen Werte von \bar{v} und \bar{r} entsprechen.

Wir wollen die Rechnung in einem festen rechtwinkligen Koordinatensystem durchführen, das folgendermassen gewählt ist. Die Sonne sei im Origo, die Z -Achse sei die positive Bahnnormale des Kleinen Planeten zur Zeit t_0 der Oskulationsepoche. Die Richtung der X -Achse sei die Richtung zum Perihel zur Zeit t_0 .

Die oskulierende Bahn denken wir uns vorläufig durch die folgenden sechs Grössen festgelegt: Die Komponenten I_x und I_y des Drehimpulses des Kleinen Planeten (abgesehen vom Massenfaktor des Kleinen Planeten), den Winkel $\pi = \omega + \Omega$, definiert in Bezug auf das oben gewählte Koordinatensystem, dann die Grössen a , e und M_0 (zur Zeit t_0). Zur Zeit t_0 der Oskulationsepoche gilt: $I_x = 0$, $I_y = 0$, $\pi = 0$, $a = a^0$, $e = e^0$, $M = M_0^0$. Gemäss unserer Absicht, nur Störungen erster Ordnung zu berücksichtigen, wollen wir diese Werte der Elemente in den abzuleitenden Aus-

drücken für die Differentialquotienten der Elemente benutzen.

Aus dem Ausdruck für den Impulsmomentvektor (abgesehen vom Massenfaktor des Kleinen Planeten) $\bar{I} = [\bar{r}\bar{v}]$ folgt unmittelbar die den Änderungen $d\bar{r} = 0$, $d\bar{v} = \bar{\gamma}dt$ entsprechende Änderung $d\bar{I} = [\bar{r}\bar{\gamma}]dt$. Die Länge des Vektors \bar{I} ist gleich $k\sqrt{p}$. Indem wir wieder Störungen zweiter Ordnung vernachlässigen, können wir die den Änderungen $d\bar{r} = 0$, $d\bar{v} = \bar{\gamma}dt$ entsprechenden Änderungen der Bahnnormale \bar{N} angeben:

$$\begin{aligned} dN_x &= d\alpha_1 = \frac{1}{k\sqrt{p}} y\gamma_z \\ dN_y &= d\alpha_2 = -\frac{1}{k\sqrt{p}} x\gamma_z \\ dN_z &= 0. \end{aligned}$$

Der Winkel zwischen der festen X-Achse und dem Radiusvektor ist in derselben Annäherung gleich $\pi + v$. Aus $d\bar{r} = 0$ folgt also $d\pi = -dv$; dv werden wir zusammen mit de weiter unten berechnen.

Es gilt die Gleichung $v^2 = k^2 \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$. Den Änderungen $d\bar{r} = 0$, $d\bar{v} = \bar{\gamma}dt$ entspricht demnach eine Änderung da bestimmt durch

$$2(\bar{v}\bar{\gamma}) dt = \frac{k^2}{a^2} da,$$

oder

$$da = \frac{2a^2}{k^2} (\bar{v}\bar{\gamma}) dt = \frac{2a^2}{k^2} (\dot{x}\gamma_x + \dot{y}\gamma_y),$$

wo \dot{x} und \dot{y} durch die Ausdrücke

$$\dot{x} = -\frac{k}{\sqrt{p}} \frac{y}{r}$$

und

$$\dot{y} = \frac{k}{\sqrt{p}} \cos^2 \varphi \cdot \frac{x + ea}{r}$$

gegeben sind.

Die Grössen e und v ergeben sich aus \bar{r} und \bar{v} nach den Formeln:

$$p^{-\frac{1}{2}} \cdot e \sin v = \frac{1}{kr} (\bar{r}\bar{v})$$

$$e \cos v = \frac{p}{r} - 1, \quad \text{wo } p = \frac{\bar{I}^2}{k^2}.$$

Den Änderungen $d\bar{r} = 0$, $d\bar{v} = \bar{\gamma} dt$ entspricht $dp = \frac{2\bar{I}d\bar{I}}{k^2} = \frac{2\sqrt{p}}{k} (x\gamma_y - y\gamma_x)$ unter Vernachlässigung von Störungen zweiter Ordnung. Es ergeben sich dann die folgenden Formeln für de und dv :

$$\left\{ de \sin v + e \cos v dv \right\} \frac{1}{\sqrt{p}} = \frac{1}{kr} (\bar{r}\bar{\gamma}) dt + e \sin v \frac{dp}{2p\sqrt{p}}$$

$$\left\{ de \cos v - e \sin v dv \right\} \frac{1}{\sqrt{p}} = \frac{dp}{r\sqrt{p}}$$

d. h.

$$de = \frac{\sqrt{p}}{kr^2} (yx\gamma_x + y^2\gamma_y) dt + \frac{2\sqrt{p}}{kr^2} \left(\frac{ey^2}{2p} + x \right) (x\gamma_y - y\gamma_x) dt$$

$$= \frac{\sqrt{p}}{kr^2} \left[(x\gamma_y - y\gamma_x) \left(x + \frac{ey^2}{p} \right) + \gamma_y r^2 \right] dt$$

$$= \frac{\sqrt{p}}{k} \left[(x\gamma_y - y\gamma_x) \frac{x + ea}{ar} + \gamma_y \right] dt$$

und

$$dv = \frac{\sqrt{p}}{ekr^2} (x^2\gamma_x + xy\gamma_y) dt + \frac{2\sqrt{p}}{ekr^2} \left(\frac{exy}{2p} - y \right) (x\gamma_y - y\gamma_x) dt$$

$$= \frac{\sqrt{p}}{ekr^2} \left[\gamma_x \left(r^2 + y^2 \left(1 - \frac{ex}{p} \right) \right) - \gamma_y \left(xy \left(1 - \frac{ex}{p} \right) \right) \right] dt$$

$$= \frac{\sqrt{p}}{ekr^2} \left[\gamma_x \left(r^2 + y^2 \frac{r}{p} \right) - \gamma_y \left(xy \frac{r}{p} \right) \right] dt$$

$$= \frac{\sqrt{p}}{ek} \left[\frac{y}{rp} (x\gamma_y - y\gamma_x) - \gamma_x \right] dt.$$

Aus dem nunmehr bekannten Werte von dv ergibt sich

$$d\pi: d\pi = -dv. \quad \text{Weiter folgt aus } \operatorname{tg} \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{v}{2}$$

$$\frac{1}{2 \cos^2 \frac{E}{2}} dE = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \frac{1}{2 \cos^2 \frac{v}{2}} dv - \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \frac{de}{(1+e)^2} \operatorname{tg} \frac{v}{2}$$

oder, reduziert:

$$dE = \frac{r}{b} dv - \frac{y}{b} \frac{de}{1-e^2}.$$

Nach

$$M = E - e \sin E$$

ist

$$dM = \frac{r}{a} dE - \sin E de$$

d. h.

$$dM = \frac{r^2}{ab} dv - \frac{ry}{ab(1-e^2)} de - \frac{y}{b} de,$$

und, wenn wir $dL_1 = dM + d\pi$ definieren,

$$dL_1 = \left(1 - \frac{r^2}{ab}\right) d\pi - \frac{y}{b} \left(1 + \frac{r}{p}\right) de.$$

Es ergibt sich nun für die totale Änderung von M während der gestörten Bewegung:

$$\frac{dM}{dt} = \mu + \frac{dL_1}{dt} - \frac{d\pi}{dt}$$

d. h.

$$\begin{aligned} M &= M_0^0 + \int_{t_0}^t \mu dt + \Delta L_1 - \Delta \pi \\ &= M_0^0 + \int_{t_0}^t \mu^0 dt + \int_{t_0}^t dt \int_{t_0}^t \frac{d\mu}{dt} dt + \Delta L_1 - \Delta \pi \\ &= M_0^0 + \mu^0 (t - t_0) + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \frac{d\mu}{dt} dt^2 + \Delta L_1 - \Delta \pi. \end{aligned}$$

Hiermit sind unsere Ableitungen durchgeführt. Wir wollen aber nicht bei den Elementen α_1 , α_2 und π stehen bleiben, sondern statt dessen zu den Richtungskosinussen P_x , P_y , P_z und Q_x , Q_y , Q_z der Ellipsenachsen im heliozentrischen äquatorealen rechtwinkligen Koordinatensystem übergehen.

Der Übergang vollzieht sich leicht durch die folgenden Formeln, die man ableitet, indem die Richtungskosinusse der Bahnnormale bzw. der Ellipsenachsen im Planetenkoordinatensystem der Oskulationsepoche t_0 in unserer Näherung die Werte $(\Delta\alpha_1, \Delta\alpha_2, 1)$, $(1, \Delta\pi, -\Delta\alpha_1)$, $(-\Delta\pi, 1, -\Delta\alpha_2)$ haben:

$$\begin{aligned}\Delta P_x &= Q_x \Delta\pi - R_x \Delta\alpha_1 \\ \Delta P_y &= Q_y \Delta\pi - R_y \Delta\alpha_1 \\ \Delta P_z &= Q_z \Delta\pi - R_z \Delta\alpha_1 \\ \Delta Q_x &= -P_x \Delta\pi - R_x \Delta\alpha_2 \\ \Delta Q_y &= -P_y \Delta\pi - R_y \Delta\alpha_2 \\ \Delta Q_z &= -P_z \Delta\pi - R_z \Delta\alpha_2.\end{aligned}$$

Die abgeleiteten Formeln sind im folgenden zusammengestellt. Weitere Bemerkungen knüpfen wir an diese Zusammenstellung.

I. Elemente zur Zeit der Oskulationsepoche t_0 .

$$\begin{array}{lll} P_x & Q_x & R_x \\ P_x^1 &= P_x'' - 0.022 P_z'' & P_y^1 = P_y'' - 0.004 P_z'' \\ P_y & Q_y & R_y \\ Q_x^1 &= Q_x'' - 0.022 Q_z'' & Q_y^1 = Q_y'' - 0.004 Q_z'' \\ P_z & Q_z & R_z \\ R_x^1 &= R_x'' - 0.022 R_z'' & R_y^1 = R_y'' - 0.004 R_z'' \end{array} \quad a, e, M_0, \mu, \varphi, w\mu$$

$$\begin{array}{lll} k_1 = a^{-\frac{1}{2}} \cdot wkm \sec \varphi & k_5 = a \cdot \cos^2 \varphi \sin \varphi & k_9 = a \cdot \cos^2 \varphi \operatorname{cosec} \varphi \\ k_2 = a^{-\frac{1}{2}} \cdot 3 kw & k_6 = \cos^2 \varphi & k_{10} = a^{-2} \cdot \sec \varphi \\ k_3 = a^{+\frac{1}{2}} \cdot 3 kw \cos^2 \varphi \sin \varphi & k_7 = a \cdot \cos^2 \varphi & k_{11} = a^{-1} \cdot \sec \varphi \\ k_4 = a^{-\frac{1}{2}} \cdot 3 kw \sin^2 \varphi & k_8 = \operatorname{cosec} \varphi & k_{12} = a^{-2} \cdot \sec^3 \varphi \end{array}$$

k_1 bis k_{12} hängen nur von a und φ zur Zeit der Oskulationsepoche t_0 ab.

II. Die Jupiterkoordinaten.

Im Anhang findet man die Jupiterkoordinaten x_1, y_1 sowie $\frac{100}{r_1^3}$ für jeden achtzigsten Tag.

$$\begin{aligned}\xi &= P_x^1 x_1 + P_y^1 y_1 \\ \eta &= Q_x^1 x_1 + Q_y^1 y_1 \\ \zeta &= R_x^1 x_1 + R_y^1 y_1.\end{aligned}$$

III. Berechnung der störenden Kräfte.

Die Koordinaten des Kleinen Planeten berechnet man mit Hilfe der Tafeln von STRACKE (V. R. I. 46):

$$\begin{aligned}x &= a \cdot C \\ y &= a \cdot S, \quad r^2 = x^2 + y^2 \\ \varrho^2 &= (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + \zeta^2\end{aligned}$$

und daraus $\frac{1}{\varrho^3}$ mit Hilfe der Numerov'schen Tafel.

$$\begin{aligned}K &= k_1 \left(\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{r_1^3} \right) \\ \gamma'_x &= K\xi - k_1 \frac{x}{\varrho^3} \\ \gamma'_y &= K\eta - k_1 \frac{y}{\varrho^3} \\ \gamma'_z &= K\zeta \\ T &= \frac{1}{r} (x\gamma'_y - y\gamma'_x).\end{aligned}$$

IV. Berechnung der Elementenstörungen.

$$\begin{aligned}w \frac{d\alpha_1}{dt} &= y\gamma'_z \\ w \frac{d\alpha_2}{dt} &= -x\gamma'_z \\ w^2 \frac{d\mu}{dt} &= -k_2 T - \frac{k_3 - k_4 x}{r} \gamma'_y = -k_2 \left(T + \frac{\gamma'_y}{k_8} \right) \\ w \frac{de}{dt} &= (k_5 + k_6 x) T + k_7 \gamma'_y \\ w \frac{d\pi}{dt} &= k_8 y T - k_9 \gamma'_x \\ w \frac{dL_1}{dt} &= (1 - k_{10} r^2) \frac{wd\pi}{dt} - (k_{11} + k_{12} r) y \frac{wde}{dt}.\end{aligned}$$

V. Summation.

$$\Delta(\text{Element}) = \sum w \frac{d(\text{Element})}{dt}, \quad \Delta L_{\mu} = \sum w \Delta \mu, \quad w \Delta \mu = \sum w^2 \frac{d\mu}{dt}.$$

VI. Berechnung von neuen oskulierenden Elementen.

Dieselben Formeln dienen zur Berechnung instantaner Elemente für den Vergleich mit Beobachtungen.

Nr. 2. BENGT STRÖMGREN:

$$\Delta P_x = Q_x \Delta \pi - R_x \Delta \alpha_1$$

$$\Delta R_x = P_x \Delta \alpha_1 + Q_x \Delta \alpha_2$$

$$\Delta P_y = Q_y \Delta \pi - R_y \Delta \alpha_1$$

$$\Delta R_y = P_y \Delta \alpha_1 + Q_y \Delta \alpha_2$$

$$\Delta P_z = Q_z \Delta \pi - R_z \Delta \alpha_1$$

$$\Delta R_z = P_z \Delta \alpha_1 + Q_z \Delta \alpha_2$$

$$\Delta Q_x = -P_x \Delta \pi - R_x \Delta \alpha_2$$

$$\Delta P_x^1 = \Delta P_x$$

$$\Delta Q_x^1 = \Delta Q_x$$

$$\Delta R_x^1 = \Delta R_x$$

$$\Delta Q_y = -P_y \Delta \pi - R_y \Delta \alpha_2$$

$$\Delta P_y^1 = \Delta P_y \cos \epsilon + \Delta P_z \sin \epsilon$$

$$\Delta Q_y^1 = \Delta Q_y \cos \epsilon + \Delta Q_z \sin \epsilon$$

$$\Delta R_y^1 = \Delta R_y \cos \epsilon + \Delta R_z \sin \epsilon$$

$$\Delta Q_z = -P_z \Delta \pi - R_z \Delta \alpha_2$$

$$\Delta P_z^1 = \Delta P_z \cos \epsilon + \Delta P_x \sin \epsilon$$

$$\Delta Q_z^1 = \Delta Q_z \cos \epsilon + \Delta Q_x \sin \epsilon$$

$$\Delta R_z^1 = \Delta R_z \cos \epsilon + \Delta R_x \sin \epsilon$$

$$\Delta \alpha = -\frac{2}{3} \frac{\alpha}{w \mu} \cdot w \Delta \mu$$

$$\Delta M_0 = \Delta L_1 + \Delta L_{\mu} - \Delta \pi$$

$$M = M_0^0 + \Delta M_0 + \mu^0 (t - t_0).$$

Nur die Formeln in der ersten Kolonne werden bei dem Vergleich mit Beobachtungen benutzt.

Die Grössen P_x, P_y, P_z und Q_x, Q_y, Q_z in I sind die Richtungskosinuse in Bezug auf das Äquatorsystem der grossen, bzw. der kleinen Achse der oskulierenden Ellipse zur Zeit der Oskulationsepoche t_0 . In A. N. 5597 hat STRACKE in Aussicht gestellt, dass das Astronomische Recheninstitut bald Werte dieser Konstanten für die Kleinen Planeten veröffentlichen wird. Bis dahin muss man die gegebenen Werte von ω, Ω, i nach den bekannten Formeln umrechnen:

$$\begin{aligned} P_x'' &= \cos \Omega \cos \omega - \cos i \sin \Omega \sin \omega \\ P_y'' &= \sin \Omega \cos \omega + \cos i \cos \Omega \sin \omega \\ P_z'' &= \sin i \sin \omega \\ Q_x'' &= -\cos i \sin \Omega \cos \omega - \cos \Omega \sin \omega \\ Q_y'' &= \cos i \cos \Omega \cos \omega - \sin \Omega \sin \omega \\ Q_z'' &= \sin i \cos \omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_x &= P_x'' & Q_x &= Q_x'' \\ P_y &= P_y'' \cos \varepsilon - P_z'' \sin \varepsilon & Q_y &= Q_y'' \cos \varepsilon - Q_z'' \sin \varepsilon \\ P_z &= P_y'' \sin \varepsilon + P_z'' \cos \varepsilon & Q_z &= Q_y'' \sin \varepsilon + Q_z'' \cos \varepsilon. \end{aligned}$$

Die Grössen R_x, R_y, R_z sind die Richtungskosinuse der Bahnnormale in Bezug auf das Äquatorsystem. Man hat:

$$\begin{aligned} R_x'' &= \sin i \sin \Omega & R_x &= R_x'' \\ R_y'' &= -\sin i \cos \Omega & R_y &= R_y'' \cos \varepsilon - R_z'' \sin \varepsilon \\ R_z'' &= \cos i & R_z &= R_y'' \sin \varepsilon + R_z'' \cos \varepsilon. \end{aligned}$$

Die Grössen P_x^1, Q_x^1, R_x^1 und P_y^1, Q_y^1, R_y^1 sind Kosinuse der Winkel zwischen $\bar{P}, \bar{Q}, \bar{R}$ und zwei Achsen X_1, Y_1 in der Jupiterbahn, die wir sogleich definieren wollen: X_1 ist die Knotenlinie der Jupiterbahn 1925.0 um den Winkel Ω in der Bahn zurückgedreht; Y_1 liegt in der Bahn senkrecht zu X_1 , sodass der Winkel $X_1 Y_1 = +90^\circ$. In den gegebenen Formeln zur Berechnung dieser Grössen ist erlaubterweise $\cos i_{\mathcal{J}} = 1$ gesetzt ($\cos i_{\mathcal{J}} = 0.9997$).

In den Formeln in VI sind Grössen zweiter Ordnung in $A\pi$, $A\alpha_1$, $A\alpha_2$ vernachlässigt. Für die Grössen $A\alpha_1$ und $A\alpha_2$ ist dies unbedenklich, $A\pi$ kann dagegen bekanntlich bei kleinen Exzentrizitäten gross werden, so dass man $A\pi^2$ berücksichtigen muss. Dies geschieht am einfachsten, indem man die P_x , P_y , P_z , Q_x , Q_y , Q_z mit $\left(1 - \frac{1}{2}A\pi^2\right)$ multipliziert.

Bei kleinen Werten der Exzentrizität kann $A\pi$, wie gesagt, beträchtliche Werte erreichen. Ungenauigkeiten in $A\pi$ fallen dann entsprechend weniger ins Gewicht, wenn nur genau derselbe Wert von $A\pi$ zur Berechnung der Grössen AP_x , AP_y , ... wie zur Berechnung von M benutzt wird.

Was endlich die Frage von der Wahl des Äquinoktiums des Äquatorsystems betrifft, in dem man rechnet, möchte ich der Methode den Vorzug geben, die alle Grössen auf das Äquinoktium 1925.0 bezieht. Die hier gegebenen Formeln lassen sich aber leicht jeder Methode anpassen.

An dieser Stelle möchte ich noch den Herren O. MÖLLER NIELSEN, E. LAURSEN, K. STEENBERG SÖRENSEN und HENRY JENSEN für verschiedene Kontrollrechnungen herzlich danken.

Im folgenden sind die Resultate der genäherten Störungsrechnung und der nachherigen Bahnverbesserung für 5 Kleine Planeten, die auf Anregung von Professor STRACKE übernommen wurden, zusammengestellt. Die Störungsrechnung ist im wesentlichen nach den oben zusammengestellten Formeln erfolgt; einige Modifikationen der Formeln ergaben sich im Laufe der Rechnung, bis ich bei den oben mitgeteilten Formeln stehen blieb; manche Modifikation verdanke ich den Herren MÖLLER NIELSEN und LAURSEN. Die

Zusammenstellung gibt für jeden Planeten: Die Ausgangselemente, die benutzten Beobachtungen, die Abweichungen $B-R$ ohne und mit Berücksichtigung der Störungen, die daraus erhaltenen Verbesserungen der Elemente, die Darstellung der benutzten Beobachtungen, sowie etwa noch vorhandener Beobachtungen durch das verbesserte Elementensystem unter Berücksichtigung der Störungen.

633 Zelima (Berechner: O. MÖLLER NIELSEN).

Epoche und Oskulation 1925 Jan. 1.0 Weltzeit.

$$\begin{aligned}
 M_0 &= 48^\circ.758 \\
 \omega &= 184.917 \\
 \Omega &= 147.910 \\
 i &= 10.876
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} \omega \\ \Omega \\ i \end{aligned}} \right\} \text{Ekliptik 1925.0}$$

$$\begin{aligned}
 \varphi &= 4.758 \\
 \mu &= 677''.500 \\
 a &= 3.0158
 \end{aligned}$$

Die Elemente sind der V. R. I. 45 entnommen. Der dort gegebene Wert von $\log a$ (oder der von μ) scheint durch einen Druckfehler entstellt zu sein. Es wurde ein mit dem gegebenen Wert von μ übereinstimmendes a benutzt.

Beobachtungen:

Weltzeit	α	δ	Äquin.	Beob.-Ort	Publ.
1907 Mai 13.03	243.70	— 4.79	1907.0	Königstuhl	A. N. 206 , 61
1909 Dez. 15.96	75.65	+ 7.73	1909.0	Königstuhl	A. N. 183 , 191
1918 Juli 16.96	290.82	— 11.88	1918.0	Königstuhl	A. N. 207 , 159
1923 Juni 10.90	269.05	— 8.73	1925.0	Simeis	B. Z. 18
1928 Mai 15.94	247.42	— 5.50	1925.0	Simeis	B. Z. 23

Weltzeit	Beob. — Rechnung (Störungen nicht berücksichtigt)		Beob. — Rechnung (Störungen berücksichtigt)	
	$\Delta\alpha \cos \delta$	$\Delta\delta$	$\Delta\alpha \cos \delta$	$\Delta\delta$
1907 Mai 13.03	-0.82	$+0.20$	$+0.96$	-0.19
1909 Dez. 15.96	$+1.41$	$+0.21$	$+0.74$	$+0.11$
1918 Juli 16.96	-0.18	$+0.02$	-0.44	-0.05
1923 Juni 10.90	-1.03	$+0.10$	-1.03	$+0.11$
1928 Mai 15.94	-1.90	$+0.33$	-1.60	$+0.28$

Verbesserungen: $dM_0 = -0^\circ.600$ $di = +0^\circ.008$
 $d\omega = -0^\circ.0013$ $de = +0.00033$
 $d\Omega = -0^\circ.171$ $da = +0.0024$

und dem entsprechend:

$d\varphi = +0^\circ.019$
 $d\mu = -0''.81$

Epoche und Oskulation 1925 Jan. 1.0 Weltzeit.

$$\left. \begin{aligned} M_0 &= 48^\circ.158 \\ \omega &= 184.916 \\ \Omega &= 147.739 \\ i &= 10.884 \end{aligned} \right\} \text{Ekliptik 1925.0}$$

$$\begin{aligned} \varphi &= 4.777 \\ \mu &= 676''.69 \\ a &= 3.0182 \end{aligned}$$

Vergleich mit den benutzten Beobachtungen:

Weltzeit	B — R Bedingungsgl.		B — R Dir. Rechnung	
	$\Delta\alpha \cos \delta$	$\Delta\delta$	$\Delta\alpha \cos \delta$	$\Delta\delta$
1907 Mai 13.03	$+0.02$	-0.01	$+0.02$	-0.01
1909 Dez. 15.96	$+0.04$	-0.02	$+0.04$	0.00
1918 Juli 16.96	-0.02	-0.01	0.00	-0.01
1923 Juni 10.90	$+0.05$	$+0.02$	$+0.04$	$+0.01$
1928 Mai 15.94	0.00	-0.02	0.00	-0.02

Vergleich mit sonst vorhandenen Beobachtungen:

Datum	B - R $\Delta\alpha \cos \delta$	B - R $\Delta\delta$	Beob.-Ort	Publ.
1907 Juni 5.....	+ 0.01	- 0.01	Wien	A. N. 178, 129
1907 Juli 5.....	+ 0.04	- 0.01	Wien	A. N. 178, 129
1923 Juni 8.....	+ 0.04	+ 0.01	Simeis	B. Z. 18
1923 Juli 7.....	+ 0.05	+ 0.01	Königstuhl	B. Z. 18
1928 Mai 11.....	0.00	- 0.02	Königstuhl	B. Z. 20

956 [1921 IW] (Berechner: E. LAURSEN).

Epoche und Oskulation 1925 Jan. 1.0 Weltzeit.

$$\begin{aligned}
 M_0 &= 358^\circ.654 \\
 \omega &= 123.757 \\
 \Omega &= 192.769 \\
 i &= 5.937 \\
 \varphi &= 11.776 \\
 \mu &= 1018'' .988
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} M_0 \\ \omega \\ \Omega \\ i \\ \varphi \\ \mu \end{aligned}} \right\} \text{Ekliptik 1925.0}$$

$\log a = 0.36122$

Die Elemente sind der V. R. I. 45 entnommen.

Beobachtungen:

Weltzeit	$\alpha_{1925.0}$	$\delta_{1925.0}$	Beob.-Ort	Publ.
1921 Sept. 5.93...	335.92	- 2.52	Königstuhl	A. N. 216, 167
1923 Jan. 21.37...	121.96	+ 11.22	Yerkes	A. J. 35, 135
1924 Mai 10.99...	220.21	- 9.55	Königstuhl	B. Z. 14
1928 Sept. 9.94...	345.24	- 0.15	Königstuhl	B. Z. 34

Weltzeit	Beob. — Rechnung (Störungen nicht berücksichtigt)		Beob. — Rechnung (Störungen berücksichtigt)	
	$\Delta\alpha \cos \delta$	$\Delta\delta$	$\Delta\alpha \cos \delta$	$\Delta\delta$
1921 Sept. 5.93...	- 0.01	- 0.02	+ 0.21	+ 0.04
1923 Jan. 21.37...	- 0.19	+ 0.04	- 0.27	+ 0.05
1924 Mai 10.99...	- 0.37	+ 0.08	- 0.39	+ 0.08
1928 Sept. 9.94...	- 1.43	- 0.43	- 0.90	- 0.26

Verbesserungen:

$$\begin{aligned} dM_0 &= + 0^\circ.100 \\ d\omega &= - 0^\circ.324 \\ de &= + 0.00029 \\ da &= + 0.0008 \end{aligned}$$

und dementsprechend:

$$\begin{aligned} d\varphi &= + 0^\circ.017 \\ d\mu &= - 0''.501 \end{aligned}$$

Epoche und Oskulation 1925 Jan. 1.0 Weltzeit.

$$\begin{aligned} M_0 &= 358^\circ.754 \\ \omega &= 123.433 \\ \Omega &= 192.769 \\ i &= 5.937 \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} M_0 \\ \omega \\ \Omega \\ i \end{aligned}} \right\} \text{Ekliptik 1925.0}$$

$$\begin{aligned} \varphi &= 11.793 \\ \mu &= 1018''.487 \\ a &= 2.2981 \end{aligned}$$

Vergleich mit den benutzten Beobachtungen:

Weltzeit	B — R Bedingungsgl.		B — R Dir. Rechnung	
	$\Delta\alpha \cdot \cos \delta$	$\Delta\delta$	$\Delta\alpha \cdot \cos \delta$	$\Delta\delta$
1921 Sept. 5.93...	+ 0.01	- 0.02	+ 0.02	- 0.01
1923 Jan. 21.37...	0.00	0.00	- 0.01	0.00
1924 Mai 10.99...	0.00	- 0.01	- 0.02	0.00
1928 Sept. 9.94...	- 0.01	+ 0.02	- 0.02	+ 0.02

Vergleich mit sonst vorhandenen Beobachtungen:

Datum	B — R $\Delta\alpha \cos \delta$	B — R $\Delta\delta$	Beob.-Ort	Publ.
1921 Aug. 9.....	+ 0.02	0.00	Königstuhl	A. N. 223 , 173
1921 Okt. 31.....	0.00	- 0.01	Wien	A. N. 217 , 25
1923 Jan. 22.....	- 0.04	+ 0.01	Yerkes	A. J. 35 , 135
1928 Sept. 15.....	+ 0.02	- 0.01	Simeis	B. Z. 38.

979 Ilsewa (Berechner: O. MÖLLER NIELSEN).

Epoche und Oskulation 1925 Jan. 1.0 Weltzeit.

$$\begin{aligned}
 M_0 &= 109^\circ.129 \\
 \omega &= 111.287 \\
 \Omega &= 232.045 \\
 i &= 10.044 \\
 \varphi &= 7.975 \\
 \mu &= 633''.729 \\
 a &= 3.1531 \quad (\text{aus den V. R. I. 45})
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} \omega \\ \Omega \\ i \end{aligned}} \right\} \text{Ekliptik 1925.0}$$

Beobachtungen:

Weltzeit	α	δ	Äquin.	Beob.-Ort	Publ.
1922 Juli 21.95	272 ^o .44	-12 ^o .10	1922.0	Königstuhl	A. N. 218, 259
1923 Okt. 9.85	22.45	+17.55	1925.0	Simeis	B. Z. 27
1926 März 13.30	162.65	- 6.11	1925.0	Yerkes	A. J. 37, 51
1928 Juli 20.96	318.42	- 0.17	1928.0	Simeis	B. Z. 29

Weltzeit	Beob. — Rechnung (Störungen nicht berücksichtigt)		Beob. — Rechnung (Störungen berücksichtigt)	
	$\Delta\alpha \cos \delta$	$\Delta\delta$	$\Delta\alpha \cos \delta$	$\Delta\delta$
1922 Juli 21.95	-0 ^o .01	-0 ^o .01	-0 ^o .07	-0 ^o .02
1923 Okt. 9.85	-0.02	0.00	-0.04	+0.01
1926 März 13.30	-0.31	+0.12	-0.31	+0.12
1928 Juli 20.96	-1.46	-0.44	-1.48	-0.48

Verbesserungen:

$$\begin{aligned}
 dM_0 &= -0^\circ.439 \\
 d\omega &= +0^\circ.222 \\
 de &= +0.0013 \\
 da &= +0.0043
 \end{aligned}$$

und dementsprechend:

$$\begin{aligned}
 d\varphi &= +0^\circ.077 \\
 d\mu &= -1''.29
 \end{aligned}$$

Epoche und Oskulation 1925 Jan. 1.0 Weltzeit.

$$\begin{aligned}
 M_0 &= 108^\circ.690 \\
 \omega &= 111.509 \\
 \Omega &= 232.045 \\
 i &= 10.044 \\
 \varphi &= 8.052 \\
 \mu &= 632''.44 \\
 a &= 3.1574
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} M_0 \\ \omega \\ \Omega \\ i \\ \varphi \\ \mu \\ a \end{aligned}} \right\} \text{Ekliptik 1925.0}$$

Vergleich mit den benutzten Beobachtungen:

Weltzeit	B — R Bedingungsgl.		B — R Dir. Rechnung	
	$\Delta\alpha \cos \delta$	$\Delta\delta$	$\Delta\alpha \cos \delta$	$\Delta\delta$
1922 Juli 21.95	0.00	0.00	0.00	+ 0.01
1923 Okt. 9.85	- 0.01	+ 0.02	- 0.02	+ 0.01
1926 März 13.30	0.00	0.00	- 0.01	0.00
1928 Juli 20.96	+ 0.01	0.00	+ 0.02	0.00

Vergleich mit sonst vorhandenen Beobachtungen:

Datum	B — R		Beob.-Ort	Publ.
	$\Delta\alpha \cos \delta$	$\Delta\delta$		
1922 Juli 1.....	- 0.02	+ 0.01	Königstuhl	A. N. 218 , 259
1922 Aug. 20.....	+ 0.01	+ 0.01	Königstuhl	A. N. 218 , 259
1923 Okt. 30.....	- 0.02	+ 0.03	Königstuhl	B. Z. 27
1926 März 10.....	- 0.05	- 0.01	Yerkes	A. J. 37 , 51

1035 Amata (Berechner: E. LAURSEN).

[1913 TF = 1924 SW].

Epoche und Oskulation 1924 Sept. 30.0 Weltzeit.

$$\begin{aligned}
 M_0 &= 35^\circ.419 \\
 \omega &= 320.281 \\
 \Omega &= 2.854 \\
 i &= 17.923
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} M_0 \\ \omega \\ \Omega \\ i \end{aligned}} \right\} \text{Ekliptik 1924.0}$$

$$\begin{aligned}\varphi &= 11^{\circ}.132 \\ \mu &= 634''.793 \\ \log a &= 0.498250\end{aligned}$$

Die Elemente sind den A. N. **226**, 267 entnommen.

Beobachtungen:

Weltzeit	α	δ	Äquin.	Beob.-Ort	Publ.
1913 Nov. 19.78	20 ^o .67	+ 25 ^o .37	1913.0	Königstuhl	A. N. 196 , 320
1924 Okt. 18.79	9.72	+ 12.33	1924.0	Königstuhl	A. N. 223 , 399
1928 April 24.22	196.37	- 17.94	1925.0	Yerkes	A. J. 39 , 13

Weltzeit	Beob. — Rechnung (Störungen nicht berücksichtigt)		Beob. — Rechnung (Störungen berücksichtigt)	
	$\Delta\alpha \cos \delta$	$\Delta\delta$	$\Delta\alpha \cos \delta$	$\Delta\delta$
1913 Nov. 19.78	- 0 ^o .10	- 0 ^o .02	- 0 ^o .05	- 0 ^o .02
1924 Okt. 18.79	0.00	- 0.01	0.00	- 0.01
1928 April 24.22	- 0.53	+ 0.45	- 0.36	+ 0.30

Verbesserungen:

$$\begin{aligned}dM_0 &= + 0^{\circ}.067 \\ d\omega &= - 0^{\circ}.248 \\ de &= + 0.00153 \\ da &= - 0.00012\end{aligned}$$

und dementsprechend:

$$\begin{aligned}d\varphi &= + 0^{\circ}.089 \\ d\mu &= + 0''.036\end{aligned}$$

Epoche und Oskulation 1924 Sept. 30.0 Weltzeit.

$$\left. \begin{aligned}M_0 &= 35^{\circ}.486 \\ \omega &= 320.033 \\ \Omega &= 2.854 \\ i &= 17.923\end{aligned} \right\} 1924.0$$

$$\varphi = 11^{\circ}.221$$

$$\mu = 634''.829$$

$$a = 3.14944$$

Vergleich mit den benutzten Beobachtungen:

Weltzeit	B — R Bedingungsgl.		B — R Dir. Rechnung	
	$A\alpha \cos \delta$	$A\delta$	$A\alpha \cos \delta$	$A\delta$
1913 Nov. 19.78	-0.01	$+0.01$	0.00	$+0.01$
1924 Okt. 18.79	$+0.01$	-0.01	$+0.01$	-0.01
1928 April 24.22	0.00	0.00	-0.01	0.00

Vergleich mit sonst vorhandenen Beobachtungen:

Datum	B — R		Beob.-Ort	Publ.
	$A\alpha \cos \delta$	$A\delta$		
1913 Okt. 31...	$+0.10^1$	-0.06^1	Königstuhl	A. N. 196 , 267
1924 Sept. 29...	0.00	-0.01	Königstuhl	A. N. 223 , 177
1928 April 20...	-0.02	$+0.02$	Yerkes	A. J. 39 , 13

¹ Diese Beobachtung scheint fehlerhaft zu sein, da eine Auflösung mit dieser Beobachtung (unter Weglassung der Beobachtung vom 19. Nov. 1913) zu ungenügenden Resultaten führte.

1049 (1925 RB) (Berechner: O. MÖLLER NIELSEN).

Epoche und Oskulation 1925 Sept. 15.0 Weltzeit.

$$M_0 = 346^{\circ}.1588$$

$$\left. \begin{array}{l} \omega = 32.1459 \\ \Omega = 343.6432 \\ i = 15.2078 \end{array} \right\} \text{Ekliptik 1925.0}$$

$$\varphi = 7.1255$$

$$\mu = 0^{\circ}.180991$$

$$a = 3.09526 \quad (\text{aus den A. N. } \mathbf{229}, 297).$$

Beobachtungen:

Weltzeit	α	δ	Äquin.	Beob.-Ort	Publ.
1925 Okt. 10.87	352.71	+ 5.60	1925.0	Königstuhl	A. N. 226, 334
1927 Jan. 9.55	106.56	+ 41.90	1927.0	Tokyo	T. A. B. 1
1928 März 19.03	171.45	— 0.58	1928.0	Königstuhl	B. Z. 14

Weltzeit	Beob. — Rechnung (Störungen nicht berücksichtigt)		Beob. — Rechnung (Störungen berücksichtigt)	
	$\Delta\alpha \cos \delta$	$\Delta\delta$	$\Delta\alpha \cos \delta$	$\Delta\delta$
1925 Okt. 10.87	— 0.01	0.00	— 0.01	0.00
1927 Jan. 9.55	+ 0.86	— 0.24	+ 0.85	— 0.23
1928 März 19.03	+ 0.85	— 0.67	+ 0.84	— 0.67

Verbesserungen:

$$\begin{aligned}
 dM_0 &= -0^\circ.300 \\
 d\omega &= +0^\circ.416 \\
 de &= + 0.00126 \\
 da &= - 0.00828
 \end{aligned}$$

und dementsprechend:

$$\begin{aligned}
 d\varphi &= +0^\circ.0728 \\
 d\mu &= +0^\circ.000729
 \end{aligned}$$

Epoche und Oskulation 1925 Sept. 15.0 Weltzeit.

$$\begin{aligned}
 M_0 &= 345^\circ.859 \\
 \left. \begin{aligned}
 \omega &= 32.562 \\
 \Omega &= 343.643 \\
 i &= 15.208
 \end{aligned} \right\} \text{Ekliptik 1925.0} \\
 \varphi &= 7.198 \\
 \mu &= 654''.192 \\
 a &= 3.08698
 \end{aligned}$$

Vergleich mit den benutzten Beobachtungen:

Weltzeit	B — R Bedingungsgl.		B — R Dir. Rechnung	
	$A\alpha \cos \delta$	$A\delta$	$A\alpha \cos \delta$	$A\delta$
1925 Okt. 10.87	+ 0.01	— 0.01	+ 0.01	— 0.03
1927 Jan. 9.55	— 0.02	— 0.04	— 0.01	— 0.04
1928 März 19.03	0 00	— 0.01	0.00	0.00

Vergleich mit sonst vorhandenen Beobachtungen:

Datum	B — R		Beob.-Ort	Publ.
	$A\alpha \cos \delta$	$A\delta$		
1925 Sept. 15...	0.00	— 0.01	Königstuhl	A. N. 226 , 334
1925 Nov. 19...	+ 0.02	— 0.02	Königstuhl	A. N. 226 , 334
1927 Jan. 2...	— 0.02	— 0.03	Tokyo	T. A. B. 1
1927 Jan. 4...	— 0.02	— 0.04	Tokyo	T. A. B. 1

Jupiterkoordinaten x_1 und y_1 . Äquinoktium 1925.0.

	12 ^h Weltzeit		x_1	y_1	$\frac{100}{r_1^3}$
1900	März 5.....		— 2.70	— 4.64	0.646
	Mai 24.....		— 2.17	— 4.89	0.655
	August 12.....		— 1.61	— 5.07	0.664
	Oktober 31.....		— 1.03	— 5.19	0.673
1901	Januar 19.....		— 0.44	— 5.25	0.684
	April 9.....		+ 0.16	— 5.24	0.695
	Juni 28.....		+ 0.75	— 5.16	0.707
	September 16.....		+ 1.34	— 5.01	0.719
	Dezember 5.....		+ 1.90	— 4.79	0.731
1902	Februar 23.....		+ 2.45	— 4.50	0.744
	Mai 14.....		+ 2.95	— 4.15	0.756
	August 2.....		+ 3.42	— 3.75	0.768
	Oktober 21.....		+ 3.83	— 3.28	0.779
1903	Januar 9.....		+ 4.19	— 2.77	0.789
	März 30.....		+ 4.48	— 2.22	0.799
	Juni 18.....		+ 4.71	— 1.64	0.807

Jupiterkoordinaten x_1 und y_1 . Äquinoktium 1925.0 (Fortsetz.).

12 ^b Weltzeit		x_1	y_1	$\frac{100}{r_1^3}$
1903	September 6.	+ 4.87	— 1.03	0.813
	November 25.	+ 4.95	— 0.40	0.818
1904	Februar 13.	+ 4.95	+ 0.23	0.822
	Mai 3.	+ 4.88	+ 0.86	0.824
	Juli 22.	+ 4.73	+ 1.48	0.823
	Oktober 10.	+ 4.50	+ 2.07	0.821
	Dezember 29.	+ 4.21	+ 2.63	0.817
1905	März 19.	+ 3.85	+ 3.15	0.812
	Juni 7.	+ 3.44	+ 3.62	0.805
	August 26.	+ 2.97	+ 4.03	0.797
	November 14.	+ 2.45	+ 4.39	0.787
1906	Februar 2.	+ 1.90	+ 4.68	0.776
	April 23.	+ 1.32	+ 4.90	0.765
	Juli 12.	+ 0.73	+ 5.05	0.753
	September 30.	+ 0.12	+ 5.13	0.741
	Dezember 19.	— 0.49	+ 5.14	0.728
1907	März 9.	— 1.10	+ 5.07	0.716
	Mai 28.	— 1.68	+ 4.94	0.704
	August 16.	— 2.25	+ 4.74	0.693
	November 4.	— 2.79	+ 4.48	0.682
1908	Januar 23.	— 3.29	+ 4.16	0.671
	April 12.	— 3.75	+ 3.79	0.662
	Juli 1.	— 4.16	+ 3.37	0.653
	September 19.	— 4.52	+ 2.90	0.645
	Dezember 8.	— 4.82	+ 2.41	0.638
1909	Februar 26.	— 5.07	+ 1.88	0.633
	Mai 17.	— 5.26	+ 1.33	0.627
	August 5.	— 5.38	+ 0.77	0.623
	Oktober 24.	— 5.44	+ 0.20	0.620
1910	Januar 12.	— 5.44	— 0.38	0.618
	April 2.	— 5.37	— 0.95	0.617
	Juni 21.	— 5.24	— 1.51	0.617
	September 9.	— 5.05	— 2.05	0.618
	November 28.	— 4.80	— 2.57	0.620

Jupiterkoordinaten x_1 und y_1 . Äquinoktium 1925.0 (Fortsetz.).

12 ^h Weltzeit			x_1	y_1	$\frac{100}{r_1^3}$
1911	Februar	16.	- 4.49	- 3.06	0.623
	Mai	7.	- 4.13	- 3.51	0.627
	Juli	26.	- 3.72	- 3.92	0.632
	Oktober	14.	- 3.27	- 4.28	0.638
1912	Januar	2.	- 2.78	- 4.60	0.645
	März	22.	- 2.25	- 4.85	0.653
	Juni	10.	- 1.70	- 5.05	0.662
	August	29.	- 1.12	- 5.18	0.672
	November	17.	- 0.53	- 5.25	0.682
1913	Februar	5.	+ 0.07	- 5.24	0.693
	April	26.	+ 0.66	- 5.17	0.705
	Juli	15.	+ 1.25	- 5.03	0.717
	Oktober	3.	+ 1.82	- 4.83	0.729
	Dezember	22.	+ 2.36	- 4.55	0.741
1914	März	12.	+ 2.88	- 4.21	0.753
	Mai	31.	+ 3.35	- 3.82	0.765
	August	19.	+ 3.77	- 3.36	0.776
	November	7.	+ 4.14	- 2.86	0.787
1915	Januar	26.	+ 4.44	- 2.31	0.796
	April	16.	+ 4.68	- 1.73	0.805
	Juli	5.	+ 4.85	- 1.13	0.812
	September	23.	+ 4.94	- 0.50	0.817
	Dezember	12.	+ 4.96	+ 0.13	0.821
1916	März	1.	+ 4.89	+ 0.76	0.823
	Mai	20.	+ 4.76	+ 1.38	0.823
	August	8.	+ 4.55	+ 1.97	0.821
	Oktober	27.	+ 4.27	+ 2.54	0.818
1917	Januar	15.	+ 3.92	+ 3.06	0.813
	April	5.	+ 3.51	+ 3.54	0.806
	Juni	24.	+ 3.05	+ 3.97	0.798
	September	12.	+ 2.54	+ 4.33	0.789
	Dezember	1.	+ 1.99	+ 4.64	0.778
1918	Februar	19.	+ 1.42	+ 4.87	0.767
	Mai	10.	+ 0.82	+ 5.03	0.755

Jupiterkoordinaten x_1 und y_1 . Äquinoktium 1925.0 (Fortsetz.).

12 ^b Weltzeit		x_1	y_1	$\frac{100}{r_1^3}$
1918	Juli 29.	+ 0.22	+ 5.12	0.743
	Oktober 17.	- 0.39	+ 5.14	0.731
1919	Januar 5.	- 1.00	+ 5.08	0.719
	März 26.	- 1.59	+ 4.96	0.707
	Juni 14.	- 2.16	+ 4.77	0.696
	September 2.	- 2.70	+ 4.52	0.684
	November 21.	- 3.21	+ 4.21	0.674
1920	Februar 9.	- 3.68	+ 3.85	0.664
	April 29.	- 4.10	+ 3.43	0.655
	Juli 18.	- 4.46	+ 2.98	0.647
	Oktober 6.	- 4.78	+ 2.49	0.640
	Dezember 25.	- 5.03	+ 1.96	0.634
1921	März 15.	- 5.23	+ 1.42	0.628
	Juni 3.	- 5.36	+ 0.86	0.624
	August 22.	- 5.43	+ 0.28	0.620
	November 10.	- 5.44	- 0.29	0.618
1922	Januar 29.	- 5.38	- 0.86	0.617
	April 19.	- 5.26	- 1.43	0.616
	Juli 8.	- 5.08	- 1.97	0.617
	September 26.	- 4.84	- 2.50	0.619
	Dezember 15.	- 4.54	- 2.99	0.622
1923	März 5.	- 4.19	- 3.45	0.625
	Mai 24.	- 3.79	- 3.86	0.630
	August 12.	- 3.35	- 4.24	0.636
	Oktober 31.	- 2.86	- 4.56	0.643
1924	Januar 19.	- 2.34	- 4.82	0.650
	April 8.	- 1.79	- 5.03	0.659
	Juni 27.	- 1.22	- 5.17	0.668
	September 15.	- 0.63	- 5.25	0.678
	Dezember 4.	- 0.03	- 5.26	0.689
1925	Februar 22.	+ 0.56	- 5.20	0.700
	Mai 13.	+ 1.15	- 5.07	0.712
	August 1.	+ 1.72	- 4.87	0.724
	Oktober 20.	+ 2.27	- 4.61	0.736

Jupiterkoordinaten x_1 und y_1 . Äquinoktium 1925.0 (Fortsetz.).

	12 ^h Weltzeit		x_1	y_1	$\frac{100}{r_1^3}$
1926	Januar	8.	+ 2.79	— 4.28	0.749
	März	29.	+ 3.27	— 3.90	0.761
	Juni	17.	+ 3.70	— 3.45	0.772
	September	5.	+ 4.08	— 2.96	0.783
	November	24.	+ 4.39	— 2.42	0.793
1927	Februar	12.	+ 4.64	— 1.85	0.802
	Mai	3.	+ 4.82	— 1.24	0.810
	Juli	22.	+ 4.93	— 0.62	0.816
	Oktober	10.	+ 4.96	+ 0.01	0.820
	Dezember	29.	+ 4.91	+ 0.64	0.823
1928	März	18.	+ 4.79	+ 1.26	0.824
	Juni	6.	+ 4.59	+ 1.86	0.823
	August	25.	+ 4.32	+ 2.44	0.820
	November	13.	+ 3.98	+ 2.97	0.815
1929	Februar	1.	+ 3.58	+ 3.46	0.809
	April	22.	+ 3.13	+ 3.89	0.801
	Juli	11.	+ 2.63	+ 4.27	0.792
	September	29.	+ 2.09	+ 4.58	0.782
	Dezember	18.	+ 1.52	+ 4.83	0.771

Universitätssternwarte, Kopenhagen. 1929 April.

BENGT STRÖMGREN.

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.

Mathematisk-fysiske Meddelelser. **X**, 3.

FORMELN
UND TAFELN ZUR BESTIMMUNG
PARABOLISCHER BAHNEN

VON

BENGT STRÖMGREN

MIT ZWEI NOMOGRAMMEN



KØBENHAVN

HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI

1929

In einer bekannten Abhandlung "A Modification of GAUSS's Method for the Determination of Orbits"¹ hat G. MERTON eine Methode zur Bestimmung parabolischer Bahnen zur Darstellung gebracht. Es ist nun interessant, dass MERTON die OLBERS'sche Methode zur Bestimmung des Verhältnisses der geozentrischen Distanzen gar nicht benutzt, sondern ein anderes Verfahren einschlägt, auf das wir weiter unten zurückkommen werden. MERTON schreibt zu dieser Frage: "In general it is not possible to neglect the $1:r_2^3$ terms if a satisfactory representation of the places is desired, and the first hypothesis in OLBERS's method, which does so, as a rule leaves something to be desired." MERTON schreibt dann weiter unten: "The work involved in computing the trials in either of the ways (die zwei von MERTON in Vorschlag gebrachten Methoden) is admittedly heavier than in the corresponding step in a single hypothesis in OLBERS's method; but it must be remembered, apart from other points, that whereas in that method it is necessary to recompute most of the whole working two or even three times with new trial values of ratios of the distances in order to obtain a satisfactory fit, in the method here given a final result is usually reached in the first attempt. Nevertheless it must be admitted that the work of solving the geocentric distances in a parabolic

¹ Monthly Notices of the R. A. S., June 1925.

orbit by the methods here given is greater than in the case of the general orbit, and some means of shortening the process still further is very desirable." MERTON empfiehlt seine Methode, die die OLBERS'sche Bestimmungsweise des Verhältnisses der geozentrischen Distanzen umgeht, indem eine längere Rechnung mit in den Kauf genommen wird, in allen Fällen. Nun gibt aber z. B. gerade in dem von MERTON gegebenen Rechenbeispiel die OLBERS'sche Methode ein befriedigendes Resultat, und die Erfahrung zeigt, dass dies überhaupt sehr oft der Fall ist. MERTON gibt sicher seiner Methode den Vorzug aus dem Gefühl heraus, dass man hier eine Methode hat, die, wenn auch etwas umständlich, nie versagen kann. In Anbetracht dessen, dass wohl tatsächlich die Mehrzahl der veröffentlichten Bahnen nach der OLBERS'schen Methode gerechnet sind, erscheint es berechtigt, doch von dieser Methode auszugehen, dann aber die Grenzen der Anwendbarkeit der OLBERS'schen Methode genau zu untersuchen.

Wir werden uns im folgenden auf den Boden der OLBERS'schen Methode stellen. Bei der Berechnung einer Parabel aus drei vollständigen Beobachtungen sollen die beiden äusseren Beobachtungen $(\alpha_1, \delta_1; \alpha_3, \delta_3)$ genau dargestellt werden; gesucht wird der Wert des Verhältnisses M der äusseren geozentrischen Distanzen, der zusammen mit $(\alpha_1, \delta_1; \alpha_3, \delta_3)$ eine Parabel bestimmt, die den beobachteten zweiten Ort möglichst gut darstellt.

Wo wir im folgenden Formeln ableiten, die der numerischen Rechnung als Grundlage dienen, werden wir diese für maschinelle Rechnung anpassen.

Es soll zunächst die Bestimmung des M nach der OLBERS'schen Methode behandelt werden. Wir wollen untersuchen, mit welcher Genauigkeit M bestimmt sein muss,

damit man eine befriedigende Darstellung des mittleren Ortes erreicht, und es soll der Einfluss der vernachlässigten Glieder einerseits, andererseits der Ungenauigkeiten in den Beobachtungen, auf den Wert des OLBERS'schen M und damit auf die Darstellung des mittleren Ortes untersucht werden. In diesem Zusammenhang werden wir die Möglichkeit des Versagens der OLBERS'schen Methode behandeln, ein Eingehen auf die dann zu benutzende »2. Methode« jedoch aufschieben, bis wir die weiteren Schritte der Bahnbestimmung im normalen Falle erledigt haben.

Im darauf folgenden Abschnitt wollen wir dann davon ausgehen, dass ein Wert des OLBERS'schen M ermittelt worden ist. Der nächste Schritt ist die Aufstellung der Fundamentalgleichungen für r_1^2 , r_3^2 und $\frac{s^2}{k^2 (t_3 - t_1)^2}$. Dieses Gleichungssystem soll nun durch Hypothesenrechnung der Bestimmung von q_1 dienen. Wir werden ein Nomogramm beschreiben (das Nomogramm befindet sich im Anhang), das einen Näherungswert für q_1 zu bestimmen gestattet, so dass man mit 2 bis 3 Hypothesen für q_1 wird auskommen können. Die Hypothesenrechnung wird durch eine Tafel der ENCKE'schen Grösse μ^2 (Tafel I des Anhangs) erleichtert.

Es sind somit die rechtwinkligen Koordinaten des Kometen zur Zeit der ersten bzw. dritten Beobachtung bekannt. Wir wollen schon an dieser Stelle der Rechnung den mittleren Ort aus diesen Daten streng berechnen. Dies wird durchgeführt, indem mit Hilfe der Tafeln III und IV des Anhangs ein strenger Wert für q aus den bereits bekannten Grössen r_1 , r_3 und $(t_3 - t_1)$ berechnet wird. Man findet r_2 , und sodann strenge Werte für die Verhältnisse Sektor: Dreieck (Tafel II des Anhangs). Es kann nun die strenge Berechnung des mittleren Ortes erfolgen. Aus dem gefundenen Wert Beobachtung—Rechnung für den mittleren

Ort wird nun gefolgert, ob der benutzte Wert von M genau genug war, anderenfalls wird ein verbesserter Wert von M gefunden. Es wird auf dieser Stufe auch klar, ob es überhaupt möglich ist, die drei benutzten Beobachtungen durch eine Parabel einigermaßen darzustellen, oder ob starke Abweichung von der Parabel oder gar fehlerhafte Beobachtungen vorliegen. Eine eventuelle Wiederholung der Rechnung mit einem modifizierten Wert von M vollzieht sich sehr leicht unter Anlehnung an die frühere Rechnung.

Es seien also 6 Werte $x_1, y_1, z_1, x_3, y_3, z_3$ gefunden, die erstens genau der parabolischen Hypothese entsprechen, zweitens eine befriedigende Darstellung des mittleren Ortes mit sich führen. Aus diesen 6 Grössen sollen nun die Elemente berechnet werden. Die Grössen q und T ergeben sich gleich mit Hilfe der Tafeln III und IV. Als Elemente zur Charakterisierung der Bahnlage wollen wir, wie es jetzt ja mehr und mehr Gebrauch wird, gleich die Richtungskosinusse in Bezug auf das Äquatorsystem der Parabelachse und der Senkrechten zu dieser in der Bahnebene, bestimmen. Diese Bestimmung erfolgt direkt unter Benutzung des schon gefundenen Wertes von q ; es sind jedoch bei dieser Rechnung bei kleinen Bogen gewisse Vorsichtsmassnahmen zu treffen, auf die wir genau eingehen werden.

Nachdem somit die Bahnbestimmung für den allgemeinen Fall der Anwendbarkeit der OLBERS'schen Methode behandelt worden ist, soll dann der Fall der »2. Methode« kurz besprochen werden. Ein Rechenbeispiel bildet den Schluss dieses Teiles.

In einem zweiten Teil soll eine Modifikation der Methode der Bahnverbesserung durch Variation des Verhältnisses der geozentrischen Distanzen dargestellt werden. Unter Benutzung der Tafeln III und IV wird die Berechnung

streng durchgeführt, ohne dass man den Umweg über die Elemente zu gehen braucht. Dieses Verfahren wird auch auf die HORNSTEIN'sche Methode der Bahnverbesserung für parabelnahe Bahnen ausgedehnt. Das Verfahren eignet sich insbesondere auch für den Fall der Bahnverbesserung bei einem angenommenen Wert der Umlaufszeit (Fall der Wiederkehr eines periodischen Kometen).

Die Grundlage für die Bestimmung des OLBERS'schen Wertes von M bilden die GAUSS'schen Grundgleichungen für den Kometen. Wir wollen, um die Überlegungen so durchsichtig wie möglich zu gestalten, die GAUSS'schen Grundgleichungen nach GIBBS in Vektorform aufschreiben und auch die folgenden Rechnungen in Vektorform durchführen, indem wir natürlich in allen Ausdrücken, die für die numerische Berechnung gebraucht werden, die kartesischen Koordinaten wieder einführen.

Es seien zu den Zeiten t_1, t_2, t_3 die Örter des Kometen relativ zur Sonne durch die Vektoren $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3$ gegeben. Zu denselben Zeiten sollen die Örter der Sonne relativ zur Erde durch die Vektoren $\bar{R}_1, \bar{R}_2, \bar{R}_3$ gegeben sein. Die Vektoren $\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{q}_3$ sollen die Örter des Kometen zu den Zeiten t_1, t_2, t_3 relativ zur Erde charakterisieren, sodass allgemein gilt $\bar{q} = \bar{R} + \bar{r}$.

Die Vektoren $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3$ sind komplanar, sodass man allgemein hat:

$$0 = \bar{r}_1 \{ \bar{r}_2 \bar{r}_3 \} + \bar{r}_2 \{ \bar{r}_3 \bar{r}_1 \} + \bar{r}_3 \{ \bar{r}_1 \bar{r}_2 \}, \quad (1)$$

wo die geschweifte Klammer das von den beiden Vektoren in der Klammer aufgespannte (mit Vorzeichen gerechnete)

Dreiecksareal bedeutet (die Gleichung ist äquivalent mit der Formel für $\sin(a+b)$). Indem wir mit $\{\bar{r}_1 \bar{r}_3\}$ dividieren, erhalten wir:

$$\bar{r}_2 = c_1 \bar{r}_1 + c_3 \bar{r}_3, \quad (2)$$

$$c_1 = \frac{\{\bar{r}_2 \bar{r}_3\}}{\{\bar{r}_1 \bar{r}_3\}}, \quad c_3 = \frac{\{\bar{r}_1 \bar{r}_2\}}{\{\bar{r}_1 \bar{r}_3\}}, \quad (3)$$

oder, indem wir $\bar{r} = \bar{q} - \bar{R}$ substituieren:

$$c_1 \bar{q}_1 - \bar{q}_2 + c_3 \bar{q}_3 = c_1 \bar{R}_1 - \bar{R}_2 + c_3 \bar{R}_3. \quad (4)$$

Wir eliminieren nun, zur Bestimmung von $M = \frac{|\bar{q}_3|}{|\bar{q}_1|}$, $|\bar{q}_2|$ aus der Grundgleichung (4) durch vektorielle Multiplikation mit $\bar{q}_2^* = \frac{\bar{q}_2}{|\bar{q}_2|}$ (ein Stern soll allgemein einen Einheitsvektor bezeichnen):

$$c_1 |\bar{q}_1| [\bar{q}_2^* \bar{q}_1^*] + c_3 |\bar{q}_3| [\bar{q}_2^* \bar{q}_3^*] = [\bar{q}_2^* \bar{V}], \quad (5)$$

wo wir

$$\bar{V} = c_1 \bar{R}_1 - \bar{R}_2 + c_3 \bar{R}_3$$

gesetzt haben.

Durch Projektion dieser Vektorgleichung auf einen beliebigen Vektor \bar{S} entsteht eine skalare Gleichung, in der die gesuchte Grösse M eingeht:

$$c_1 |\bar{q}_1| \cdot \bar{S} [\bar{q}_2^* \bar{q}_1^*] + c_3 |\bar{q}_3| \cdot \bar{S} [\bar{q}_2^* \bar{q}_3^*] = \bar{S} [\bar{q}_2^* \bar{V}], \quad (6a)$$

oder damit äquivalent:

$$c_1 |\bar{q}_1| \cdot [\bar{S} \bar{q}_2^*] \bar{q}_1^* + c_3 |\bar{q}_3| \cdot [\bar{S} \bar{q}_2^*] \bar{q}_3^* = [\bar{S} \bar{q}_2^*] \bar{V}. \quad (6b)$$

Aus der Form (6b) erhellt, dass unter der durch den Vektorparameter \bar{S} bestimmten zweifachen Unendlichkeit

von Gleichungen (6) diejenigen äquivalent sind, für die die Parametervektoren und $\bar{\varrho}_2$ komplanar sind. Die Gleichungen (6) bilden somit eine einfache Unendlichkeit von Gleichungen. Als Parameter kann man die Ebenen durch $\bar{\varrho}_2^*$ wählen, oder anders ausgedrückt die grössten Kreise durch den zweiten Kometenort. Was charakterisiert nun eine Gleichung (6), die einer bestimmten Wahl des grössten Kreises entspricht? Die Antwort ist der Form (6 b) abzulesen: Wenn $\bar{\varrho}_2^*$ sich ändert, so bleibt die Gleichung ungeändert (bis auf eine gleichgültige Multiplikation der beiden Seiten mit irgend einer Zahl), wenn nur $\bar{\varrho}_2^*$ auf dem der Gleichung charakterisierenden grössten Kreis verbleibt.

Es gibt nun eine besondere Wahl von \bar{S} (die zugehörige Gleichung gehört zum grössten Kreis durch $\bar{\varrho}_2^*$ und \bar{S}), die eine einfache Bestimmung von M ermöglicht. Wir wählen mit OLBERS \bar{S} so, dass \bar{S} senkrecht zu $[\bar{\varrho}_2^* \bar{V}]$ steht; dann wird die rechte Seite von (6 a) gleich Null. Es fragt sich nun, wie man dies erreichen soll. Wir müssen dazu untersuchen, in welcher Richtung der Vektor $\bar{V} = c_1 \bar{R}_1 - \bar{R}_2 + c_3 \bar{R}_3$ zeigt. Es seien die Grössen C_1 und C_3 die den Grössen c_1 und c_3 entsprechenden Dreiecksverhältnisse in der Erdbahn. Dann gilt:

$$0 = C_1 \bar{R}_1 - \bar{R}_2 + C_3 \bar{R}_3. \quad (7)$$

Für \bar{V} ergibt sich durch Subtraktion dieser Gleichung:

$$\bar{V} = (c_1 - C_1) \bar{R}_1 + (c_3 - C_3) \bar{R}_3. \quad (8)$$

Um nun weiterkommen zu können, müssen wir in (8) die bekannten Reihenentwicklungen der Dreiecksverhältnisse substituieren. Es gilt, indem wir Glieder dritter und höherer Ordnung in den Zwischenzeiten vernachlässigen:

$$\begin{aligned}
 c_1 &= \frac{t_3 - t_2}{t_3 - t_1} \left[1 + \frac{k^2}{6} \frac{1}{r_2^3} \{ (t_3 - t_1)^2 - (t_3 - t_2)^2 \} \right] \\
 C_1 &= \frac{t_3 - t_2}{t_3 - t_1} \left[1 + \frac{k^2}{6} \frac{1}{R_2^3} \{ (t_3 - t_1)^2 - (t_3 - t_2)^2 \} \right] \\
 c_3 &= \frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_1} \left[1 + \frac{k^2}{6} \frac{1}{r_2^3} \{ (t_3 - t_1)^2 - (t_2 - t_1)^2 \} \right] \\
 C_3 &= \frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_1} \left[1 + \frac{k^2}{6} \frac{1}{R_2^3} \{ (t_3 - t_1)^2 - (t_2 - t_1)^2 \} \right].
 \end{aligned} \tag{9}$$

Die Substitution von (9) in (8) ergibt:

$$\begin{aligned}
 \bar{V} &= \frac{k^2 (t_3 - t_1)^2}{6} \left(\frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{R_2^3} \right) \left[\frac{t_3 - t_2}{t_3 - t_1} \left(1 - \frac{(t_3 - t_2)^2}{(t_3 - t_1)^2} \right) \bar{R}_1 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_1} \left(1 - \frac{(t_2 - t_1)^2}{(t_3 - t_1)^2} \right) \bar{R}_3 \right].
 \end{aligned} \tag{10}$$

Wir haben somit die Richtung von \bar{V} bis auf Grössen zweiter Ordnung ermittelt (es ist ja $\bar{V} = \bar{R}_1 + \alpha(\bar{R}_3 - \bar{R}_1)$, wo α bis auf Grössen erster Ordnung durch (10) ermittelt worden ist). Um die Gleichung (10) zu erläutern, betrachten wir zuerst den Fall gleicher Zwischenzeiten. \bar{V} hat dann bis auf Grössen zweiter Ordnung die Richtung von $\bar{R}_1 + \bar{R}_3$, das ist wieder bis auf Grössen zweiter Ordnung gleich der Richtung von \bar{R}_2 . Im Fall gleicher Zwischenzeiten erreicht man somit bei der OLBERS'schen Wahl des grössten Kreises durch den zweiten Sonnenort, d. h. wenn wir ein $\bar{S} = \bar{R}_2$ wählen, dass die rechte Seite von (6) bis auf Grössen vierter Ordnung gleich Null ist. Die übrigen Glieder der Gleichung (6) sind klein von der ersten Grössenordnung. Man vernachlässigt somit Glieder der dritten Grössenordnung in dem Ausdruck für M , wenn man bei gleichen Zwischenzeiten und bei Wahl des grössten Kreises

durch den zweiten Sonnenort, die rechte Seite von (6) vernachlässigt, und somit für M den folgenden Ausdruck benutzt:

$$M = - \frac{c_1}{c_3} \frac{[\bar{R}_2 \bar{Q}_2^*] \bar{Q}_1^*}{[\bar{R}_2 \bar{Q}_2^*] \bar{Q}_3^*}. \quad (11 a)$$

Wenn die Zwischenzeiten nicht gleich sind, ist der Unterschied zwischen den Richtungen von \bar{R}_2 und \bar{V} nach (10) von der ersten Grössenordnung. Wir werden auf diesen Punkt später zurückkommen.

Um zu einer Formel zu gelangen, die die direkte Berechnung von M gestattet, müssen wir noch für das Verhältnis $\frac{c_1}{c_3}$ das Verhältnis der Zwischenzeiten substituieren und erhalten die OLBERS'sche Formel in der GIBBS'schen Form:

$$M = - \frac{t_3 - t_2}{t_2 - t_1} \frac{[\bar{R}_2 \bar{Q}_2^*] \bar{Q}_1^*}{[\bar{R}_2 \bar{Q}_2^*] \bar{Q}_3^*}. \quad (11 b)$$

Durch diese Substitution haben wir Glieder zweiter Ordnung vernachlässigt. Man sieht, dass es also im allgemeinen berechtigt ist, den grössten Kreis durch den zweiten Sonnenort, anstatt durch den der exakteren Gleichung (10) entsprechenden Ort, zu legen.

Wir gehen jetzt zu der Behandlung des Falles über, wo die OLBERS'sche Wahl des grössten Kreises nicht zum Ziel führt. Wenn in der Vektorgleichung (5) die Vektoren $[\bar{Q}_2^* \bar{V}]$ und $[\bar{Q}_2^* \bar{Q}_1^*]$ parallel oder antiparallel sind, was $[\bar{Q}_2^* \bar{Q}_1^*] \parallel [\bar{Q}_3^* \bar{Q}_2^*]$ bedingt, so ist eine Trennung der Vektoren rechts und links vom Gleichheitszeichen durch Projektion unmöglich, d. h. die OLBERS'sche Methode versagt. Es ist dies der Fall, wenn der grösste Kreis durch die Kometenörter den zweiten

Sonnenort trifft; man sieht, dass dann die drei Kometenörter auf einem grössten Kreis liegen.

Wir müssen nun den Fall betrachten, wo der Winkel zwischen der Ebene der scheinbaren Bahn und der Richtung zum zweiten Sonnenort zwar nicht exakt Null aber doch klein ist. Es ist zu untersuchen, erstens wie gross der Einfluss der vernachlässigten Glieder in diesem Falle werden kann, zweitens welche Änderungen zufällige Beobachtungsfehler in diesem Falle in M bewirken.

Der Einfluss der Glieder zweiter Ordnung, die wir vernachlässigt haben, indem wir $\frac{c_1}{c_3}$ gleich $\frac{t_3 - t_2}{t_2 - t_1}$ setzten, auf M ist von der Lage des zweiten Sonnenortes unabhängig. Anders mit dem Einfluss der bei der Bestimmung der Richtung von \bar{V} vernachlässigten Glieder. Es sei der Winkel zwischen \bar{V} und dem Vektor \bar{S} , auf den wir projizieren, gleich ε . Wählen wir \bar{S} nach Formel (10), ist ε klein von der zweiten Grössenordnung; wählen wir $\bar{S} = \bar{R}_2$, ist ε klein von der ersten Grössenordnung. \bar{S} und \bar{V} liegen immer in der Ekliptik. Wir können nun für (6a) schreiben:

$$c_1 |\bar{q}_1| \cdot \bar{S} [\bar{q}_2^* \bar{q}_1^*] + c_3 |\bar{q}_3| \cdot \bar{S} [\bar{q}_2^* \bar{q}_3^*] = \varepsilon \cdot |\bar{V}| \cdot |\bar{S}| \cdot \sin \beta_2, \quad (12)$$

wo β_2 die Breite des zweiten Kometenortes ist. Im Normalfall sind, wie schon bemerkt, die Glieder links von der ersten Grössenordnung; es genügt, wenn ε klein von der ersten Ordnung ist (vernachlässigt man doch Grössen zweiter Ordnung im Ausdruck für $\frac{c_1}{c_3}$). Tritt aber der Ausnahmefall ein, so werden die Glieder links, die ja den Faktor: sinus des Winkels zwischen zweitem Sonnenort und scheinbarer Bahn enthalten, kleiner, und es fällt infolgedessen das vernachlässigte Glied rechts relativ mehr ins Gewicht gegenüber den vernachlässigten Gliedern in

$\frac{c_1}{c_3}$. Man wird deshalb in einiger Nähe des Ausnahmefalles einen Projektionsvektor \bar{S} wählen, der nach Formel (10) bestimmt wird, es sei denn, dass die Zwischenzeiten nahe gleich sind, da ja dann das OLBERS'sche \bar{S} mit dem \bar{S} der Formel (10) äquivalent ist. Bei Winkeln W zwischen dem zweiten Sonnenort und der scheinbaren Bahn bis herab zu etwa 10° sind dann die vernachlässigten Glieder nicht verhängnisvoll.

Es soll nun untersucht werden, welchen Einfluss Beobachtungsfehler bei der OLBERS'schen Berechnungsweise von M haben. Allgemein sind alle 6 Grössen (α , δ) mit Beobachtungsfehlern behaftet, wir können aber, da »Ort« und »Geschwindigkeit« bei kurzen Bogen gegenüber »Krümmung« bei diesen Überlegungen nicht in Betracht kommen, die ganze Unsicherheit auf den mittleren Ort übertragen denken. Etwaige Elliptizität hat die gleiche Wirkung wie Beobachtungsfehler. Wir haben schon bemerkt, dass eine Verschiebung des mittleren Ortes in der Richtung des gewählten grössten Kreises keinen Einfluss auf das OLBERS'sche M hat. Wir betrachten zunächst eine Verschiebung des mittleren Ortes in der Bahn. Es sei also:

$$d\bar{q}_2^* = \lambda \cdot (\bar{q}_3^* - \bar{q}_1^*), \quad (13)$$

wo λ ein Parameter ist (dies bedeutet ausser einer Drehung von \bar{q}_2^* auch eine kleine Dehnung, die aber belanglos ist, da \bar{q}_2^* in Zähler und Nenner von M eingeht). Es ergibt sich

$$\text{dann aus } M = \frac{c_1 \bar{V}[\bar{q}_2^* \bar{q}_1^*]}{c_3 \bar{V}[\bar{q}_3^* \bar{q}_2^*]}:$$

$$\begin{aligned} \frac{dM}{M} &= \frac{c_1 \bar{V}[d\bar{q}_2^* \bar{q}_1^*]}{c_1 \bar{V}[\bar{q}_2^* \bar{q}_1^*]} - \frac{c_3 \bar{V}[\bar{q}_3^* d\bar{q}_2^*]}{c_3 \bar{V}[\bar{q}_3^* \bar{q}_2^*]}, \\ &= \lambda \frac{\bar{V}[\bar{q}_3^* \bar{q}_1^*]}{\bar{V}[\bar{q}_2^* \bar{q}_1^*]} + \lambda \frac{\bar{V}[\bar{q}_3^* \bar{q}_1^*]}{\bar{V}[\bar{q}_3^* \bar{q}_2^*]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d. h.} \quad dM &= \lambda \cdot \left(\frac{t_3 - t_1}{t_2 - t_1} + \frac{t_3 - t_1}{t_3 - t_2} \right), \\
 dM &= \lambda \cdot \frac{(t_3 - t_1)^2}{(t_2 - t_1)(t_3 - t_2)}, \quad (14)
 \end{aligned}$$

bis auf Grössen höherer Ordnung. Zur Erläuterung der Formel (14) nehmen wir an, dass die Zwischenzeiten gleich sind. Die Grösse dM ist dann gleich vier mal dem Teil, den die Verschiebung in der Bahn vom ganzen geozentrischen Bogen ausmacht. Der Einfluss einer Verschiebung des mittleren Ortes in der Bahn auf das OLBERS'sche M ist unabhängig von der Lage des zweiten Sonnenortes in bezug auf die scheinbare Bahn.

Wenn wir nun dieselben Rechnungen für Verschiebungen senkrecht zur Bahn durchführen, erhalten wir, wieder unter Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung:

$$d\bar{\varrho}_2^* = \lambda \cdot [\bar{\varrho}_1^* \bar{\varrho}_3^*], \quad (15)$$

$$dM = \lambda \cdot \frac{(t_3 - t_1)^2}{(t_2 - t_1)(t_3 - t_2)} \cdot \frac{\cos I}{\sin W} = -\lambda \cdot \frac{(t_3 - t_1)^2}{(t_2 - t_1)(t_3 - t_2)} \cot J, \quad (16)$$

wo I den Winkel zwischen der Richtung zum zweiten Sonnenort und der Bewegungsrichtung des Kometen bedeutet, W den Winkel zwischen der scheinbaren Bahn und der Richtung zum zweiten Sonnenorte und J die Neigung des grössten Kreises durch den zweiten Sonnenort und den zweiten Kometenort gegen die scheinbare Bahn. Berechnet man den Einfluss einer Verschiebung in dem genannten grössten Kreis durch Auflösung der Verschiebung in Komponenten senkrecht und parallel zur Bahn, ergibt sich in Übereinstimmung mit dem früher angeführten Resultat $dM = 0$.

Aus diesem Ausdruck sieht man, wie der Einfluss der Beobachtungsfehler auf M bei Annäherung an den Aus-

nahmefall grösser wird. Man wird jedoch die OLBERS'sche Methode bis herab zu W gleich etwa 10° benutzen können. Der Einfluss der Beobachtungsfehler ist dann höchstens etwa sechs mal so gross wie im Normalfall, bei scheinbarer Sonnennähe entsprechend geringer.

Nachdem wir jetzt die Quellen der Unsicherheit bei der Bestimmung von M nach OLBERS diskutiert haben, gehen wir dazu über, den Einfluss von Fehlern in M auf die Darstellung des mittleren Ortes durch die mit M berechnete Parabel zu untersuchen.

Allgemein gehört zu jedem M bei festen gegebenen äusseren Beobachtungen $(\alpha_1, \delta_1; \alpha_3, \delta_3)$ eine gewisse Parabel und ein gewisser Ort $(\alpha_2^\circ, \delta_2^\circ)$ zur Zeit t_2 . Wir wollen untersuchen, wie der Ort $(\alpha_2^\circ, \delta_2^\circ)$ mit M variiert. Die Grundlage der Untersuchung bildet die Gleichung (4), die wir in der Form schreiben, wie sie zur Bestimmung von $(\alpha_2^\circ, \delta_2^\circ)$ dient:

$$\begin{aligned} \bar{q}_2 &= c_1 |\bar{q}_1| \bar{q}_1^* + c_3 |\bar{q}_3| \bar{q}_3^* - c_1 \bar{R}_1 + \bar{R}_2 - c_3 \bar{R}_3 \\ &= c_1 |\bar{q}_1| \bar{q}_1^* + c_3 |\bar{q}_3| \bar{q}_3^* - \bar{V}. \end{aligned} \quad (17)$$

In dieser Gleichung haben \bar{q}_1^* und \bar{q}_3^* fest gegebene Werte. Wenn M variiert, so variiert auch das bei bekanntem M aus der Parabelhypothese (EULER'sche Gleichung) zu berechnende $|\bar{q}_1|$. Bekanntlich ist $\frac{d|\bar{q}_1|}{dM}$ von der Grössenordnung minus eins, sodass bei kleinen Zwischenzeiten $d|\bar{q}_1|$ gross gegenüber dM sein wird. Die Grösse $|\bar{q}_3|$ variiert auch; die Variation ist durch dM und $d|\bar{q}_1|$ bestimmt. Endlich variieren die Grössen c_1 und c_3 ; die Grössenordnung der

Variation von c_1 und c_3 ergibt sich aus den Reihenentwicklungen für diese Grössen. Die Glieder niedrigster Ordnung, die variieren, sind von der zweiten Grössenordnung; sie enthalten r_2 . Die Grösse $\frac{dr_2}{dM}$ ist von derselben Grössenordnung wie $\frac{d|\bar{q}_1|}{dM}$ und $\frac{d|\bar{q}_3|}{dM}$, d. h. von der Grössenordnung minus eins. Somit sind $\frac{dc_1}{dM}$ und $\frac{dc_3}{dM}$ klein von der ersten Grössenordnung. Die aus diesen Variationen folgende Variation von \bar{q}_2 und damit von \bar{q}_2^* zerlegen wir in drei Teile. Ein Teil rührt von einer Dehnung von \bar{q}_1 und \bar{q}_3 her, bei der das Verhältnis $\left|\frac{\bar{q}_3}{\bar{q}_1}\right|$ bewahrt bleibt; diese Dehnung dividiert durch dM ist von der Grössenordnung minus eins. Ein zweiter Teil rührt von einer Dehnung von \bar{q}_3 her von der Grösse $d|\bar{q}_3| = |\bar{q}_1|dM$. Ein dritter Teil stammt von den Änderungen in c_1 und c_3 .

Wir betrachten zuerst den ersten Teil ${}^1d\bar{q}_2$. Bezeichnen wir den Dehnungsfaktor mit $(1 + dD)$, wo $\frac{dD}{dM}$ folglich von der Grössenordnung minus eins ist, dann gilt:

$${}^1d\bar{q}_2 = dD (c_1 |\bar{q}_1| \bar{q}_1^* + c_3 |\bar{q}_3| \bar{q}_3^*) = dD (\bar{q}_2 + \bar{V}). \quad (18)$$

Das Glied $dD \cdot \bar{q}_2$ bedeutet lediglich eine Dehnung von \bar{q}_2 , lässt also \bar{q}_2^* , d. h. $(\alpha_2^\circ, \delta_2^\circ)$, ungeändert. \bar{V} zeigt nach Formel (10) bis auf Grössen erster Ordnung in der Richtung von \bar{R}_2 . Die Grösse $|\bar{V}|$ ist von der zweiten Grössenordnung. Es folgt, dass $\frac{d\bar{q}_2}{dM}$ klein von der ersten Grössenordnung ist und bis auf Glieder höherer Ordnung in der Richtung von \bar{R}_2 zeigt. Die Dehnung bedeutet folglich eine Verschiebung des mittleren Ortes in der Richtung des grössten Kreises durch den zweiten Sonnenort, die dividiert durch dM von der ersten Grössenordnung ist.

Wir behandeln gleich den von den Änderungen der Grössen c_1 und c_3 herrührenden Teil ${}^3d\bar{\varrho}_2$. Zu diesem Zweck schreiben wir Gleichung (17) in der Form:

$$\bar{\varrho}_2 = c_1 \bar{r}_1 + c_3 \bar{r}_3 + \bar{R}_2. \tag{19}$$

Es gilt somit:

$${}^3d\bar{\varrho}_2 = dc_1 \cdot \bar{r}_1 + dc_3 \cdot \bar{r}_3. \tag{20}$$

Aus den Reihenentwicklungen für c_1 und c_3 folgt:

$$\begin{aligned} dc_1 &= \frac{t_3 - t_2}{t_3 - t_1} \left(1 - \left(\frac{t_3 - t_2}{t_3 - t_1} \right)^2 \right) \left(-k^2 (t_3 - t_1)^2 \frac{{}^3dr_2}{r_2^4} \right) \\ dc_3 &= \frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_1} \left(1 - \left(\frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_1} \right)^2 \right) \left(-k^2 (t_3 - t_1)^2 \frac{{}^3dr_2}{r_2^4} \right), \end{aligned} \tag{21}$$

unter Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung. Aus (21) sieht man, dass dc_1 und dc_3 immer das gleiche Vorzeichen haben. Dies bedeutet nach (20), dass ${}^3d\bar{\varrho}_2$ immer in den kleinen Winkelraum zwischen \bar{r}_1 und \bar{r}_3 fällt. Ferner folgt, dass $\frac{{}^3d\bar{\varrho}_2}{dM}$ von der ersten Grössenordnung in den Zwischenzeiten ist, da ja $\frac{dr_2}{dM}$ von der Grössenordnung minus eins war. Die Grösse ${}^3d\bar{\varrho}_2$ bedeutet somit eine Dehnung von $\bar{\varrho}_2$, die $\bar{\varrho}_2^*$ nicht ändert, und ausserdem bis auf Grössen höherer Ordnung eine Drehung in der Ebene durch den zweiten Sonnenort. Es bedingt somit ${}^3d\bar{\varrho}_2$ eine Verschiebung des mittleren Ortes in der Richtung des grössten Kreises durch den zweiten Sonnenort, die dividiert durch dM von der ersten Grössenordnung ist.

Es erübrigt sich noch, den Teil ${}^2d\bar{\varrho}_2$ zu untersuchen. Aus (17) folgt:

$${}^2d\bar{\varrho}_2 = c_3 \left| \bar{\varrho}_1 \right| \bar{\varrho}_3^* dM. \tag{22}$$

Wir spalten nach dem Schema $\bar{B} = \bar{A} (\bar{B}\bar{A}) + [\bar{A} [\bar{B}\bar{A}]]$ in Komponenten parallel und senkrecht zu $\bar{\varrho}_2^*$:

$${}^2d\bar{\varrho}_2 = c_3 \left| \bar{\varrho}_1 \right| dM \left(\bar{\varrho}_2^* (\bar{\varrho}_3^* \bar{\varrho}_2^*) + [\bar{\varrho}_2^* [\bar{\varrho}_3^* \bar{\varrho}_2^*]] \right). \quad (23)$$

Es ist also:

$${}^2d\bar{\varrho}_2^* = c_3 \left| \frac{\bar{\varrho}_1}{\bar{\varrho}_2} \right| dM \cdot [\bar{\varrho}_2^* [\bar{\varrho}_3^* \bar{\varrho}_2^*]]. \quad (24)$$

Nun gilt ja identisch:

$$\bar{\varrho}_3^* - \bar{\varrho}_2^* = (\bar{\varrho}_2^* \bar{\varrho}_3^*) \bar{\varrho}_2^* - \bar{\varrho}_2^* + [\bar{\varrho}_2^* [\bar{\varrho}_3^* \bar{\varrho}_2^*]]. \quad (25)$$

Aus (24) wird damit, unter Vernachlässigung von Gliedern zweiter Ordnung:

$${}^2d\bar{\varrho}_2^* = \frac{(t_2 - t_1)(t_3 - t_2)}{(t_3 - t_1)^2} (\bar{\varrho}_3^* - \bar{\varrho}_1^*) dM. \quad (26)$$

Es bedeutet ${}^2d\bar{\varrho}_2^*$ eine Verschiebung des mittleren Ortes in der scheinbaren Bahn, die dividiert durch dM von der ersten Grössenordnung in den Zwischenzeiten ist.

Wenn wir die Ergebnisse dieser Untersuchung zusammenfassen, so können wir behaupten: Eine Änderung von M (bei festgehaltenen äusseren Kometenörtern) bedeutet eine Verschiebung des mittleren Ortes, die sich aus einer Verschiebung in dem grössten Kreis durch den zweiten Sonnenort und einer Verschiebung in der scheinbaren Bahn zusammensetzt; dividiert durch dM sind diese Verschiebungen von der ersten Ordnung in den Zwischenzeiten; die Verschiebung in der Bahn ist durch Formel (26) gegeben; zu diesen Verschiebungen erster Ordnung in den Zwischenzeiten addieren sich noch gewisse Verschiebungen zweiter und höherer Ordnung, die wir in unseren Überlegungen vernachlässigt haben.

Wir haben jetzt untersucht, wie das OLBERS'sche M sich gegenüber Änderungen in dem mittleren Ort verhält, und auch wie Änderungen in M den mit dem M und den äusseren Beobachtungen auf Grund der Parabelhypothese errechneten mittleren Ort beeinflussen.

Wo wir nun diese allgemeinen Fragen überblicken können, wenden wir uns zu einem spezielleren Problem. Wir wollen auf Grund der angestellten Überlegungen den sogenannten CARLINI'schen Kunstgriff zur Verbesserung von M etwas näher betrachten. Der CARLINI'sche Kunstgriff gibt die folgende Vorschrift zur Berechnung eines verbesserten M : Es sei mit einem fehlerhaften OLBERS'schen M ein mittlerer Ort $(\alpha_2^\circ, \delta_2^\circ)$ gefunden, der, weil M nicht den richtigen Wert hatte, von dem beobachteten mittleren Ort (α_2, δ_2) abweicht. Man berechne dann ein OLBERS'sches M mit einem mittleren Ort, der durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned}\alpha'_2 &= \alpha_2 - (\alpha_2^\circ - \alpha_2) \\ \delta'_2 &= \delta_2 - (\delta_2^\circ - \delta_2)\end{aligned}\tag{27}$$

gegeben ist. Dieses M ist das verbesserte M .

Wir können nun genau verfolgen, was der CARLINI'sche Kunstgriff bedeutet. Es sei das richtige M gleich M_1 , das benutzte fehlerhafte gleich $M_1 + dM_1$. Das ergibt eine Verschiebung des berechneten mittleren Ortes gegenüber dem richtigen beobachteten Ort (wir sehen bei dieser Überlegung von Beobachtungsfehlern ab). Diese Verschiebung $d\bar{\varrho}_2^*$ liegt teils im grössten Kreis durch den zweiten Sonnenort, teils in der scheinbaren Bahn. Letztere Verschiebung ist gegeben durch:

$$(d\bar{\varrho}_2^*)_{\text{sch. B.}} = \frac{(t_3 - t_2)(t_2 - t_1)}{(t_3 - t_1)^2} (\bar{\varrho}_3^* - \bar{\varrho}_1^*) dM_1.\tag{28}$$

Nun sagt die CARLINI'sche Regel, dass wir diese Verschiebung mit umgekehrtem Vorzeichen an den beobachteten mittleren Ort anbringen und mit dem so erhaltenen Ort ein OLBERS'sches M berechnen sollen. Nun war das ursprüngliche fehlerhafte $M = M_1 + dM_1$ mit dem beobachteten mittleren Ort berechnet (das ist Voraussetzung). Die Änderung in diesem M -Wert, die durch die Verschiebung $-d\bar{\varrho}_2^*$ des mittleren Ortes bedingt ist, können wir leicht berechnen: Der Teil der Verschiebung, der in dem grössten Kreis durch den zweiten Sonnenort liegt, bedingt keine Änderung in M ; der Teil $(-d\bar{\varrho}_2^*)_{\text{sch. B.}}$ in der scheinbaren Bahn bewirkt eine Änderung, die wir nach (14) berechnen können:

$$dM = -\frac{(t_3 - t_1)^2}{(t_2 - t_1)(t_3 - t_2)} \cdot \frac{(t_2 - t_1)(t_3 - t_2)}{(t_3 - t_1)^2} \cdot dM_1 = -dM_1. \quad (29)$$

Der nach CARLINI's Kunstgriff gefundene verbesserte Wert von M ist somit:

$$M = M_1 + dM_1 - dM_1 = M_1, \quad (30)$$

was nach Voraussetzung der richtige M -Wert war.

Bei unseren Überlegungen haben wir überall Grössen zweiter Ordnung in den Zwischenzeiten vernachlässigt. Das durch den CARLINI'schen Kunstgriff erhaltene M ist deshalb fehlerhaft um Grössen, die um eine Grössenordnung kleiner sind als der ursprüngliche Fehler in M . Dieser ist allgemein von der zweiten Ordnung, das CARLINI'sche M wird somit richtig bis auf Grössen dritter Ordnung, und das ist bei ersten Bahnbestimmungen ausreichend.

Es soll nun noch der Einfluss der Parallaxe auf die Bestimmung von M untersucht werden. Bei der Ableitung der Richtung von \bar{V} wurde stillschweigend vorausgesetzt (Gleichung (7)), dass die beobachteten Kometenörter auf den Schwerpunkt Erde-Mond reduziert waren. Diese Reduktion auf das Baryzentrum kann nun nicht vorgenommen werden ohne Kenntnis des Abstandes des Kometen. Man kann nun entweder die Parallaxe in erster Näherung ganz vernachlässigen; dann ist der Fehler in M durch die Verschiebung des zweiten Ortes relativ zu den äusseren bedingt. Oder aber man benutzt Sonnenkoordinaten, die sich auf die Beobachtungsorte beziehen; dann gehören die beobachteten Richtungen und die Sonnenkoordinaten streng zusammen, es treten aber jetzt Glieder in \bar{V} auf, die den gleichen Einfluss auf M haben wie die Vernachlässigungen im vorigen Fall. Es sei bemerkt, dass der Beitrag, der von der Bewegung des Erdzentrums um den Schwerpunkt bei Zwischenzeiten von einer Woche oder mehr von der gleichen Grössenordnung ist wie der von der verschiedenen Orientierung der Beobachtungsorte in Bezug auf das Erdzentrum herrührende. Dem letztgenannten der beiden Verfahren ist der Vorzug zu geben, erreicht man erstens bei diesem, dass nur M von der vernachlässigten Reduktion betroffen wird; den Fehler in M beseitigt man nachher, wenn nötig, zusammen mit den anderen Fehlern in M durch CARLINI'S Kunstgriff. Zweitens ist überhaupt die Berücksichtigung der Parallaxe in dieser Weise rechnerisch die einfachste, besonders wenn man sich der Hilfstafeln von MERTON oder NUMEROV bedient.

Es steht natürlich der Weg offen, die Parallaxe streng zu berücksichtigen, sobald nur ein angenäherter Wert von ϱ_1 bekannt wird. Überhaupt lässt sich auf dieser Stufe M auch

in bezug auf die anderen Vernachlässigungen verbessern, es lässt sich sogar die Brauchbarkeit der Parabelhypothese durch den LAMBERT'schen Satz über die Krümmung der scheinbaren Bahn prüfen. Ich glaube aber, man tut am besten darin, von diesen Möglichkeiten ganz abzusehen, und gleich die Rechnung von M bis zum mittleren Ort durchzuführen, und dann erst M zu verbessern. Diese Rechnung lässt sich so einfach gestalten, dass sie auch in den Fällen, wo M wirklich verbessert werden muss, wohl ebenso rasch zum Ziele führt wie die andere Methode, und war der Fehler in M belanglos, was praktisch oft vorkommen wird, so ist man nach der ersten Durchrechnung am Ziel.

Wir werden also im folgenden Abschnitt die Rechnung von M bis zum mittleren Ort zu betrachten haben.

Es sei ein Wert von M gefunden, mit dem nun die weitere Rechnung durchzuführen ist. Es soll zuerst durch Hypothesenrechnung ein Wert für q_1 (wir schreiben von jetzt an q_1 für $|\bar{q}_1|$; dies kann zu keinen Verwechslungen Anlass geben) gefunden werden, der die OLBERS'schen Fundamentalgleichungen befriedigt. Diese wollen wir in folgender Form benutzen:

$$\begin{aligned} r_1^2 &= a + b q_1 + q_1^2, \\ r_3^2 &= a + \beta q_1 + \gamma q_1^2, \\ S_g^2 &= \frac{s_g^2}{k^2 (t_3 - t_1)^2} = A + B q_1 + C q_1^2, \\ S_d^2 &= \frac{s_d^2}{k^2 (t_3 - t_1)^2} = \frac{4\mu^2}{r_1 + r_3}, \end{aligned} \quad (31)$$

μ^2 nach Tafel I mit dem Argument:

$$\begin{aligned} \arg. &= \frac{(t_3 - t_1)^{\frac{3}{2}}}{r_1 + r_3}, \\ A &= S_g^2 - S_d^2 = 0. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten $a, b, \alpha, \beta, \gamma, A, B, C$ können leicht unter Benutzung der Äquatorkoordinaten berechnet werden (BANACHIEWICZ, B. STRÖMGREN und auch MERTON; ausführlich in STRACKE: Bahnbestimmung der Planeten und Kometen, Springer 1929). Wir haben die übliche Form der Berechnung von s_g und s_d durch die gewählte Form ersetzt, teils weil die Rechnung dadurch etwas abgekürzt wird und sich übersichtlicher gestaltet, teils um die Benutzung eines Nomogrammes, das wir gleich beschreiben wollen, möglichst zu vereinfachen.

Es ist für die schnelle Auflösung von (31) wichtig, einen Näherungswert von q_1 zu besitzen, mit dem man die Hypothesen anfängt. OPPOLZER hat in seiner Untersuchung über die Anzahl der Lösungen q_1 eine Näherungsgleichung sechsten Grades für q_1 aufgestellt, BANACHIEWICZ hat diese Gleichung zur Bestimmung eines Näherungswertes von q_1 verwertet, indem er sie durch die Substitution $q = \frac{1}{2} (q_1 + q_3)$ genauer gestaltete. Die Methode von BANACHIEWICZ ist graphisch, gibt jedoch nicht direkt einen Wert für q_1 , sondern benutzt graphische Versuche mit einer kleinen nachherigen Rechnung, und die regula falsi. Wir wollen ein Nomogramm angeben, das gestattet, direkt, ohne Versuche, einen Wert von q_1 zu finden.

Ein Fundamentalsystem (31) ist durch die Werte von $a, b, \alpha, \beta, \gamma, A, B, C, (t_3 - t_1)^{\frac{2}{3}}$ vollständig gegeben; von diesen 9 Grössen hängt q_1 ab; wir wollen die Zahl der Parameter, von denen q_1 abhängt, auf 3 reduzieren, indem wir uns gewisse Vernachlässigungen erlauben. Erstens setzen wir die Grösse μ^2 gleich eins, was bei kleinen Zwischenzeiten sehr nahe richtig ist; dann fällt der Parameter $(t_3 - t_1)^{\frac{2}{3}}$ weg. Zweitens ersetzen wir in der Gleichung für

S_d^2 den Ausdruck $\frac{1}{2}(r_1 + r_3)$ mit einem r , das wir uns durch folgendes Gleichungssystem bestimmt denken:

$$\begin{aligned} r^2 &= 1 - 2\varrho \cos \psi + \varrho^2 \\ \varrho &= \varrho_1 \cdot \frac{1+M}{2} \\ \cos \psi &= \frac{1}{2}(R_1 \cos \psi_1 + R_3 \cos \psi_3). \end{aligned} \tag{32}$$

Wir haben hier $R_2 = 1$ gesetzt, was ja immer sehr nahe richtig ist. Die Grössen $R_1 \cos \psi_1$ und $R_3 \cos \psi_3$ sind seit der Berechnung von b und β bekannt. Endlich ist A gleich eins gesetzt, was in derselben Näherung gilt wie $R_2 = 1$. Wir können jetzt das Fundamentalsystem (31) näherungsweise durch die folgenden Gleichungen ersetzen:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{1 - 2\varrho \cos \psi + \varrho^2}} &= 1 + F\varrho + G\varrho^2 \\ F &= \frac{B}{\left(\frac{1+M}{2}\right)} \\ G &= \frac{C}{\left(\frac{1+M}{2}\right)^2} \\ \cos \psi &= \frac{1}{2}(R_1 \cos \psi_1 + R_3 \cos \psi_3) \\ \varrho_1 &= \frac{\varrho}{\left(\frac{1+M}{2}\right)}. \end{aligned} \tag{31 a}$$

Die Grösse ϱ hängt von den drei Parametern F , G und $\cos \psi$ ab. Wir denken uns in der Ebene zwei Achsen senkrecht zur X -Achse gelegt, die eine — die F -Achse — durch den Punkt $(0,0)$, die andere — die G -Achse — durch den Punkt $(1,0)$. Ausserdem stellen wir uns eine Schar von

ϱ -Geraden senkrecht zur Achse vor, durch die Punkte $\left(\frac{\varrho}{\varrho+1}, 0\right)$ gehend. Eine Gerade durch die Punkte der F - und G -Achsen $(0, F)$ und $(1, G)$ schneidet die ϱ -Gerade in Höhen über die X -Achse, die durch den folgenden Ausdruck gegeben sind:

$$\begin{aligned} h_1 &= F \frac{1}{\varrho+1} + G \frac{\varrho}{\varrho+1} = (F\varrho + G\varrho^2) \frac{1}{\varrho(\varrho+1)} \\ &= \left(\frac{2}{\sqrt{1-2\varrho \cos \psi + \varrho^2}} - 1 \right) \frac{1}{\varrho(\varrho+1)}. \end{aligned} \quad (33)$$

Denken wir uns nun in der Ebene $\cos \psi$ -Kurven eingezeichnet, die in Parameterform die folgende Gleichung haben:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\varrho}{\varrho+1} \\ h &= \left(\frac{2}{\sqrt{1-2\varrho \cos \psi + \varrho^2}} - 1 \right) \cdot \frac{1}{\varrho(\varrho+1)}, \end{aligned} \quad (34)$$

so sieht man, dass, wenn für ein bestimmtes ϱ die zum vorliegenden Fundamentalsystem gehörende $\cos \psi$ -Kurve die gleiche Höhe hat wie die zum Fundamentalsystem gehörende F - G -Gerade, dieses ϱ dann das Gleichungssystem (31 a) befriedigt, und somit den gesuchten Näherungswert ϱ_1 bestimmt. Um ϱ zu bestimmen, hat man also nur den Schnittpunkt zwischen $\cos \psi$ -Kurve und F - G -Gerade des Fundamentalsystems aufzusuchen und nachzusehen, welche ϱ -Linie durch diesen Punkt geht. Hat das Fundamentalsystem drei Lösungen statt einer, was ja selten genug der Fall ist, wird dieses evident, indem die F - G -Gerade und die $\cos \psi$ -Kurve sich in drei Punkten schneiden. Ein Nomogramm nach diesem Schema befindet sich im Anhang. Die Kurven wurden von Herrn Ingenieur OTTO CHRISTENSEN gezeichnet.

Mit dem gefundenen Näherungswert für ϱ_1 wird das Fundamentalsystem (31) durchgerechnet. Es ergibt sich allgemein ein Wert für $S_g^2 - S_d^2$, der etwas von Null verschieden ist und somit eine Verbesserung von ϱ_1 nötig macht. Es fragt sich dann, ob wir die erforderliche Änderung in ϱ_1 angeben können, die zu einem $S_g^2 - S_d^2$ gleich Null führt.

Es soll $\frac{d}{d\varrho_1} (S_g^2 - S_d^2)$ nach dem Schema der angenähert richtigen Formeln (31 a) berechnet werden. Es ergibt sich:

$$\frac{d}{d\varrho_1} (S_g^2 - S_d^2) = B + 2C\varrho_1 + \left(\frac{1+M}{2}\right) \cdot D, \quad (35)$$

$$D = \frac{2(\varrho - \cos \psi)}{(1 - 2\varrho \cos \psi + \varrho^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Der genannte Differentialquotient wäre übrigens leicht aus den Neigungen der F - G -Geraden und der $\cos \psi$ -Kurve des Fundamentalsystems zu berechnen.

Es kann somit ein Wert von ϱ_1 ermittelt werden, der der Wahrheit sehr nahe liegt. Vielleicht ergibt dies ϱ_1 ein $S_g^2 - S_d^2$, das innerhalb der Rechenunsicherheit gleich Null ist, anderenfalls lässt sich mit Hilfe des Differentialquotienten ein endgültiges $\bar{\varrho}_1$ finden, mit dem nun eine dritte Hypothese gerechnet wird, die dann im allgemeinen innerhalb der Rechenunsicherheit $S_g^2 - S_d^2$ gleich Null gibt.

Es sind somit ϱ_1 und $\varrho_3 = M\varrho_1$ bekannt, und die heliozentrischen Koordinaten x_1, y_1, z_1 und x_3, y_3, z_3 können berechnet werden.

Wir sind jetzt zu der Stufe der Rechnung angelangt, wo wir den mittleren Ort streng berechnen wollen. Dazu ist es nötig, die Grössen c_1 und c_3 zu kennen, deren Berechnung streng erfolgen kann, wenn man ausser r_1 und r_3 auch r_2 kennt. Es entsteht somit die Aufgabe, aus zwei

Werten r_1 und r_3 in der Parabel bei gegebener Zwischenzeit $(t_3 - t_1)$ ein zu einer beliebigen Zeit t_2 zwischen t_1 und t_3 gehörendes r_2 zu berechnen. MERTON hat dieser Aufgabe einige Aufmerksamkeit gewidmet. Es gilt für r in der Parabel die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2r}{dt^2} + \frac{1}{r} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \frac{k^2}{r^2} = 0. \quad (36)$$

MERTON bestimmt nun r_2 durch eine Reihenentwicklung, deren Koeffizienten sich aus der Differentialgleichung (36) leicht berechnen lassen. Nun ist dieses Verfahren für uns nicht befriedigend, erstens weil die numerische Berechnung der höheren Glieder der Reihenentwicklung verwickelt wird, zweitens weil es ja eben unser Zweck ist, den zu einem gewissen M gehörenden mittleren Ort streng zu berechnen. Es soll nun ein Verfahren beschrieben werden, das, durch eine unter Benutzung zweier Hilfstafeln leicht durchzuführende Rechnung, einen strengen Wert von r_2 und damit vom mittleren Ort ergibt.

Wir gehen von der folgenden Formel¹ aus:

$$\operatorname{tg}^2 \frac{v_1}{2} = \frac{(r_1 + r_3)^2 - s^2 + 4r_1^2 - 4r_1 \sqrt{(r_1 + r_3)^2 - s^2}}{s^2 - (r_1 - r_3)^2}. \quad (37)$$

Aus dieser Formel berechnen wir nun:

$$\frac{q}{r_1} = \cos^2 \frac{v_1}{2}. \quad (38)$$

Es ergibt sich:

$$1 + \operatorname{tg}^2 \frac{v_1}{2} = 4 \frac{r_1 r_3 + r_1^2 - r_1 \sqrt{(r_1 + r_3)^2 - s^2}}{s^2 - (r_1 - r_3)^2}, \quad (39)$$

oder:

$$1 + \operatorname{tg}^2 \frac{v_1}{2} = 4 \frac{\alpha + 1 - \sqrt{(1 + \alpha)^2 - \eta^2 \mu^2 (1 + \alpha)^2}}{\eta^2 \mu^2 (1 + \alpha)^2 - (1 - \alpha)^2}, \quad (40)$$

¹ siehe z. B. OLBERS: »Leichteste und bequemste Methode...« S. 35.

wenn:

$$\alpha = \frac{r_3}{r_1}, \quad (41)$$

$$\sin \gamma = \eta \mu = \frac{s}{r_1 + r_3} \quad (42)$$

eingeführt wird.

Dies ergibt nun für $\frac{q}{r_1}$:

$$\frac{q}{r_1} = \frac{\eta^2 \mu^2 (1 + \alpha)^2 - (1 - \alpha)^2}{4(1 + \alpha)(1 - \sqrt{1 - \eta^2 \mu^2})} = ma - \frac{n}{b},$$

wenn wir setzen:

$$\left. \begin{aligned} m &= \frac{1 + \alpha}{2}; \quad a = \frac{\eta^2 \mu^2}{2(1 - \sqrt{1 - \eta^2 \mu^2})} = \frac{\sin^2 \gamma}{2(1 - \cos \gamma)} = \frac{1 + \cos \gamma}{2}; \\ n &= \frac{(1 - \alpha)^2}{4(1 + \alpha)}; \quad b = 1 - \sqrt{1 - \eta^2 \mu^2} = 1 - \cos \gamma. \end{aligned} \right\} (43)$$

Betrachten wir die Grössen m , a , n und b . Die Grössen m und n hängen nur von der Grösse $\alpha = \frac{r_3}{r_1}$ ab. Die Grösse b lässt sich folgendermassen bestimmen. Es gilt die EULER'SCHE Gleichung (vorläufig beschränken wir uns auf den Fall $v_3 - v_1 < 180^\circ$):

$$(r_1 + r_3 + s)^{\frac{3}{2}} - (r_1 + r_3 - s)^{\frac{3}{2}} = 6k(t_3 - t_1), \quad (44)$$

oder:

$$\left(1 + \frac{s}{r_1 + r_3}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(1 - \frac{s}{r_1 + r_3}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{6k(t_3 - t_1)}{(r_1 + r_3)^{\frac{3}{2}}}, \quad (45)$$

d. h.

$$(1 + \sin \gamma)^{\frac{3}{2}} - (1 - \sin \gamma)^{\frac{3}{2}} = \frac{6k(t_3 - t_1)}{(r_1 + r_3)^{\frac{3}{2}}}. \quad (46)$$

Die Grösse b hängt somit nur von der Grösse $\frac{6k(t_3 - t_1)}{(r_1 + r_3)^{\frac{3}{2}}}$ ab, lässt sich somit aus der schon im OLBERS'schen Fundamentalsystem eingeführten Grösse:

$$\arg. = \frac{(t_3 - t_1)^{\frac{2}{3}}}{r_1 + r_3} \quad (47)$$

berechnen. Für die bequemere Berechnung von b schreiben wir (46) in der Form:

$$(2 + \cos \gamma)^2 (1 - \cos \gamma) = 18 \frac{k^2 (t_3 - t_1)^2}{(r_1 + r_3)^3} = 18 k^2 \arg.^3, \quad (48)$$

oder:

$$(3 - b)^2 b = 18 k^2 \arg.^3. \quad (49)$$

Somit lässt sich b durch Auflösung einer Gleichung dritten Grades aus $\arg.$ bestimmen. Endlich sieht man aus (43) unmittelbar, dass:

$$a = 1 - \frac{b}{2} \quad (50)$$

ist.

In den Tafeln III und IV des Anhangs sind die Grössen b und n tabuliert. Die Grösse m findet man direkt durch

$$m = \frac{1 + a}{2}, \quad (51)$$

und a ergibt sich aus b nach (50). Somit erhält man direkt:

$$\frac{q}{r_1} = ma - \frac{n}{b}. \quad (52)$$

Ehe wir näher auf die Konstruktion der Tafeln III und IV eingehen, wollen wir den Fall $v_3 - v_1 > 180^\circ$ erledigen, der zwar bei ersten Bahnbestimmungen nicht vorkommt, aber bei den Anwendungen im zweiten Teil auftreten kann.

Wenn $v_3 - v_1 > 180^\circ$, gilt statt (37):

$$\operatorname{tg}^2 \frac{v_1}{2} = \frac{(r_1 + r_3)^2 - s^2 + 4 r_1^2 + 4 r_1 \sqrt{(r_1 + r_3)^2 - s^2}}{s^2 - (r_1 - r_3)^2}. \quad (53)$$

Dies hat zur Folge, dass jetzt für a und b folgende Ausdrücke statt (43) gelten:

$$a = \frac{\eta^2 \mu^2}{2(1 + \sqrt{1 - \eta^2 \mu^2})} = \frac{\sin^2 \gamma}{2(1 + \cos \gamma)} = \frac{1 - \cos \gamma}{2}, \quad (54)$$

$$b = 1 + \sqrt{1 - \eta^2 \mu^2} = 1 + \cos \gamma.$$

Es gilt somit auch für den Fall $v_3 - v_1 > 180^\circ$:

$$a = 1 - \frac{b}{2}. \quad (55)$$

Statt (44) gilt jetzt:

$$(r_1 + r_3 + s)^{\frac{3}{2}} + (r_1 + r_3 - s)^{\frac{3}{2}} = 6k(t_3 - t_1), \quad (56)$$

und man erhält statt (48) die Gleichung:

$$(2 - \cos \gamma)^2 (1 + \cos \gamma) = 18k^2 \arg.^3 \quad (57)$$

Aus (54) und (57) ergibt sich aber für b wieder die Gleichung:

$$(3 - b)^2 b = 18k^2 \arg.^3 \quad (58)$$

Die Grösse b wird somit in beiden Fällen als Wurzel der gefundenen Gleichung dritten Grades auftreten. Die beiden Zweige der algebraischen Funktion $b(\arg.)$, die man zu benutzen hat, hängen in dem $v_3 - v_1 = 180^\circ$ entsprechenden Maximumswert von $\arg. = \sqrt[3]{\frac{2}{9k^2}}$ mit $b = 1$ zusammen.

Tafel III ist so angeordnet, dass man b durch Rückwärtsinterpolation findet; dies ist in diesem Falle das bequemste. Die Intervalle sind so gewählt, dass eine bequeme Interpolation überall möglich ist. In dem bei ersten Bahnbestimmungen fast immer in Betracht kommenden ersten Teil der Tafel ($b < 0.25$) sollen zwei Stellen durch Inter-

polution gefunden werden. Der dadurch erreichte Genauigkeitsgrad in b ist in allen Fällen ausreichend, wie die folgende Überlegung zeigt. Die Grösse b muss mit derselben relativen Genauigkeit bekannt sein wie n . Nun ist für mässige Werte von $(\alpha - 1)$, für die die Untersuchung allein von Wichtigkeit ist:

$$\frac{dn}{n} = 2 \frac{d\alpha}{\alpha - 1}.$$

Das gibt:

$$db = 2 d\alpha \frac{b}{\alpha - 1}.$$

Nun ist im selben Gebiete (mässige Werte von b):

$$(\alpha - 1)^2 < 8b, \quad (59)$$

sonst wird q negativ. Also haben wir für die Unsicherheit db , die wir in b zulassen dürfen:

$$db > 2 d\alpha \frac{b}{\sqrt{8b}}. \quad (60)$$

Der Wert von $\alpha = \frac{r_3}{r_1}$ ist bei der hier üblichen 5-stelligen Rechnung mit einer Unsicherheit von $d\alpha = 0.00001$ gegeben. Dies gibt in (60) eingesetzt eine Regel für die Genauigkeit, mit der die Tafel b liefern muss, und nach dieser Regel wurde sie eingerichtet. Bei der Benutzung braucht man sich gar nicht um die Regel zu kümmern, man soll nur, wie gesagt, bei $b < 0.25$ zwei Stellen durch Interpolation ermitteln, bei $b > 0.25$ drei Stellen.

In der Umgebung von $b = 1$ (entsprechend $v_3 - v_1 = 180^\circ$) wird die Bestimmung von b unsicher. Es hängt dies damit zusammen, dass Radien und Zwischenzeit, oder Radien und Sehne, überhaupt bei $v_3 - v_1 = 180^\circ$ die Grösse q unbestimmt lassen. Aus den Radien und dem heliozentrischen Bogen (bestimmbar aus den sechs Grössen $x_1, y_1,$

z_1, x_3, y_3, z_3) lässt sich aber ein Wert von q finden. Nun wird ja aber für $v_3 - v_1 = 180^\circ$ die Bahnbestimmung aus zwei heliozentrischen Örtern unbestimmt, und man vermeidet auch Werte von $v_3 - v_1$ in der Nähe von 180° . Bei einiger Annäherung an diesen Fall wird es angebracht sein, den erhaltenen Wert von q durch Ausrechnung des heliozentrischen Bogens zu kontrollieren. Ergeben sich Abweichungen, so ist es sehr leicht, das q zu verbessern:

$$\begin{aligned} 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{v_1}{2} &= \frac{r_1}{q} \\ 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{v_3}{2} &= \frac{r_3}{q} \\ \Delta L &= L - (v_3 - v_1) \\ \frac{dq}{q} &= - \frac{\Delta L}{\left(\cot \frac{v_3}{2} - \cot \frac{v_1}{2} \right)}. \end{aligned} \tag{52 a}$$

Für Werte von $\arg.$, die grösser als $\sqrt[3]{\frac{1}{9k^2}} = 7.214$ sind, gibt es zwei zu demselben $\arg.$ gehörende Werte von b , je nach dem, ob $v_3 - v_1$ kleiner oder grösser als 180° ist; im ersten Fall ist $b < 1$, im zweiten ist $b > 1$; welches im vorliegenden Fall richtig ist, wird man immer entscheiden können.

Die Tafel für b reicht bis zur natürlichen Grenze $b = 2$.

Für $b > 1.5$ gibt die Tafel b aus $\eta^2 = \frac{4k^2(t_3 - t_1)^2}{(r_1 + r_3)^3}$
 $= 4k^2 \arg.^3$ statt aus $\arg.$

Tafel IV gibt n direkt mit dem Argument α . Für $\alpha < 1.3$ muss man mit einer Stelle interpolieren, für $\alpha > 1.3$ mit zwei Stellen. Die Tafel reicht bis $\alpha = 2$, was für erste Bahnbestimmungen ausreicht, jedoch in anderen Fällen, wo man die Tafel benutzen möchte, sich als nicht aus-

reichend erweisen kann. Dann muss man n nach der abgeleiteten Formel:

$$n = \frac{(\alpha - 1)^2}{4(\alpha + 1)} \quad (61)$$

berechnen, was ja keine Schwierigkeiten bereitet.

Es ist für die Benutzung der Tafel IV Voraussetzung, dass $\alpha > 1$, d. h. dass $r_3 > r_1$. Sollte nun $r_1 > r_3$, so vertauscht man einfach r_3 und r_1 , was ja dasselbe q ergibt, rechnet also:

$$\alpha = \frac{r_1}{r_3} \quad (62)$$

$$\frac{q}{r_3} = ma - \frac{n}{b}, \quad (\text{für } r_1 > r_3).$$

Es soll nun zur Erläuterung ein Rechenbeispiel für die Benutzung der Tafeln gegeben werden. Die Werte von $(t_3 - t_1)$, r_1 und r_3 sind:

{	$t_3 - t_1$	8.9994
	r_1	1.11116
	r_3	1.12877
	$(t_3 - t_1)^{\frac{2}{3}}$	4.32656
	arg.	1.93156
	α	1.01585
	m	1.00792
	a	0.99786
	n	0.00003120
	b	0.0042772
	ma	1.00576
	$\frac{n}{b}$	0.00729
	$\frac{q}{r_1}$	0.99847
	q	1.10946

Nachdem nun $\frac{q}{r_1}$ und $\frac{q}{r_3}$ gefunden sind, ergibt sich weiter:

$$\operatorname{tg}^2 \frac{v_3}{2} = \frac{r_3}{q} - 1, \quad (r_3 > r_1). \quad (63)$$

Aus $\operatorname{tg}^2 \frac{v_3}{2}$ ergibt sich M_3 aus den Tafeln von B. STRÖMGREN¹. Allgemein ist v_3 mit derselben relativen Genauigkeit zu ermitteln wie der, mit der man $(r_3 - r_1)$ kennt. Dies wird auch mit den vorliegenden Tafeln erreicht. Den Wert von $(v_3 - v_1)$ dagegen kennt man mit derselben relativen Genauigkeit wie $(t_3 - t_1)$. Man verfährt deshalb zur Bestimmung von M_1 so, dass man $M_3 - M_1$ berechnet. Dann kann man nachträglich zur Kontrolle $\frac{r_1}{q}$ berechnen. Man hat:

$$M_1 = M_3 - (t_3 - t_1) q^{-\frac{3}{2}} \quad (64)$$

und eventuell als Kontrolle:

$$1 + \operatorname{tg}^2 \frac{v_1}{2} = \frac{r_1}{q}. \quad (65)$$

Da M linear mit der Zeit variiert, hat man nun für die Berechnung von r_2 :

$$M_2 = \frac{t_3 - t_2}{t_3 - t_1} M_1 + \frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_1} M_3, \quad (66)$$

$\operatorname{tg}^2 \frac{v_2}{2}$ aus der zitierten Tafel mit dem Argument M_2 und:

$$\frac{r_2}{q} = 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{v_2}{2}. \quad (67)$$

¹ BENGT STRÖMGREN: Tables giving $\tan \frac{v}{2}$ and $\tan^2 \frac{v}{2}$ in Parabolic Motion, with Argument $M = (t - T) q^{-\frac{3}{2}}$, to facilitate the Computation of Ephemerides from Parabolic Elements (Mem. B. A. A. Vol. 27 part 2 und Publ. Kop. Obs. No. 58).

Die Grössen r_1 , r_2 und r_3 sind jetzt bekannt, und es können die Grössen c_1 und c_3 streng berechnet werden.

Man berechnet:

$$\begin{aligned} \arg_{\cdot 12} &= \frac{(t_2 - t_1)^{\frac{2}{3}}}{r_1 + r_2} \\ \arg_{\cdot 23} &= \frac{(t_3 - t_2)^{\frac{2}{3}}}{r_2 + r_3} \\ \arg. = \arg_{\cdot 13} &= \frac{(t_3 - t_1)^{\frac{2}{3}}}{r_1 + r_3} \end{aligned} \quad (68)$$

(die Grösse $\arg.$ ist seit der Hypothesenrechnung bekannt).

Mit diesen drei Grössen findet man in Tafel II die drei Verhältnisse Sektor : Dreieck = \bar{y} . Man hat dann:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{t_3 - t_2}{t_3 - t_1} \cdot \frac{\bar{y}_{13}}{\bar{y}_{23}} \\ c_3 &= \frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_1} \cdot \frac{\bar{y}_{13}}{\bar{y}_{12}} \end{aligned} \quad (69)$$

Die Tafel II gibt \bar{y} bis $\bar{y} = 1.25$. Diese Grenze wird bei ersten Bahnbestimmungen kaum überschritten. Bei Bahnbestimmungen, wo die Bogen so gross sind, dass diese Grenze überschritten wird, berechnet man die Verhältnisse der Dreiecksflächen bequem direkt nach den Formeln:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{\left(\operatorname{tg} \frac{v_3}{2} - \operatorname{tg} \frac{v_2}{2}\right) \left(1 + \operatorname{tg} \frac{v_2}{2} \operatorname{tg} \frac{v_3}{2}\right)}{\left(\operatorname{tg} \frac{v_3}{2} - \operatorname{tg} \frac{v_1}{2}\right) \left(1 + \operatorname{tg} \frac{v_1}{2} \operatorname{tg} \frac{v_3}{2}\right)} \\ c_3 &= \frac{\left(\operatorname{tg} \frac{v_2}{2} - \operatorname{tg} \frac{v_1}{2}\right) \left(1 + \operatorname{tg} \frac{v_1}{2} \operatorname{tg} \frac{v_2}{2}\right)}{\left(\operatorname{tg} \frac{v_3}{2} - \operatorname{tg} \frac{v_1}{2}\right) \left(1 + \operatorname{tg} \frac{v_1}{2} \operatorname{tg} \frac{v_3}{2}\right)}. \end{aligned} \quad (70)$$

Es ist nun möglich, den mittleren Ort zu berechnen. Man hat:

$$\begin{aligned} \varrho_2 \cos \delta_2 \cos \alpha_2 &= c_1 x_1 + c_3 x_3 + X_2 \\ \varrho_2 \cos \delta_2 \sin \alpha_2 &= c_1 y_1 + c_3 y_3 + Y_2 \\ \varrho_2 \sin \delta_2 &= c_1 z_1 + c_3 z_3 + Z_2. \end{aligned} \quad (71)$$

Hiermit haben wir den Teil der Rechnung erledigt, der darin bestand, den zum gefundenen M -Wert gehörenden mittleren Ort streng zu berechnen.

Wenn nun der errechnete mittlere Ort mit dem beobachteten in genügender Übereinstimmung ist (innerhalb etwa 0'.1), so kann man unmittelbar die Rechnung fortsetzen. Anderenfalls bringt man den CARLINI'schen Kunstgriff in Anwendung, und hat dann mit dem neuen M -Wert die Koeffizienten des OLBERS'schen Fundamentalsystems zu berechnen. Der definitive ϱ_1 -Wert der vorigen Hypothese wird für die erste Hypothese gebraucht; den Differentialquotienten $\frac{d}{d\varrho_1}(S_g^2 - S_d^2)$ übernimmt man ungeändert aus der vorigen Auflösung und bestimmt damit nach Durchrechnung der ersten Hypothese einen verbesserten Wert von ϱ_1 , der dann im allgemeinen schon definitiv ist, so dass in der Regel schon die zweite Hypothese zum Ziel führt.

Mit dem so gefundenen ϱ_1 ist bis zum mittleren Ort weiterzurechnen, ganz wie in der vorigen Auflösung. Es wird sich dann im allgemeinen zeigen, dass die Darstellung des mittleren Ortes befriedigend ist. Sind die Beobachtungen fehlerhaft, oder ist Elliptizität vorhanden, so wird man

andererseits jetzt leicht nachrechnen können, wie nahe es möglich ist, die 6 Beobachtungsdaten durch eine Parabel darzustellen.

Es soll nun zur Berechnung der modifizierten GAUSS'schen Konstanten¹ übergegangen werden. Die geometrische Bedeutung dieser Konstanten ist einfach: sie bedeuten die äquatorealen, rechtwinkligen, heliozentrischen Koordinaten der Punkte mit $v = 0^\circ$ (Perihel) und $v = 90^\circ$ der Parabel. Die Koordinaten (x, y, z) in der Parabel sind durch die Konstanten durch die folgenden Gleichungen ausgedrückt:

$$\begin{aligned} x &= m_x \cdot \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{v}{2}\right) + 2n_x \cdot \operatorname{tg} \frac{v}{2} \\ y &= m_y \cdot \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{v}{2}\right) + 2n_y \cdot \operatorname{tg} \frac{v}{2} \\ z &= m_z \cdot \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{v}{2}\right) + 2n_z \cdot \operatorname{tg} \frac{v}{2}. \end{aligned} \quad (72)$$

Es sind nun folgende Grössen bekannt: $x_1, y_1, z_1, x_3, y_3, z_3, \operatorname{tg} \frac{v_1}{2}$ und $\operatorname{tg} \frac{v_3}{2}$. Dies gestattet eine direkte Bestimmung der Vektoren \bar{m} (m_x, m_y, m_z) und $2\bar{n}$ ($2n_x, 2n_y, 2n_z$). Nun sind bei kleinen Bogen gewisse Vorsichtsmassnahmen nötig, weil hier die sechs Grössen aus den Eliminationsformeln mit geringer Genauigkeit gegeben werden, jedoch gewissen Banden unterworfen sind, die sie genau erfüllen müssen. Diese sind: Die Längen der Vektoren \bar{m} und $2\bar{n}$ sind q bzw. $2q$; die Vektoren \bar{m} und $2\bar{n}$ sind senkrecht zu einander; \bar{m} und $2\bar{n}$ müssen mit $\operatorname{tg} \frac{v_1}{2}$ und $\operatorname{tg} \frac{v_3}{2}$ wieder die 6 Grössen $x_1, y_1, z_1, x_3, y_3, z_3$ ergeben.

¹ A. C. D. CROMMELIN: B. A. A. Journal, **32**, 305.

Allgemein sollen Ebene, Richtung in der Ebene und Länge gemäss den genannten Bedingungen richtig sein. Wir bestimmen zunächst $2\bar{n}$ aus den Eliminationsgleichungen:

$$\begin{aligned} 2n_x &= \left(\frac{x_3}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{v_3}{2}} - \frac{x_1}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{v_1}{2}} \right) : \left(\frac{\sin v_3 - \sin v_1}{2} \right) \\ 2n_y &= \left(\frac{y_3}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{v_3}{2}} - \frac{y_1}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{v_1}{2}} \right) : \left(\frac{\sin v_3 - \sin v_1}{2} \right) \\ 2n_z &= \left(\frac{z_3}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{v_3}{2}} - \frac{z_1}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{v_1}{2}} \right) : \left(\frac{\sin v_3 - \sin v_1}{2} \right). \end{aligned} \quad (73)$$

Dadurch wird die Ebene von $2\bar{n}$ richtig bestimmt (d. h. \bar{r}_1 , \bar{r}_3 und $2\bar{n}$ liegen genügend genau in einer Ebene), die Länge und Richtung in der Ebene dagegen nicht; wir können aber $2\bar{n}$, da $2q$ bekannt ist, normieren, sodass die Länge richtig ist. Da $2\bar{n}$ also doch normiert werden muss, ist es bequemer $2\bar{n}$ bis auf einen unbestimmten Normierungsfaktor G_1 zu berechnen, und diesen Faktor dann nachträglich bei der Normierung zu bestimmen:

$$\begin{aligned} G_1 \cdot 2n_x^\circ &= x_3 \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{v_1}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{v_3}{2}} - x_1 \\ G_1 \cdot 2n_y^\circ &= y_3 \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{v_1}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{v_3}{2}} - y_1 \\ G_1 \cdot 2n_z^\circ &= z_3 \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{v_1}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{v_3}{2}} - z_1 \end{aligned} \quad (74)$$

$$(2q G_1)^2 = (G_1 \cdot 2n_x^\circ)^2 + (G_1 \cdot 2n_y^\circ)^2 + (G_1 \cdot 2n_z^\circ)^2. \quad (75)$$

Der Vektor $2\bar{n}$ ist hierdurch richtig bestimmt bis auf eine Drehung in der Bahnebene, d. h. bis auf einen kleinen Vektor $\varepsilon\bar{m}$. Wir berechnen nun \bar{m} folgendermassen:

$$\begin{aligned} m_x^\circ &= \frac{x_1}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{v_1}{2}} - 2n_x^\circ \cdot \frac{\operatorname{tg} \frac{v_1}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{v_1}{2}} \\ m_y^\circ &= \frac{y_1}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{v_1}{2}} - 2n_y^\circ \cdot \frac{\operatorname{tg} \frac{v_1}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{v_1}{2}} \\ m_z^\circ &= \frac{z_1}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{v_1}{2}} - 2n_z^\circ \cdot \frac{\operatorname{tg} \frac{v_1}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{v_1}{2}}. \end{aligned} \quad (76)$$

Wir haben also \bar{m} mit einem $2\bar{n}$ berechnet, das bis auf $\varepsilon\bar{m}$ richtig ist. Dies bedeutet, dass der Fehler in \bar{m} lediglich ein Fehler in der Länge von \bar{m} ist, der durch Normierung auf die bekannte Länge q beseitigt werden kann. Da somit auch \bar{m} nachträglich normiert werden soll, bestimmt man wieder \bar{m} am bequemsten bis auf einen unbestimmten Normierungsfaktor G_2 :

$$\begin{aligned} G_2 \cdot m_x &= x_1 - 2n_x^\circ \cdot \operatorname{tg} \frac{v_1}{2} \\ G_2 \cdot m_y &= y_1 - 2n_y^\circ \cdot \operatorname{tg} \frac{v_1}{2} \\ G_2 \cdot m_z &= z_1 - 2n_z^\circ \cdot \operatorname{tg} \frac{v_1}{2}, \end{aligned} \quad (77)$$

$$(q \cdot G_2)^2 = (G_2 \cdot m_x)^2 + (G_2 \cdot m_y)^2 + (G_2 \cdot m_z)^2. \quad (78)$$

Die Grössen m_x , m_y und m_z sind nun richtig. Der Vektor $2\bar{n}$ ist richtig bis auf einen Vektor $\varepsilon\bar{m}$. Die kleine Grösse ε bestimmt man durch die Bedingung $(\bar{m} \cdot 2\bar{n}) = 0$:

$$(2\bar{n}^\circ + \varepsilon\bar{m})\bar{m} = 0, \quad (79)$$

also:

$$\varepsilon = - \frac{2n_x^\circ m_x + 2n_y^\circ m_y + 2n_z^\circ m_z}{q^2}. \quad (80)$$

Dann ist:

$$\begin{aligned} 2n_x &= 2n_x^\circ + \varepsilon m_x \\ 2n_y &= 2n_y^\circ + \varepsilon m_y \\ 2n_z &= 2n_z^\circ + \varepsilon m_z. \end{aligned} \quad (81)$$

Wir stellen die Formeln zur Übersicht zusammen:

$$\left. \begin{aligned} G_1 \cdot 2n_x^\circ &= x_3 \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{v_1}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{v_3}{2}} - x_1 \\ G_1 \cdot 2n_y^\circ &= y_3 \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{v_1}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{v_3}{2}} - y_1 \\ G_1 \cdot 2n_z^\circ &= z_3 \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{v_1}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{v_3}{2}} - z_1 \\ (2q G_1)^2 &= (G_1 \cdot 2n_x^\circ)^2 + (G_1 \cdot 2n_y^\circ)^2 + (G_1 \cdot 2n_z^\circ)^2 \\ G_2 \cdot m_x &= x_1 - 2n_x^\circ \cdot \operatorname{tg} \frac{v_1}{2} \\ G_2 \cdot m_y &= y_1 - 2n_y^\circ \cdot \operatorname{tg} \frac{v_1}{2} \\ G_2 \cdot m_z &= z_1 - 2n_z^\circ \cdot \operatorname{tg} \frac{v_1}{2} \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

$$\left. \begin{aligned} (qG_2)^2 &= (G_2 \cdot m_x)^2 + (G_2 \cdot m_y)^2 + (G_2 \cdot m_z)^2 \\ \varepsilon &= -\frac{1}{q^2} (2n_x^\circ \cdot m_x + 2n_y^\circ \cdot m_y + 2n_z^\circ \cdot m_z) \\ 2n_x &= 2n_x^\circ + \varepsilon m_x \\ 2n_y &= 2n_y^\circ + \varepsilon m_y \\ 2n_z &= 2n_z^\circ + \varepsilon m_z. \end{aligned} \right\}$$

Ein Beispiel für die numerische Anwendung dieser Formeln findet man Seite 52.

Wir können die abgeleiteten Formeln für die parabolische Bahnbestimmung (1. Methode, $W > 10^\circ$) zusammenstellen.

I. Gegeben seien die Grössen:

$$\begin{aligned} t_1 \quad \alpha_1 \delta_1 \quad X_1 Y_1 Z_1 \\ t_2 \quad \alpha_2 \delta_2 \quad X_2 Y_2 Z_2 \\ t_3 \quad \alpha_3 \delta_3 \quad X_3 Y_3 Z_3. \end{aligned}$$

Die Kometenörter sind mittlere Örter für den Jahresanfang, die Sonnenkoordinaten beziehen sich auf den Jahresanfang und sind auf die Beobachtungsorte reduziert (Tafeln hierfür bei MERTON oder NUMEROV). Die Beobachtungszeiten können erst in IV wegen Aberrationszeit reduziert werden.

II. Man berechnet:

$$\begin{aligned} l_1 &= \cos \delta_1 \cos \alpha_1 & l_2 &= \cos \delta_2 \cos \alpha_2 & l_3 &= \cos \delta_3 \cos \alpha_3 \\ m_1 &= \cos \delta_1 \sin \alpha_1 & m_2 &= \cos \delta_2 \sin \alpha_2 & m_3 &= \cos \delta_3 \sin \alpha_3 \\ n_1 &= \sin \delta_1 & n_2 &= \sin \delta_2 & n_3 &= \sin \delta_3 \end{aligned}$$

$$M = -\frac{t_3 - t_2}{t_2 - t_1} \cdot \frac{l_1(Y_2 n_2 - Z_2 m_2) + m_1(Z_2 l_2 - X_2 n_2) + n_1(X_2 m_2 - Y_2 l_2)}{l_3(Y_2 n_2 - Z_2 m_2) + m_3(Z_2 l_2 - X_2 n_2) + n_3(X_2 m_2 - Y_2 l_2)}$$

Wenn W klein ist und die Zwischenzeiten nicht nahe gleich sind, ersetzt man in dieser Formel X_2, Y_2, Z_2 durch:

$$X = aX_1 + bX_3$$

$$Y = aY_1 + bY_3$$

$$Z = aZ_1 + bZ_3,$$

wo:

$$a : b = \frac{t_3 - t_2}{t_2 - t_1} \cdot \frac{(t_3 - t_1)^2 - (t_3 - t_2)^2}{(t_3 - t_1)^2 - (t_2 - t_1)^2}.$$

III. Die Koeffizienten des OLBERS'schen Fundamentalsystems werden berechnet:

$$R_1 \cos \psi_1 = l_1 X_1 + m_1 Y_1 + n_1 Z_1$$

$$R_3 \cos \psi_3 = l_3 X_3 + m_3 Y_3 + n_3 Z_3$$

$$a = X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2$$

$$\alpha = X_3^2 + Y_3^2 + Z_3^2$$

$$b = -2 \cdot R_1 \cos \psi_1$$

$$\beta = -2 M \cdot R_3 \cos \psi_3$$

$$\gamma = M^2$$

$$A = \frac{(X_3 - X_1)^2 + (Y_3 - Y_1)^2 + (Z_3 - Z_1)^2}{k^2 (t_3 - t_1)^2}$$

$$B = -2 \cdot \frac{(Ml_3 - l_1)(X_3 - X_1) + (Mm_3 - m_1)(Y_3 - Y_1) + (Mn_3 - n_1)(Z_3 - Z_1)}{k^2 (t_3 - t_1)^2}$$

$$C = \frac{(Ml_3 - l_1)^2 + (Mm_3 - m_1)^2 + (Mn_3 - n_1)^2}{k^2 (t_3 - t_1)^2}.$$

IV. Man berechnet:

$$F = \frac{B}{\left(\frac{1+M}{2}\right)}$$

$$G = \frac{C}{\left(\frac{1+M}{2}\right)^2}$$

$$\cos \psi = \frac{1}{2} (R_1 \cos \psi_1 + R_3 \cos \psi_3)$$

und findet ϱ mit Hilfe des Nomogrammes, und damit einen Näherungswert für ϱ_1 :

$${}^1\varrho_1 = \frac{\varrho}{\left(\frac{1+M}{2}\right)}.$$

Jetzt korrigiert man die Grössen A , B , C und $(t_3 - t_1)^{\frac{2}{3}}$ für die Aberrationszeit. Der Einfluss der Aberrationszeiten auf M wird vernachlässigt (er ist ganz belanglos). Eine eventuelle Neurechnung von M nach CARLINI'S Kunstgriff erfolgt selbstverständlich mit dem schon benutzten unkorrigierten Wert von $\frac{t_3 - t_2}{t_2 - t_1}$.

Man hat:

$$K = 1 + 0.01154 \frac{M-1}{t_3 - t_1} \cdot \varrho$$

$$A_{\text{korr.}} = A \cdot K$$

$$B_{\text{korr.}} = B \cdot K$$

$$C_{\text{korr.}} = C \cdot K$$

$$(t_3 - t_1)_{\text{korr.}}^{\frac{2}{3}} = (t_3 - t_1)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(1 - \frac{K-1}{3}\right).$$

Jetzt wird auch der Differentialquotient $\frac{dA}{d\varrho_1}$ berechnet:

$$\frac{dA}{dq_1} = \frac{d}{dq_1} (S_g^2 - S_d^2) = B + 2Cq_1 + \frac{1+M}{2} D$$

$$D = \frac{2(\varrho - \cos \psi)}{(1 - 2\varrho \cos \psi + \varrho^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

V. Mit dem gefundenen Näherungswert für q_1 wird die erste Hypothese durchgerechnet nach den Formeln:

$$r_1^2 = a + b q_1 + q_1^2$$

$$r_3^2 = \alpha + \beta q_1 + \gamma q_1^2$$

$$S_g^2 = A_{\text{korr.}} + B_{\text{korr.}} q_1 + C_{\text{korr.}} q_1^2$$

$$S_d^2 = \frac{4\mu^2}{r_1 + r_3},$$

μ^2 nach Tafel I mit dem Argument:

$$\text{arg.} = \frac{(t_3 - t_1)_{\text{korr.}}^3}{r_1 + r_3}$$

und:
$$A = S_g^2 - S_d^2.$$

Eine zweite Hypothese wird jetzt gerechnet mit:

$${}^2q_1 = {}^1q_1 - {}^1A : \frac{dA}{dq_1}.$$

Oft wird diese ${}^2A = 0$ ergeben. Wenn nicht, wird eine dritte Hypothese mit:

$${}^3q_1 = {}^2q_1 - {}^2A : \frac{dA}{dq_1}$$

gerechnet.

VI. Mit dem definitiven Wert von q_1 rechnet man nun:

$$q_3 = Mq_1$$

$$x_1 = q_1 l_1 - X_1 \quad x_3 = q_3 l_3 - X_3$$

$$y_1 = q_1 m_1 - Y_1 \quad y_3 = q_3 m_3 - Y_3$$

$$z_1 = q_1 n_1 - Z_1 \quad z_3 = q_3 n_3 - Z_3.$$

VII. Mit den Werten von r_1 , r_3 und arg. der letzten Hypothese berechnet man:

$$\alpha = \frac{r_3}{r_1}, \quad \text{wenn } r_3 > r_1$$

$$\alpha = \frac{r_1}{r_3}, \quad \text{wenn } r_1 > r_3$$

und findet aus den Tafeln III und IV b und n mit den Argumenten arg. und α . Dann hat man:

$$a = 1 - \frac{b}{2}$$

$$m = \frac{1 + \alpha}{2}$$

$$\frac{q}{r_1} = ma - \frac{n}{b}, \quad \text{wenn } r_3 > r_1; \quad q = \frac{q}{r_1} \cdot r_1$$

$$\frac{q}{r_3} = ma - \frac{n}{b}, \quad \text{wenn } r_1 > r_3; \quad q = \frac{q}{r_3} \cdot r_3.$$

Nun rechnet man weiter:

$$\operatorname{tg}^2 \frac{v_3}{2} = \frac{r_3}{q} - 1, \quad \text{wenn } r_3 > r_1$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{v_1}{2} = \frac{r_1}{q} - 1, \quad \text{wenn } r_1 > r_3$$

und findet M_3 bzw. M_1 aus den Tafeln für $\operatorname{tg} \frac{v}{2}$ und $\operatorname{tg}^2 \frac{v}{2}$.

Es ergibt sich weiter:

$$M_3 - M_1 = (t_3 - t_1) q^{-\frac{3}{2}}$$

$$M_2 = \frac{t_3 - t_2}{t_3 - t_1} M_1 + \frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_1} M_3.$$

Hier und im folgenden sind die für Aberrationszeit korrigierten Werte der Beobachtungszeiten zu benutzen:

$$t_{i\text{kor.}} = t_i - 0.00577 q_i.$$

Aus den genannten Tafeln findet man $\text{tg}^2 \frac{\nu_2}{2}$ und hat:

$$r_2 = q \left(1 + \text{tg}^2 \frac{\nu_2}{2} \right)$$

$$\text{arg}_{\cdot 12} = \frac{(t_2 - t_1)^{\frac{2}{3}}}{r_1 + r_2} \quad \text{gibt nach Tafel II } \bar{y}_{12}$$

$$\text{arg}_{\cdot 23} = \frac{(t_3 - t_2)^{\frac{2}{3}}}{r_2 + r_3} \quad \text{gibt nach Tafel II } \bar{y}_{23}$$

$$\text{arg}_{\cdot 13} = \text{arg.} \quad \text{gibt nach Tafel II } \bar{y}_{13}$$

$$c_1 = \frac{t_3 - t_2}{t_3 - t_1} \cdot \frac{\bar{y}_{13}}{\bar{y}_{23}}$$

$$c_3 = \frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_1} \cdot \frac{\bar{y}_{13}}{\bar{y}_{12}}.$$

Man kann jetzt den mittleren Ort berechnen:

$$x_2 = c_1 x_1 + c_3 x_3$$

$$y_2 = c_1 y_1 + c_3 y_3$$

$$z_2 = c_1 z_1 + c_3 z_3$$

$$\varrho_2^\circ \cos \delta_2^\circ \cos \alpha_2^\circ = x_2 + X_2$$

$$\varrho_2^\circ \cos \delta_2^\circ \sin \alpha_2^\circ = y_2 + Y_2$$

$$\varrho_2^\circ \sin \delta_2^\circ = z_2 + Z_2.$$

VIII. Man rechnet, wenn nötig, ein neues M nach CARLINI'S Kunstgriff und wiederholt mit diesem die ausgeführten Rechnungen.

IX. Die Grösse q ist schon bekannt. Man berechnet die Perihelzeit T :

$$T - t_1 = M_1 q^{\frac{3}{2}}.$$

X. Man berechnet die modifizierten GAUSS'schen Konstanten:

$$G_1 \cdot 2n_x^\circ = x_3 \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{v_1}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{v_3}{2}} - x_1$$

$$G_1 \cdot 2n_y^\circ = y_3 \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{v_1}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{v_3}{2}} - y_1$$

$$G_1 \cdot 2n_z^\circ = z_3 \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{v_1}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{v_3}{2}} - z_1$$

$$(2q \cdot G_1)^2 = (G_1 \cdot 2n_x^\circ)^2 + (G_1 \cdot 2n_y^\circ)^2 + (G_1 \cdot 2n_z^\circ)^2$$

$$G_2 \cdot m_x = x_1 - 2n_x^\circ \cdot \operatorname{tg} \frac{v_1}{2}$$

$$G_2 \cdot m_y = y_1 - 2n_y^\circ \cdot \operatorname{tg} \frac{v_1}{2}$$

$$G_2 \cdot m_z = z_1 - 2n_z^\circ \cdot \operatorname{tg} \frac{v_1}{2}$$

$$(q \cdot G_2)^2 = (G_2 \cdot m_x)^2 + (G_2 \cdot m_y)^2 + (G_2 \cdot m_z)^2$$

$$\varepsilon = -\frac{1}{q^2} (2n_x^\circ \cdot m_x + 2n_y^\circ \cdot m_y + 2n_z^\circ \cdot m_z)$$

$$2n_x = 2n_x^\circ + \varepsilon m_x$$

$$2n_y = 2n_y^\circ + \varepsilon m_y$$

$$2n_z = 2n_z^\circ + \varepsilon m_z.$$

Damit sind alle Elemente abgeleitet. Wenn es erwünscht erscheint, berechnet man noch aus m_x , m_y , m_z , $2n_x$, $2n_y$, $2n_z$ ekliptikale Elemente nach bekannten Formeln (MERTON, BANACHIEWICZ).

Wir erläutern diese Formeln durch ein Rechenbeispiel. Die Ausgangsdaten sind dem MERTON-
schen Rechenbeispiel entnommen.

	t	$\alpha_{1925.0}$	$\delta_{1925.0}$	
(1)	1925 April 5.0000	$336^\circ 39' 42''.9$	$+ 16^\circ 30' 8''.1$	
(2)	» 9.5000	$337^\circ 47' 54''.4$	$+ 21^\circ 17' 30''.8$	
(3)	» 14.0000	$339^\circ 3' 16''.3$	$+ 26^\circ 24' 27''.5$	
	(1)	(2)	(3)	(1)
X	$+ 0.96785$	$+ 0.94660$	$+ 0.91974$	$l + 0.88036$
Y	$+ 0.23299$	$+ 0.30114$	$+ 0.36751$	$m - 0.37984$
Z	$+ 0.10106$	$+ 0.13063$	$+ 0.15941$	$n + 0.28405$
				(2)
				(3)
				$+ 0.86266$
				$- 0.35207$
				$+ 0.36312$
				$+ 0.83647$
				$- 0.32018$
				$+ 0.44475$

$$R_1^2 + 1.00123$$

$$R_3^2 + 1.00640$$

$$R_1 \cos \psi_1 + 0.79226$$

$$R_3 \cos \psi_3 + 0.72256$$

$$k^2 (t_3 - t_1)^2 + 0.023969$$

$$(t_3 - t_1)^3 + 4.32675$$

$$(t_3 - t_2)^3 + 2.726$$

$$(t_2 - t_1)^3 + 2.726$$

$Y_2, m_2 + 0.30114$	-0.35207			$+0.88036$	$+0.83647$	$+0.05606$
$Z_2, n_2 + 0.13063$	$+0.36312$	$+0.15534$		-0.37984	-0.32018	-0.05985
$X_2, l_2 + 0.94660$	$+0.86266$	-0.23104		$+0.28405$	$+0.44475$	$+0.93667$
$Y_2, m_2 + 0.30114$	-0.35207	-0.59305				$+1.00000$
$M \cdot (l_3, m_3, n_3) + 0.78350$	-0.29990	$+0.41658$			$M = +0.93667$	
$-(l_1, m_1, n_1) - 0.88036$	$+0.37984$	-0.28405			$\frac{1}{2}(1+M) = +0.96834$	
$(Ml_3 - l_1) \dots - 0.09686$	$+0.07994$	$+0.13253$			$\left(\frac{1}{2}(1+M)\right)^2 = +0.93768$	
$(X_3 - X_1) \dots - 0.04811$	$+0.13452$	$+0.05835$			$\frac{M-1}{t_3 - t_1} = -0.00704$	
$\Sigma_1^2 + 0.033336$	$C + 1.39080$	$G + 1.48324$		$\rho + 1.66$	$B + 2Cq_1 + 2.825$	
$-2 \Sigma \text{Pr.} - 0.046293$	$B - 1.93137$	$F - 1.99452$		${}^1q_1 + 1.71$	$\frac{1+M}{2} \cdot D + \frac{1.252}{2}$	
$\Sigma_2^2 + 0.023815$	$A + 0.99358$	$\cos \psi + 0.757$		$D + 1.293$	$\frac{dA}{d\rho} + 4.08$	
				$K + 1.00013$	$(t_3 - t_1)_{\text{Korr.}}^2 + 4.32656$	

$$r_1^2 = +1.00123 - 1.58452 \varrho_1 + \varrho_1^2$$

$$r_3^2 = +1.00640 - 1.35360 \varrho_1 + 0.87735 \varrho_1^2$$

$$S_g^2 = +0.99370 - 1.93162 \varrho_1 + 1.39098 \varrho_1^2$$

1. Hypothese 2. Hypothese 3. Hypothese

ϱ_1	1.71000	1.72027	1.72022	ϱ_1	1.72022	$q^{-\frac{3}{2}}$	+ 0.85572	\arg_{13}	1.932
ϱ_1^2	2.92410	2.95933	2.95916	ϱ_3	1.61128	$\text{tg}^2 \frac{\nu_3}{2}$	+ 0.01740	\arg_{12}	1.223
r_1	1.10263	1.11120	1.11116	$\arg.$	1.93156	M_3	+ 10.9064	\arg_{23}	1.214
r_3	1.12125	1.12881	1.12877	α	1.01585	$(t_3 - t_1)q^{-\frac{3}{2}}$	+ 7.7010	\bar{y}_{13}	1.00287
$r_1 + r_3$	2.23388	2.24001	2.23993	m	1.00792	M_1	+ 3.2054	\bar{y}_{12}	1.00072
$\arg.$	1.946	1.931	1.93156	a	0.99786	$\text{tg}^2 \frac{\nu_1}{2}$	+ 0.00152	\bar{y}_{23}	1.00071
μ^2	1.00073	1.00071	1.00071	n	0.00003120	r_1	+ 1.11115	$\bar{y}_{13} : \bar{y}_{23}$	1.00216
$4\mu^2$	4.00292	4.00284	4.00284	b	0.0042772	M_2	+ 7.0559	$\bar{y}_{13} : \bar{y}_{12}$	1.00215
S_d^2	1.8000	1.7870	1.7870	ma	1.00576	$\text{tg}^2 \frac{\nu_2}{2}$	+ 0.00733		
S_g^2	1.7580	1.7872	1.7870	$\frac{n}{b}$	0.00729	r_2	+ 1.11759	c_1	0.50108
A	-0.0420	+0.0002	0.0000	$\frac{q}{r_1}$	0.99847	$r_1 + r_2$	+ 2.22875	c_3	0.50107.
$d\varrho_1 + 0.01027$	-0.00005			q	1.10946	$r_2 + r_3$	+ 2.24636		

$\xi_1, \eta_1, \zeta_1 + 1.51441$	$-0.65341 + 0.48863$	$\xi_3, \eta_3, \zeta_3 + 1.34779$	$-0.51590 + 0.71662$
$-X_1, -Y_1, -Z_1 - 0.96785$	$-0.23299 - 0.10106$	$-X_3, -Y_3, -Z_3 - 0.91974$	$-0.36751 - 0.15941$
$x_1, y_1, z_1 + 0.54656$	$-0.88640 + 0.38757$	$x_3, y_3, z_3 + 0.42805$	$-0.88341 + 0.55721$
$x_2, y_2, z_2 + 0.48836$	$-0.88681 + 0.47341$		
$X_2, Y_2, Z_2 + 0.94660$	$+0.30114 + 0.13063$		
$\xi_2, \eta_2, \zeta_2 + 1.43496$	$-0.58567 + 0.60404$		
$\varrho_2^\circ \cos \delta_2^\circ$	$+ 1.54988$		
$\operatorname{tg} \alpha_2^\circ - 0.40814$	$\operatorname{tg} \delta_2^\circ + 0.38973$		
$\alpha_2^\circ 337^\circ 47' 52''$	$\delta_2^\circ + 21^\circ 17' 32''$		
$\alpha_2 337^\circ 47' 54''.4$	$\delta_2 + 21^\circ 17' 30''.8$		
$\alpha_2 - \alpha_2^\circ + 2''$	$\delta_2 - \delta_2^\circ - 1''$		

$1 - \operatorname{tg}^2 \frac{v_1}{2}$	$F_1 \cdot (x_3, y_3, z_3) + 0.43497$	-0.89769	$+ 0.56621$
$1 - \operatorname{tg}^2 \frac{v_3}{2}$	$-(x_1, y_1, z_1) - 0.54656$	$+ 0.88640$	$- 0.38757$
$1 - \operatorname{tg}^2 \frac{v_1}{2}$		-0.11159	$+ 0.17864$
$F_1 = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{v_1}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{v_3}{2}}$	$2q \cdot G_1 + 0.2109314$		
$q + 1.10946$	$(2n_x^0, 2n_y^0, 2n_z^0) - 1.17388$	-0.11877	$+ 1.87922$
$2q + 2.21892$			$1 : G_1 + 10.51962$
$\operatorname{tg} \frac{v_1}{2} + 0.03897$	$(x_1, y_1, z_1) + 0.54656$	-0.88640	$+ 0.38757$
$\operatorname{tg} \frac{v_3}{2} + 0.13190$	$-\operatorname{tg} \frac{v_1}{2} (2n_x^0, 2n_y^0, 2n_z^0) + 0.04575$	$+ 0.00463$	$- 0.07323$
$t_1 - T = M_1 q^3 + 3.7459$	$+ 0.59231$	-0.88177	$+ 0.31434$
	$q \cdot G_2 + 1.10777$		
t_1	4.9901 April 1925	$(m_x, m_y, m_z) + 0.59322$	-0.88312
		$+ 0.31482$	$+ 0.31482$
T	1925 April 1.2442	Weltzeit	
		$\varepsilon \cdot (m_x, m_y, m_z) - 0.00007$	$+ 0.00010$
		-0.00003	$\varepsilon - 0.00011$
		$(2n_x, 2n_y, 2n_z) - 1.17395$	-0.11867
		$+ 1.87919$	$\Sigma m \cdot 2n - 0.00000$

$$\begin{aligned}
 x &= +0.59322 \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\nu}{2}\right) - 1.17395 \left(\operatorname{tg} \frac{\nu}{2}\right) \\
 y &= -0.88312 \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\nu}{2}\right) - 0.11867 \left(\operatorname{tg} \frac{\nu}{2}\right) \\
 z &= +0.31482 \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\nu}{2}\right) + 1.87919 \left(\operatorname{tg} \frac{\nu}{2}\right) \\
 q &= 1.10946
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} x \\ y \\ z \\ q \end{aligned}} \right\} 1925.0$$

$T = 1925$ April 1.2442 Weltzeit.

Kontrolle durch Zurückrechnung.

$$\begin{aligned}
 &\left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\nu_1}{2}\right) (m_x, m_y, m_z) + 0.59232 - 0.88178 + 0.31434 \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\nu_2}{2}\right) (m_x, m_y, m_z) + 0.58887 - 0.87665 + 0.31251 \\
 &\operatorname{tg} \frac{\nu_1}{2} \cdot (2n_x, 2n_y, 2n_z) - 0.04575 - 0.00462 + 0.07323 \operatorname{tg} \frac{\nu_2}{2} \cdot (2n_x, 2n_y, 2n_z) - 0.10051 - 0.01016 + 0.16090 \\
 &\quad (x_1, y_1, z_1) + 0.54657 - 0.88640 + 0.38757 \quad (x_2, y_2, z_2) + 0.48836 - 0.88681 + 0.47341
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\nu_3}{2}\right) (m_x, m_y, m_z) + 0.58290 - 0.86775 + 0.30934 \\
 &\operatorname{tg} \frac{\nu_3}{2} \cdot (2n_x, 2n_y, 2n_z) - 0.15484 - 0.01565 + 0.24787 \\
 &\quad (x_3, y_3, z_3) + 0.42806 - 0.88340 + 0.55721
 \end{aligned}$$

Dies ergibt dieselbe Darstellung des mittleren Ortes wie oben:

$$\left. \begin{aligned}
 A\alpha &= +2'' \\
 A\delta &= -1''
 \end{aligned} \right\} B - R.$$

Es soll nun auch kurz auf den Fall eingegangen werden, wo man die *OLBERS'sche* Methode zur Bestimmung von M wird aufgeben müssen ($W < 10^\circ$).

In diesem Falle wird man wohl für die Bestimmung von ϱ_1 eine der beiden *MERTON'schen* Methoden zur Bahnbestimmung benutzen und somit das Problem durch eine Gleichung zwischen ϱ_1 , ϱ_3 und r_2 zusammen mit der *EULER'schen* Gleichung durch Hypothesen für ϱ_1 lösen.

Unter Umständen wird man es vielleicht vorziehen, die auf einen etwas geringeren Genauigkeitsgrad angelegte Methode von *OPPOLZER* zu benutzen. Diese Methode lässt sich leicht für maschinelle Rechnung bequem gestalten. Man findet etwas direkter als bei *MERTON* eine Gleichung zwischen ϱ_1 , ϱ_3 und $(r_1 + r_3)$ und findet dann ϱ_1 und ϱ_3 durch Hypothesenrechnung in bezug auf $(r_1 + r_3)$, indem man diese Gleichung mit der *EULER'schen* Gleichung zusammen benutzt.

Wenn ϱ_1 und ϱ_3 gefunden sind, rechnet man wie bei der ersten Methode.

Ich möchte diesen Teil der Abhandlung mit einem Hinweis auf eine Methode zur Bahnbestimmung schliessen, die man anwenden kann, wo es darauf ankommt, so rasch wie möglich nach der Anstellung der dritten Beobachtung eine Ephemeride zu bekommen.

Man rechnet dann, sobald die zwei ersten Beobachtungen vorliegen, mit drei angenommenen Werten für das Verhältnis M der geozentrischen Distanzen für diese beiden Beobachtungen, nach den oben zusammengestellten Formeln »mittlere Örter« für z. B. jeden zweiten (oder vierten) Tag der nächstfolgenden Woche. Dabei wird man statt der

Formeln (71) den Satz benutzen, dass für irgend drei x -Koordinaten (analog für y und z) x_i, x_k, x_l die Differenzen der Grössen $\frac{x_i}{\bar{y}_{kl}}, \frac{x_k}{\bar{y}_{il}}, \frac{x_l}{\bar{y}_{ik}}$ sich wie die Zwischenzeiten verhalten.

Liegt eine solche Rechnung vor, so kann man nach Einlauf der dritten Beobachtung ausserordentlich schnell eine Ephemeride für die nächstfolgende Zeit berechnen.

In diesem zweiten Teil der Abhandlung sollen einige der im vorigen Teil abgeleiteten Resultate auf das Problem der Bahnverbesserung durch Variation des Verhältnisses der geozentrischen Distanzen angewandt werden.

Kurz gesagt lässt sich der ganze Formelapparat zur Bestimmung des mittleren Ortes bei gegebenem M auf dies Problem übertragen. Das dargestellte Verfahren ist streng, unabhängig von der Länge des heliozentrischen Bogens und in den Tafeln des Anhanges sind die Grenzen so gewählt, dass wohl alle vorkommenden Fälle von den Tafeln umfasst werden.

Man rechnet also für zwei Werte von M die zugehörigen Örter für diejenigen Zwischenzeiten, für die die Beobachtungen vorliegen, direkt nach den Formeln in III, V, VI und VII, anstatt den Umweg über die Elemente zu gehen. Das wahre M ergibt sich in der üblichen Weise.

Es fragt sich jetzt, ob die gerade dargestellte Methode sich auch für die Anwendung auf parabelnahe Bahnen ausdehnen lässt. Wir können das Problem etwas genauer formulieren: Es soll untersucht werden, ob die dargestellte Methode zur direkten Berechnung eines mittleren Ortes sich auch anwenden lässt, wo man voraussetzt, nicht dass die

Bahn eine Parabel ist, sondern dass sie eine parabelnahe Bahn mit einem gegebenen Wert der Grösse $\frac{1}{a}$ ist.

Es ist also nach der HORNSTEIN'schen Methode eine parabelnahe Bahn durch Variation der beiden Grössen M und $\frac{1}{a}$ zu ermitteln.

Den Übergang von Parabel auf parabelnahe Bahn wollen wir nach den Formeln in BAUSCHINGER: Bahnbestimmung (zusammengestellt auch in den Erläuterungen der Tafel XVII der Tafeln von BAUSCHINGER) durchführen. Es soll nur noch untersucht werden, wie man verfahren muss, um r_2 mit Hilfe unserer Tafeln III und IV zu ermitteln, und wie man die Grössen c_1 und c_3 bestimmt.

Zunächst sei bemerkt, dass zwar die Grösse $\frac{1}{a}$ zur Charakterisierung der Bahn benutzt wird, man aber in den Fällen, wo die HORNSTEIN'sche Methode angewandt wird, einen so guten Näherungswert von q kennt, dass man zur Charakterisierung der Bahn ebenso gut die mit Hilfe von diesem q errechnete Abweichung von der Exzentrizität 1 benutzen kann:

$$1 - e = q^\circ \cdot \frac{1}{a}. \quad (82)$$

Um r_2 mit Hilfe der Tafeln III und IV finden zu können, muss man von den Grössen t_1, t_3, r_1, r_3 der parabelnahen Bahn durch kleine von e abhängige Korrekturen auf die Parabel reduzieren. Wir bezeichnen die korrigierten Grössen mit einem Strich und können die Sachlage so formulieren: Wenn für die gestrichenen Grössen die folgenden Gleichungen gelten:

$$\begin{aligned} \frac{k}{\sqrt{2}} \cdot \frac{t' - T}{(\alpha q)^\frac{3}{2}} &= \operatorname{tg} \frac{w}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{w}{2}, \\ \frac{r'}{(\alpha q)} &= 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{w}{2}, \end{aligned} \quad (83)$$

wo a irgendeine z. B. von der Exzentrizität abhängige Konstante ist, so kann man mit Hilfe der Tafeln III und IV in der gewöhnlichen Weise mit den gestrichenen Grössen $\cos^2 \frac{w}{2}$ ermitteln:

$$\cos^2 \frac{w}{2} = ma - \frac{n}{b}. \quad (84)$$

Es sollen nun an Hand der BAUSCHINGER'schen Formeln die Korrekturen berechnet werden, die die gegebenen Grössen in die gestrichenen überführen. Dies leisten, wie man leicht nachrechnet, die folgenden Transformationen:

$$\begin{aligned} r' &= r \cdot \frac{\nu^2}{\sigma^2} \cdot \frac{1+9e}{5(1+e)} \cdot \sqrt[3]{\frac{10}{1+9e}} + \left(1 - \frac{1}{\sigma^2} \cdot \frac{1+9e}{5(1+e)}\right) \sqrt[3]{\frac{10}{1+9e}} \cdot q \\ t' &= t + \left(\frac{1}{B} - 1\right)(t - T), \end{aligned} \quad (85)$$

wo die Grössen σ , ν und B der Tafel XVII von BAUSCHINGER mit dem Argument:

$$A = \frac{5(1-e)}{1+9e} \operatorname{tg}^2 \frac{w}{2} \quad (85a)$$

zu entnehmen sind.

Um diese Transformationen auf die gestrichenen Grössen ausführen zu können, muss man Näherungswerte der Grössen q , T und $\operatorname{tg}^2 \frac{w}{2}$ schon besitzen. Dies ist nun immer der Fall, wo die Anwendung des HORNSTEIN'schen Verfahrens in Frage kommt. Bei starker Abweichung von der Parabel wird man eventuell die Rechnung mit den aus der ersten Durchrechnung sich ergebenden Werten dieser Grössen wiederholen müssen.

Es ist somit $1 + \operatorname{tg}^2 \frac{w_1}{2} = \frac{1}{\cos^2 \frac{w_1}{2}}$ bekannt; zuerst be-

rechnet man $1 + \operatorname{tg}^2 \frac{w_3}{2}$ und kann dann nach den BAUSCHINGER'schen Formeln weiterrechnen:

$$q = \frac{r'_1 \cos^2 \frac{w_1}{2}}{\sqrt[3]{\frac{10}{1+9e}}} \quad \left. \vphantom{q} \right\} (86)$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \frac{w_3}{2} = \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{w_1}{2}\right) \frac{r'_3}{r'_1}$$

$$(M_1) = \frac{\sqrt{2}}{k} \left(\operatorname{tg} \frac{w_1}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{w_1}{2} \right)$$

$$(M_3) = \frac{\sqrt{2}}{k} \left(\operatorname{tg} \frac{w_3}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{w_3}{2} \right)$$

$$M_1 = \sqrt{\frac{10}{1+9e}} \cdot B_1 \cdot (M_1)$$

$$M_3 = \sqrt{\frac{10}{1+9e}} \cdot B_3 \cdot (M_3)$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{v_1}{2} = \operatorname{tg}^2 \frac{w_1}{2} \cdot \sigma_1^2 \cdot \frac{5(1+e)}{1+9e}$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{v_3}{2} = \operatorname{tg}^2 \frac{w_3}{2} \cdot \sigma_3^2 \cdot \frac{5(1+e)}{1+9e}$$

$$q = \frac{r_1 \nu_1^2}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{v_1}{2}} = \frac{r_3 \nu_3^2}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{v_3}{2}} \quad \left. \vphantom{q} \right\} (87)$$

$$(t_1 - T) = M_1 q^{\frac{3}{2}}$$

$$(t_3 - T) = M_3 q^{\frac{3}{2}}$$

$$M_2 = \frac{t_3 - t_2}{t_3 - t_1} M_1 + \frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_1} M_3$$

$$(M_2) = M_2 : \left(\sqrt{\frac{10}{1+9e}} \cdot B_2 \right),$$

dann $\operatorname{tg}^2 \frac{w_2}{2}$ mit dem Argument (M_2) und:

$$\operatorname{tg}^2 \frac{v_2}{2} = \operatorname{tg}^2 \frac{w_2}{2} \cdot \sigma_1^2 \cdot \frac{5(1+e)}{1+9e}$$

$$r_2 = q \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{v_2}{2}}{\nu_2^2}.$$

Die Grössen c_1 und c_3 ergeben sich leicht, indem jetzt für die Koordinaten in der Bahnebene gilt:

$$r \cos v = q \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{v}{2} \right) \cdot \frac{1}{\nu^2}$$

$$r \sin v = q \left(2 \operatorname{tg} \frac{v}{2} \right) \cdot \frac{1}{\nu^2}.$$
(88)

Man hat jetzt für c_1 und c_3 (vgl. (70)):

$$c_1 = \frac{\left(\operatorname{tg} \frac{v_3}{2} - \operatorname{tg} \frac{v_2}{2} \right) \left(1 + \operatorname{tg} \frac{v_2}{2} \operatorname{tg} \frac{v_3}{2} \right)}{\left(\operatorname{tg} \frac{v_3}{2} - \operatorname{tg} \frac{v_1}{2} \right) \left(1 + \operatorname{tg} \frac{v_1}{2} \operatorname{tg} \frac{v_3}{2} \right)} \cdot \frac{\nu_1^2}{\nu_2^2}$$

$$c_3 = \frac{\left(\operatorname{tg} \frac{v_2}{2} - \operatorname{tg} \frac{v_1}{2} \right) \left(1 + \operatorname{tg} \frac{v_1}{2} \operatorname{tg} \frac{v_2}{2} \right)}{\left(\operatorname{tg} \frac{v_3}{2} - \operatorname{tg} \frac{v_1}{2} \right) \left(1 + \operatorname{tg} \frac{v_1}{2} \operatorname{tg} \frac{v_3}{2} \right)} \cdot \frac{\nu_3^2}{\nu_2^2},$$
(89)

und kann den mittleren Ort berechnen:

$$\varrho_2 \cos \delta_2 \cos \alpha_2 = c_1 x_1 + c_3 x_3 + X_2$$

$$\varrho_2 \cos \delta_2 \sin \alpha_2 = c_1 y_1 + c_3 y_3 + Y_2$$

$$\varrho_2 \sin \delta_2 = c_1 z_1 + c_3 z_3 + Z_2.$$
(90)

Es sollen jetzt diese Ausführungen durch ein Beispiel für die Berechnung von q erläutert werden.

Es sei gegeben (OPPOLZER, Band II, S. 419):

$$\begin{aligned} t_3 - t_1 &= 44.5000 \\ r_1 &= 1.02894 \\ r_3 &= 1.05835 \\ e &= 0.905367. \end{aligned}$$

Wir benutzen für q gleich den richtigen Wert, geben also die Daten der letzten Hypothese:

$$q = 0.97652.$$

Dies ergibt:

	1.	3.	
$\operatorname{tg}^2 \frac{w}{2} + 0.05427$	$+ 0.08475$	$t'_1 = t_1 + 0.0000$	
$A + 0.002807 + 0.004383$		$t'_3 = t_3 + 0.0000$	
$B + 1.000000 + 1.000000$		$r'_1 = 1.01838 + 0.04214 = 1.06052$	
$\log \sigma \quad 0.000488$	0.000763	$r'_3 = 1.04783 + 0.04336 = 1.09119$	
$\log \nu \quad 0.000610$	0.000953		

$$\begin{aligned} t'_3 - t'_1 & 44.5000 \\ (t'_3 - t'_1)^{\frac{2}{3}} & 12.55760 \\ r'_1 + r'_3 & 2.15171 \\ \operatorname{arg.} & 5.83610 \\ \alpha & 1.02892 \\ m & 1.01446 \\ a & 0.93580 \end{aligned}$$

n	0.000103
b	0.12840
ma	0.94933
$\frac{n}{b}$	0.00080
$\cos^2 \frac{w_1}{2}$	0.94853
$1 + \operatorname{tg}^2 \frac{w_1}{2}$	1.05426
$1 + \operatorname{tg}^2 \frac{w_3}{2}$	1.08475
$\sqrt[3]{\frac{10}{1+9e}} \cdot q$	1.00594
q	0.97653

Im Anschluss an diese Überlegungen wollen wir auf noch einen Punkt eingehen, auf die ρ -Hypothesenrechnung bei der Anwendung der HORNSTEIN'schen Methode. Man rechnet entweder wie im Fall der Parabel, indem nur die EULER'sche Gleichung durch die LAMBERT'sche zu ersetzen ist:

$$\begin{aligned}
 3\eta &= (1 + \beta)^{\frac{3}{2}} \cdot Q_+ \mp (1 - \beta)^{\frac{3}{2}} \cdot Q_- \\
 Q_+ &= Q_+ (R \cdot (1 + \beta)) \\
 Q_- &= Q_- (R \cdot (1 - \beta)), \\
 Q_+ \text{ und } Q_- &\text{ nach BAUSCHINGER Tafel XXIII,} \quad (91)
 \end{aligned}$$

$$\beta = \frac{s}{r_1 + r_3}$$

$$R = \frac{r_1 + r_3}{4a}.$$

Man kann aber auch nach dem Vorgang von OPPOLZER die ϱ -Hypothesenrechnung umgehen. Es seien zwei parabolische Hypothesen mit zwei M -Werten ($M^{(1)}$ und $M^{(2)}$) gerechnet. Statt jetzt nach HORNSTEIN mit $M^{(1)}$ und einem Wert für $\frac{1}{a}$ einen mittleren Ort zu berechnen, berechnet man den zu den folgenden ϱ -Werten gehörenden mittleren Ort: ϱ_1 aus der ersten Parabelhypothese ($M^{(1)}$ entsprechend), ϱ_3 aus der zweiten Parabelhypothese ($M^{(2)}$ entsprechend). Gelingt dies, hat man die Methode auf die Methode der Variation der geozentrischen Distanzen zurückgeführt. Zur Durchführung dieser Rechnung bedient man sich der LAMBERT'schen Gleichung (91). Die in (91) auftretenden Größen η und β können aus den Werten ϱ_1 und ϱ_3 direkt berechnet werden. Die LAMBERT'sche Gleichung enthält dann nur noch $\frac{1}{a}$ als Unbekannte; $\frac{1}{a}$ lässt sich somit aus ϱ_1 und ϱ_3 berechnen. Die weitere Rechnung verläuft jetzt genau wie bei der HORNSTEIN'schen Methode.

Es tritt bei dieser Methode das Problem auf, aus der LAMBERT'schen Gleichung (91) $\frac{1}{a}$ bei bekanntem η und bekanntem β zu berechnen. Dies Problem kann durch Hypothesenrechnung für $\frac{1}{a}$ gelöst werden. Die Tafel V des Anhangs ermöglicht nun eine direkte Berechnung von $\frac{1}{a}$ aus η und β .

Es sei eine Grösse $\bar{\beta}$ durch die folgende Gleichung definiert:

$$3\eta = (1 + \bar{\beta})^{\frac{3}{2}} \mp (1 - \bar{\beta})^{\frac{3}{2}}. \quad (91 \text{ a})$$

Im parabolischen Fall $\frac{1}{a} = 0$ ist $\bar{\beta} = \beta$; $\bar{\beta}$ hängt nur von η ab; β ist von η und R abhängig. Die Tafel V des Anhangs gibt mit den Argumenten β^2 und R die Grösse

$\left(\frac{\beta}{\bar{\beta}}\right)^2$. Mit Hilfe dieser Tafel lässt sich $\frac{1}{a}$ direkt berechnen: Das Argument $\beta^2 = \left(\frac{s}{r_1 + r_3}\right)^2$ ist bekannt. Aus dem bekannten η berechnet man das durch (91 a) definierte $\bar{\beta}$. Zur Berechnung von $\bar{\beta}$ aus η hat man:

$$\beta^2 = \eta^2 \mu^2, \mu^2 \text{ aus Tafel I mit dem Argument}$$

$$\text{arg.} = \left(\frac{\eta^2}{4k^2}\right)^{\frac{1}{3}}, \log 4k^2 = 7.073\ 223, \text{ oder:} \quad (91\ b)$$

$$\beta = \eta\mu, \log \mu \text{ aus BAUSCHINGER Tafel XXII}$$

mit dem Argument η .

Man kennt somit β^2 und $\left(\frac{\beta}{\bar{\beta}}\right)^2$, bestimmt daraus R mit Hilfe der Tafel V und hat:

$$\frac{1}{a} = \frac{4R}{r_1 + r_3}. \quad (92)$$

Der Gebrauch der Tafel V sei durch das folgende Beispiel (OPPOLZER, Band II, S. 470) erläutert:

$$\log 2k(t_3 - t_1) = 9.128560$$

$$\log s = 9.000000$$

$$\log(r_1 + r_3) = 0.255272$$

$$\log \eta = 8.745652 \quad \beta^2 = 0.003086$$

$$\log \mu = 0.000056 \quad \left(\frac{\beta}{\bar{\beta}}\right)^2 = 0.99550$$

$$\log \bar{\beta} = 8.745708$$

$$\log \bar{\beta}^2 = 7.491416 \quad R = 0.00450$$

$$\log \beta^2 = 7.489456 \quad \frac{4}{r_1 + r_3} = 2.22222$$

$$\log \left(\frac{\beta}{\bar{\beta}}\right)^2 = 9.998040 \quad \frac{1}{a} = 0.01000 \text{ (in exakter Übereinstimmung mit OPPOLZER).}$$

Die Tafel V mag auch dann, wenn man die reine HORNSTEIN'sche Methode anwendet, bei der ϱ -Hypothesenrechnung gute Dienste leisten.

Zum Schluss sei noch einiges über die Berechnung der Tafeln gesagt.

Die Tafel I der Grösse μ^2 wurde teilweise mit Hilfe der OPPOLZER'schen μ -Tafel berechnet; wo die Grenzen dieser Tafel überschritten wurden, wurde nach den folgenden Formeln gerechnet, die man leicht verifizieren kann:

$$\mu^2 = \frac{1 - \frac{b}{2}}{\left(1 - \frac{b}{3}\right)^2} = \frac{9\left(1 - \frac{b}{2}\right)}{(3 - b)^2}, \quad (93)$$

wo b mit $\arg.$ nach (49) zusammenhängt. Es wurde zuerst eine Tafel, die μ^2 mit dem Argument b gab, berechnet, und dann konnte mit dieser Tafel und der Tafel III $\arg.$ aus μ^2 berechnet werden. Zur Kontrolle wurden noch die folgenden Formeln benutzt:

$$3 + u = \frac{3}{\sqrt{9 - 8\mu^2}} \quad (94)$$

$$\arg.^3 = \frac{2}{9k^2} \frac{u(3+u)^2}{(2+u)^3}.$$

Für $\arg. < 8.58907$ bei $v_3 - v_1 > 180^\circ$, entsprechend $\mu^2 < 1$, reicht die Tafel I nicht mehr aus. In diesem ausserordentlich selten vorkommenden Fall ist die Tafel Ia zu benutzen. Tafel Ia gibt $\eta = \frac{1}{3} \{(1 + \beta)^{\frac{3}{2}} + (1 - \beta)^{\frac{3}{2}}\}$ mit dem Argument $\beta^2 = \left(\frac{s}{r_1 + r_3}\right)^2$. Die Hypothesenrechnung ist jetzt so zu führen, dass mit einem Werte von ϱ_1 die Grössen

r_1, r_3 und s berechnet werden; daraus ergibt sich $\beta^2 = \left(\frac{s}{r_1 + r_3}\right)^2$, und mit Tafel I a erhält man η . Die Grösse ϱ_1 wird variiert, bis der so erhaltene η -Wert mit dem aus der Zwischenzeit erhaltenen η -Wert $\eta = \frac{2k(t_3 - t_1)}{(r_1 + r_3)^{\frac{3}{2}}}$ übereinstimmt. Wenn β^2 nahe gleich 1 ist, wird die Benutzung von Tafel I a schwierig; dies ist belanglos, indem ein $\beta^2 > 0.75$ einem arg.-Wert entspricht, der in das Gebiet der Tafel I fällt ($\mu^2 > 1$). Die Tafel I a wurde nur zur besseren Übersicht bis $\beta^2 = 1$ ausgedehnt.

Die Tafel II für $\bar{y} = \text{Sektor} : \text{Dreieck}$ wurde nach der folgenden Formel gerechnet, die unmittelbar aus der bekannten »sec γ -Formel« für \bar{y} folgt:

$$1 + \frac{3}{2}(\bar{y} - 1) = \frac{1}{1 - b}. \quad (95)$$

Es wurde b aus \bar{y} gerechnet und arg. aus Tafel III gefunden.

Die Berechnung der übrigen Tafeln konnte direkt nach den früher abgeleiteten Formeln erfolgen. Bei der Berechnung der Tafel V konnte ich mich für $\beta^2 \leq 0.2$ der SUBBOTIN'schen Tafeln XXV, XXVIII und XXIX¹ bedienen.

Im übrigen ist zu bemerken, dass die Tafeln I, II, III und IV mit zwei Stellen mehr gerechnet wurden als in den Tafeln gegeben, so dass der Fehler unter 0.53 Einheiten der letzten Stelle beträgt. Die Tafeln I a und V wurden mit einer überschüssigen Stelle berechnet; der Fehler bleibt unter einer Einheit der letzten gegebenen Stelle. Die Berechnung nach den Formeln erfolgte im allgemeinen in zehn mal grösserem Intervall als in den endgültigen Tafeln; die Interpolation wurde linear mit der Rechenmaschine aus-

¹ Publications of the Tashkent Astronomical Observatory Vol. II.

geführt und für höhere Differenzen mit kleinen Hilfstafeln korrigiert. Grosse Teile der Rechnungen für die Tafel III konnten mit noch 10 mal grösserem Intervall berechnet werden, nämlich die Berechnung der Grösse $\arg.^3$ (die dem üblichen η^2 entspricht: es gilt $\arg.^3 = \frac{\eta^2}{4k^2}$); die Werte $\arg.$ mussten aber in engerem Intervall berechnet werden.

Bei allen Rechnungen, auch in den gegebenen Rechenbeispielen, habe ich mich der elektrischen ARCHIMEDES-Rechenmaschine bedient. Diese Maschine scheint mir unübertroffen zu sein, besonders für Rechenarbeit innerhalb dieses Problemkreises, wo die Berechnung von Produktsummen so in den Vordergrund tritt.

Bei der Berechnung der Tafeln habe ich mich oft des Diktats von der Maschine bedient. Für Hilfe bei dieser Arbeit möchte ich Frl. ERNA MACKEPRANG, den Herren O. MÖLLER NIELSEN und E. LAURSEN und besonders auch Frl. HELEN RASMUSSEN herzlich danken.

BENGT STRÖMGREN.

TAFELN

Tafel I.

μ^2	arg.	μ^2	arg.	μ^2	arg.	μ^2	arg.
1.00000	0.000	1.00050	1.717	1.00100	2.161	1.00150	2.473
1	0.466	1	1.728	1	2.169	1	2.478
2	0.588	2	1.739	2	2.176	2	2.483
3	0.672	3	1.750	3	2.183	3	2.489
4	0.740	4	1.761	4	2.190	4	2.494
5	0.797	5	1.772	5	2.197	5	2.500
6	0.847	6	1.783	6	2.204	6	2.505
7	0.892	7	1.793	7	2.211	7	2.510
8	0.933	8	1.804	8	2.217	8	2.516
9	0.970	9	1.814	9	2.224	9	2.521
1.00010	1.005	1.00060	1.824	1.00110	2.231	1.00160	2.526
1	1.037	1	1.834	1	2.238	1	2.531
2	1.067	2	1.844	2	2.244	2	2.536
3	1.096	3	1.854	3	2.251	3	2.542
4	1.124	4	1.864	4	2.258	4	2.547
5	1.150	5	1.873	5	2.264	5	2.552
6	1.175	6	1.883	6	2.271	6	2.557
7	1.199	7	1.892	7	2.277	7	2.562
8	1.222	8	1.902	8	2.283	8	2.567
9	1.244	9	1.911	9	2.290	9	2.572
1.00020	1.265	1.00070	1.920	1.00120	2.296	1.00170	2.577
1	1.286	1	1.929	1	2.303	1	2.582
2	1.306	2	1.938	2	2.309	2	2.587
3	1.326	3	1.947	3	2.315	3	2.592
4	1.345	4	1.956	4	2.321	4	2.597
5	1.363	5	1.965	5	2.328	5	2.602
6	1.381	6	1.973	6	2.334	6	2.607
7	1.398	7	1.982	7	2.340	7	2.612
8	1.415	8	1.990	8	2.346	8	2.617
9	1.432	9	1.999	9	2.352	9	2.622
1.00030	1.448	1.00080	2.007	1.00130	2.358	1.00180	2.626
1	1.464	1	2.015	1	2.364	1	2.631
2	1.480	2	2.024	2	2.370	2	2.636
3	1.495	3	2.032	3	2.376	3	2.641
4	1.510	4	2.040	4	2.382	4	2.646
5	1.525	5	2.048	5	2.388	5	2.650
6	1.539	6	2.056	6	2.394	6	2.655
7	1.553	7	2.064	7	2.399	7	2.660
8	1.567	8	2.072	8	2.405	8	2.665
9	1.580	9	2.079	9	2.411	9	2.669
1.00040	1.594	1.00090	2.087	1.00140	2.417	1.00190	2.674
1	1.607	1	2.095	1	2.422	1	2.679
2	1.620	2	2.102	2	2.428	2	2.683
3	1.633	3	2.110	3	2.434	3	2.688
4	1.645	4	2.117	4	2.439	4	2.692
5	1.658	5	2.125	5	2.445	5	2.697
6	1.670	6	2.132	6	2.451	6	2.702
7	1.682	7	2.140	7	2.456	7	2.706
8	1.694	8	2.147	8	2.462	8	2.711
9	1.705	9	2.154	9	2.467	9	2.715
1.00050	1.717	1.00100	2.161	1.00150	2.473	1.00200	2.720

Tafel I.

μ^2	arg.	μ^2	arg.	μ^2	arg.	μ^2	arg.
1.0000	0.0	1.0050	3.676	1.0100	4.601	1.0150	5.232
1	1.0	1	3.700	1	4.616	1	5.243
2	1.3	2	3.724	2	4.630	2	5.254
3	1.4	3	3.747	3	4.645	3	5.264
4	1.6	4	3.770	4	4.659	4	5.275
5	1.7	5	3.792	5	4.673	5	5.286
6	1.8	6	3.815	6	4.688	6	5.297
7	1.9	7	3.837	7	4.702	7	5.307
8	2.0	8	3.859	8	4.716	8	5.318
9	2.1	9	3.880	9	4.729	9	5.328
1.0010	2.2	1.0060	3.901	1.0110	4.743	1.0160	5.339
1	2.2	1	3.923	1	4.757	1	5.349
2	2.3	2	3.943	2	4.771	2	5.359
3	2.4	3	3.964	3	4.784	3	5.370
4	2.4	4	3.984	4	4.798	4	5.380
5	2.5	5	4.004	5	4.811	5	5.390
6	2.5	6	4.024	6	4.824	6	5.400
7	2.6	7	4.044	7	4.837	7	5.410
8	2.6	8	4.063	8	4.850	8	5.420
9	2.7	9	4.083	9	4.863	9	5.430
1.0020	2.720	1.0070	4.102	1.0120	4.876	1.0170	5.440
1	2.764	1	4.121	1	4.889	1	5.450
2	2.807	2	4.139	2	4.902	2	5.460
3	2.848	3	4.158	3	4.915	3	5.470
4	2.888	4	4.176	4	4.927	4	5.480
5	2.928	5	4.194	5	4.940	5	5.489
6	2.966	6	4.212	6	4.952	6	5.499
7	3.003	7	4.230	7	4.965	7	5.509
8	3.039	8	4.248	8	4.977	8	5.518
9	3.074	9	4.265	9	4.989	9	5.528
1.0030	3.109	1.0080	4.283	1.0130	5.002	1.0180	5.538
1	3.143	1	4.300	1	5.014	1	5.547
2	3.176	2	4.317	2	5.026	2	5.556
3	3.208	3	4.334	3	5.038	3	5.566
4	3.240	4	4.351	4	5.050	4	5.575
5	3.271	5	4.367	5	5.061	5	5.585
6	3.301	6	4.384	6	5.073	6	5.594
7	3.331	7	4.400	7	5.085	7	5.603
8	3.360	8	4.416	8	5.097	8	5.612
9	3.389	9	4.432	9	5.108	9	5.622
1.0040	3.417	1.0090	4.448	1.0140	5.120	1.0190	5.631
1	3.445	1	4.464	1	5.131	1	5.640
2	3.472	2	4.480	2	5.143	2	5.649
3	3.499	3	4.495	3	5.154	3	5.658
4	3.526	4	4.511	4	5.165	4	5.667
5	3.552	5	4.526	5	5.177	5	5.676
6	3.577	6	4.541	6	5.188	6	5.685
7	3.603	7	4.556	7	5.199	7	5.694
8	3.628	8	4.571	8	5.210	8	5.703
9	3.652	9	4.586	9	5.221	9	5.711
1.0050	3.676	1.0100	4.601	1.0150	5.232	1.0200	5.720

Tafel I.

μ^2	arg.	μ^2	arg.	μ^2	arg.	μ^2	arg.
1.0200	5.720	1.0250	6.121	1.0300	6.461	1.0350	6.756
1	5.729	1	6.128	1	6.467	1	6.762
2	5.738	2	6.135	2	6.474	2	6.767
3	5.746	3	6.143	3	6.480	3	6.773
4	5.755	4	6.150	4	6.486	4	6.778
5	5.764	5	6.157	5	6.492	5	6.784
6	5.772	6	6.164	6	6.499	6	6.789
7	5.781	7	6.172	7	6.505	7	6.795
8	5.789	8	6.179	8	6.511	8	6.800
9	5.798	9	6.186	9	6.517	9	6.805
1.0210	5.806	1.0260	6.193	1.0310	6.523	1.0360	6.811
1	5.815	1	6.200	1	6.529	1	6.816
2	5.823	2	6.207	2	6.536	2	6.822
3	5.831	3	6.214	3	6.542	3	6.827
4	5.840	4	6.221	4	6.548	4	6.832
5	5.848	5	6.228	5	6.554	5	6.838
6	5.856	6	6.235	6	6.560	6	6.843
7	5.865	7	6.242	7	6.566	7	6.848
8	5.873	8	6.249	8	6.572	8	6.854
9	5.881	9	6.256	9	6.578	9	6.859
1.0220	5.889	1.0270	6.263	1.0320	6.584	1.0370	6.864
1	5.897	1	6.270	1	6.590	1	6.869
2	5.905	2	6.277	2	6.596	2	6.875
3	5.913	3	6.284	3	6.602	3	6.880
4	5.921	4	6.291	4	6.608	4	6.885
5	5.929	5	6.297	5	6.614	5	6.890
6	5.937	6	6.304	6	6.619	6	6.895
7	5.945	7	6.311	7	6.625	7	6.901
8	5.953	8	6.318	8	6.631	8	6.906
9	5.961	9	6.324	9	6.637	9	6.911
1.0230	5.969	1.0280	6.331	1.0330	6.643	1.0380	6.916
1	5.977	1	6.338	1	6.649	1	6.921
2	5.985	2	6.344	2	6.654	2	6.926
3	5.992	3	6.351	3	6.660	3	6.931
4	6.000	4	6.358	4	6.666	4	6.937
5	6.008	5	6.364	5	6.672	5	6.942
6	6.016	6	6.371	6	6.677	6	6.947
7	6.023	7	6.377	7	6.683	7	6.952
8	6.031	8	6.384	8	6.689	8	6.957
9	6.039	9	6.390	9	6.695	9	6.962
1.0240	6.046	1.0290	6.397	1.0340	6.700	1.0390	6.967
1	6.054	1	6.403	1	6.706	1	6.972
2	6.061	2	6.410	2	6.712	2	6.977
3	6.069	3	6.416	3	6.717	3	6.982
4	6.076	4	6.423	4	6.723	4	6.987
5	6.084	5	6.429	5	6.728	5	6.992
6	6.091	6	6.436	6	6.734	6	6.997
7	6.099	7	6.442	7	6.740	7	7.002
8	6.106	8	6.448	8	6.745	8	7.007
9	6.113	9	6.455	9	6.751	9	7.012
1.0250	6.121	1.0300	6.461	1.0350	6.756	1.0400	7.016

Tafel I.

μ^2	arg.	μ^2	arg.	μ^2	arg.	μ^2	arg.
1.0400	7.016	1.0450	7.249	1.0500	7.4572	1.0550	7.6460
1	7.021	1	7.253	1	7.4611	1	7.6496
2	7.026	2	7.257	2	7.4651	2	7.6532
3	7.031	3	7.262	3	7.4690	3	7.6568
4	7.036	4	7.266	4	7.4730	4	7.6603
5	7.041	5	7.270	5	7.4769	5	7.6639
6	7.046	6	7.275	6	7.4808	6	7.6675
7	7.051	7	7.279	7	7.4847	7	7.6710
8	7.055	8	7.283	8	7.4886	8	7.6746
9	7.060	9	7.288	9	7.4925	9	7.6781
1.0410	7.065	1.0460	7.292	1.0510	7.4964	1.0560	7.6816
1	7.070	1	7.296	1	7.5003	1	7.6852
2	7.075	2	7.301	2	7.5042	2	7.6887
3	7.079	3	7.305	3	7.5080	3	7.6922
4	7.084	4	7.309	4	7.5119	4	7.6957
5	7.089	5	7.313	5	7.5158	5	7.6992
6	7.094	6	7.318	6	7.5196	6	7.7027
7	7.098	7	7.322	7	7.5234	7	7.7062
8	7.103	8	7.326	8	7.5273	8	7.7097
9	7.108	9	7.330	9	7.5311	9	7.7132
1.0420	7.112	1.0470	7.335	1.0520	7.5349	1.0570	7.7166
1	7.117	1	7.339	1	7.5387	1	7.7201
2	7.122	2	7.343	2	7.5425	2	7.7236
3	7.126	3	7.347	3	7.5463	3	7.7270
4	7.131	4	7.351	4	7.5501	4	7.7304
5	7.136	5	7.356	5	7.5539	5	7.7339
6	7.140	6	7.360	6	7.5576	6	7.7373
7	7.145	7	7.364	7	7.5614	7	7.7407
8	7.150	8	7.368	8	7.5652	8	7.7442
9	7.154	9	7.372	9	7.5689	9	7.7476
1.0430	7.159	1.0480	7.376	1.0530	7.5727	1.0580	7.7510
1	7.163	1	7.380	1	7.5764	1	7.7544
2	7.168	2	7.384	2	7.5801	2	7.7578
3	7.172	3	7.389	3	7.5838	3	7.7612
4	7.177	4	7.393	4	7.5876	4	7.7645
5	7.182	5	7.397	5	7.5912	5	7.7679
6	7.186	6	7.401	6	7.5950	6	7.7713
7	7.191	7	7.405	7	7.5986	7	7.7746
8	7.195	8	7.409	8	7.6023	8	7.7780
9	7.200	9	7.413	9	7.6060	9	7.7813
1.0440	7.204	1.0490	7.417	1.0540	7.6097	1.0590	7.7847
1	7.209	1	7.421	1	7.6133	1	7.7880
2	7.213	2	7.425	2	7.6170	2	7.7914
3	7.218	3	7.429	3	7.6206	3	7.7947
4	7.222	4	7.433	4	7.6243	4	7.7980
5	7.226	5	7.437	5	7.6279	5	7.8013
6	7.231	6	7.441	6	7.6316	6	7.8046
7	7.235	7	7.445	7	7.6352	7	7.8079
8	7.240	8	7.449	8	7.6388	8	7.8112
9	7.244	9	7.453	9	7.6424	9	7.8145
1.0450	7.249	1.0500	7.457	1.0550	7.6460	1.0600	7.8178

Tafel I.

μ^2	arg.	μ^2	arg.	μ^2	arg.	μ^2	arg.
1.0600	7.8178	1.0650	7.9746	1.0700	8.1184	1.0750	8.2503
1	7.8211	1	7.9776	1	8.1211	1	8.2528
2	7.8243	2	7.9806	2	8.1239	2	8.2553
3	7.8276	3	7.9836	3	8.1266	3	8.2578
4	7.8308	4	7.9866	4	8.1293	4	8.2603
5	7.8341	5	7.9896	5	8.1321	5	8.2629
6	7.8374	6	7.9926	6	8.1348	6	8.2654
7	7.8406	7	7.9955	7	8.1375	7	8.2679
8	7.8438	8	7.9985	8	8.1402	8	8.2704
9	7.8471	9	8.0014	9	8.1429	9	8.2729
1.0610	7.8503	1.0660	8.0044	1.0710	8.1456	1.0760	8.2753
1	7.8535	1	8.0073	1	8.1483	1	8.2778
2	7.8567	2	8.0103	2	8.1510	2	8.2803
3	7.8599	3	8.0132	3	8.1537	3	8.2828
4	7.8631	4	8.0162	4	8.1564	4	8.2852
5	7.8663	5	8.0191	5	8.1591	5	8.2877
6	7.8695	6	8.0220	6	8.1618	6	8.2902
7	7.8727	7	8.0249	7	8.1645	7	8.2926
8	7.8759	8	8.0278	8	8.1671	8	8.2951
9	7.8791	9	8.0307	9	8.1698	9	8.2975
1.0620	7.8822	1.0670	8.0336	1.0720	8.1725	1.0770	8.3000
1	7.8854	1	8.0365	1	8.1751	1	8.3024
2	7.8885	2	8.0394	2	8.1778	2	8.3049
3	7.8917	3	8.0423	3	8.1804	3	8.3073
4	7.8948	4	8.0452	4	8.1831	4	8.3097
5	7.8980	5	8.0481	5	8.1857	5	8.3122
6	7.9011	6	8.0509	6	8.1883	6	8.3146
7	7.9042	7	8.0538	7	8.1910	7	8.3170
8	7.9073	8	8.0566	8	8.1936	8	8.3194
9	7.9105	9	8.0595	9	8.1962	9	8.3218
1.0630	7.9136	1.0680	8.0624	1.0730	8.1988	1.0780	8.3242
1	7.9167	1	8.0652	1	8.2015	1	8.3266
2	7.9198	2	8.0680	2	8.2041	2	8.3290
3	7.9229	3	8.0709	3	8.2067	3	8.3314
4	7.9260	4	8.0737	4	8.2093	4	8.3338
5	7.9290	5	8.0765	5	8.2119	5	8.3362
6	7.9321	6	8.0794	6	8.2145	6	8.3386
7	7.9352	7	8.0822	7	8.2170	7	8.3410
8	7.9383	8	8.0850	8	8.2196	8	8.3433
9	7.9413	9	8.0878	9	8.2222	9	8.3457
1.0640	7.9444	1.0690	8.0906	1.0740	8.2248	1.0790	8.3481
1	7.9474	1	8.0934	1	8.2273	1	8.3504
2	7.9505	2	8.0962	2	8.2299	2	8.3528
3	7.9535	3	8.0990	3	8.2325	3	8.3552
4	7.9566	4	8.1018	4	8.2350	4	8.3575
5	7.9596	5	8.1045	5	8.2376	5	8.3599
6	7.9626	6	8.1073	6	8.2401	6	8.3622
7	7.9656	7	8.1101	7	8.2427	7	8.3645
8	7.9686	8	8.1128	8	8.2452	8	8.3669
9	7.9716	9	8.1156	9	8.2477	9	8.3692
1.0650	7.9746	1.0700	8.1184	1.0750	8.2503	1.0800	8.3715

Tafel I.

μ^2	arg.	μ^2	arg.	μ^2	arg.	μ^2	arg.
1.075	8.2503	1.125	9.0895	1.075	8.83913	1.025	8.66387
1.076	8.2753	1.124	9.0821	1.074	8.83517	1.024	8.66074
1.077	8.3000	1.123	9.0750	1.073	8.83123	1.023	8.65763
1.078	8.3242	1.122	9.0683	1.072	8.82731	1.022	8.65453
1.079	8.3481	1.121	9.0617	1.071	8.82342	1.021	8.65144
1.080	8.3715	1.120	9.0554	1.070	8.81955	1.020	8.64836
1.081	8.3946	1.119	9.0492	1.069	8.81570	1.019	8.64529
1.082	8.4173	1.118	9.0431	1.068	8.81187	1.018	8.64224
1.083	8.4396	1.117	9.0371	1.067	8.80807	1.017	8.63919
1.084	8.4615	1.116	9.0312	1.066	8.80428	1.016	8.63616
1.085	8.4831	1.115	9.0255	1.065	8.80052	1.015	8.63314
1.086	8.5043	1.114	9.0198	1.064	8.79677	1.014	8.63013
1.087	8.5252	1.113	9.0142	1.063	8.79305	1.013	8.62713
1.088	8.5457	1.112	9.0087	1.062	8.78935	1.012	8.62414
1.089	8.5659	1.111	9.0033	1.061	8.78566	1.011	8.62116
1.090	8.5857	1.110	8.9979	1.060	8.78199	1.010	8.61819
1.091	8.6052	1.109	8.9926	1.059	8.77835	1.009	8.61523
1.092	8.6244	1.108	8.9874	1.058	8.77472	1.008	8.61229
1.093	8.6433	1.107	8.9822	1.057	8.77111	1.007	8.60935
1.094	8.6618	1.106	8.9771	1.056	8.76752	1.006	8.60642
1.095	8.6801	1.105	8.9721	1.055	8.76394	1.005	8.60351
1.096	8.6980	1.104	8.9671	1.054	8.76038	1.004	8.60060
1.097	8.7156	1.103	8.9621	1.053	8.75684	1.003	8.59770
1.098	8.7329	1.102	8.9572	1.052	8.75332	1.002	8.59482
1.099	8.7499	1.101	8.9524	1.051	8.74981	1.001	8.59194
1.100	8.7667	1.100	8.9476	1.050	8.74632	1.000	8.58907
1.101	8.7831	1.099	8.9428	1.049	8.74285		
1.102	8.7992	1.098	8.9381	1.048	8.73939		
1.103	8.8150	1.097	8.9334	1.047	8.73595		
1.104	8.8306	1.096	8.9288	1.046	8.73252		
1.105	8.8459	1.095	8.9242	1.045	8.72911		
1.106	8.8608	1.094	8.9196	1.044	8.72572		
1.107	8.8755	1.093	8.9151	1.043	8.72234		
1.108	8.8899	1.092	8.9106	1.042	8.71897		
1.109	8.9041	1.091	8.9062	1.041	8.71562		
1.110	8.9179	1.090	8.9018	1.040	8.71228		
1.111	8.9315	1.089	8.8974	1.039	8.70896		
1.112	8.9448	1.088	8.8930	1.038	8.70565		
1.113	8.9578	1.087	8.8887	1.037	8.70236		
1.114	8.9705	1.086	8.8844	1.036	8.69908		
1.115	8.9830	1.085	8.8802	1.035	8.69581		
1.116	8.9951	1.084	8.8759	1.034	8.69256		
1.117	9.0070	1.083	8.8717	1.033	8.68932		
1.118	9.0185	1.082	8.8676	1.032	8.68609		
1.119	9.0298	1.081	8.8634	1.031	8.68288		
1.120	9.0407	1.080	8.8593	1.030	8.67968		
1.121	9.0513	1.079	8.8552	1.029	8.67649		
1.122	9.0615	1.078	8.8512	1.028	8.67332		
1.123	9.0714	1.077	8.8471	1.027	8.67016		
1.124	9.0808	1.076	8.8431	1.026	8.66701		
1.125	9.0895	1.075	8.8391	1.025	8.66387		

Tafel I a.

β^2	η	β^2	η
0.00	0.666 667	0.50	0.796 318
01	669 168	51	799 027
02	671 673	52	801 742
03	674 181	53	804 462
04	676 692	54	807 188
05	679 206	55	809 920
06	681 724	56	812 659
07	684 245	57	815 403
08	686 769	58	818 154
09	689 297	59	820 911
0.10	0.691 828	0.60	0.823 675
11	694 362	61	826 446
12	696 900	62	829 223
13	699 441	63	832 007
14	701 986	64	834 799
15	704 535	65	837 598
16	707 087	66	840 404
17	709 643	67	843 218
18	712 202	68	846 039
19	714 765	69	848 869
0.20	0.717 332	0.70	0.851 706
21	719 902	71	854 552
22	722 477	72	857 407
23	725 055	73	860 271
24	727 637	74	863 143
25	730 224	75	866 025
26	732 814	76	868 917
27	735 408	77	871 818
28	738 006	78	874 730
29	740 609	79	877 653
0.30	0.743 216	0.80	0.880 586
31	745 826	81	883 531
32	748 442	82	886 487
33	751 061	83	889 456
34	753 685	84	892 437
35	756 314	85	895 432
36	758 947	86	898 441
37	761 584	87	901 464
38	764 226	88	904 504
39	766 873	89	907 559
0.40	0.769 525	0.90	0.910 631
41	772 181	91	913 722
42	774 843	92	916 834
43	777 509	93	919 966
44	780 180	94	923 122
45	782 857	95	926 304
46	785 538	96	929 516
47	788 225	97	932 761
48	790 918	98	936 047
49	793 615	99	939 385
0.50	0.796 318	1.00	0.942 809

Tafel II.

\bar{y}	arg.	\bar{y}	arg.	\bar{y}	arg.	\bar{y}	arg.
1.00000	0.000	1.00050	1.082	1.00100	1.362	1.00150	1.559
1	0.294	1	1.089	1	1.367	1	1.562
2	0.370	2	1.096	2	1.371	2	1.566
3	0.424	3	1.103	3	1.376	3	1.569
4	0.466	4	1.110	4	1.380	4	1.572
5	0.502	5	1.117	5	1.385	5	1.576
6	0.534	6	1.123	6	1.389	6	1.579
7	0.562	7	1.130	7	1.393	7	1.583
8	0.587	8	1.136	8	1.398	8	1.586
9	0.611	9	1.143	9	1.402	9	1.589
1.00010	0.633	1.00060	1.149	1.00110	1.406	1.00160	1.593
1	0.653	1	1.156	1	1.410	1	1.596
2	0.672	2	1.162	2	1.415	2	1.599
3	0.691	3	1.168	3	1.419	3	1.602
4	0.708	4	1.174	4	1.423	4	1.606
5	0.724	5	1.180	5	1.427	5	1.609
6	0.740	6	1.186	6	1.431	6	1.612
7	0.755	7	1.192	7	1.435	7	1.615
8	0.770	8	1.198	8	1.439	8	1.619
9	0.784	9	1.204	9	1.443	9	1.622
1.00020	0.797	1.00070	1.210	1.00120	1.447	1.00170	1.625
1	0.810	1	1.216	1	1.451	1	1.628
2	0.823	2	1.221	2	1.455	2	1.631
3	0.835	3	1.227	3	1.459	3	1.634
4	0.847	4	1.232	4	1.463	4	1.638
5	0.859	5	1.238	5	1.467	5	1.641
6	0.870	6	1.243	6	1.471	6	1.644
7	0.881	7	1.249	7	1.475	7	1.647
8	0.892	8	1.254	8	1.479	8	1.650
9	0.902	9	1.260	9	1.483	9	1.653
1.00030	0.912	1.00080	1.265	1.00130	1.486	1.00180	1.656
1	0.922	1	1.270	1	1.490	1	1.659
2	0.932	2	1.275	2	1.494	2	1.662
3	0.942	3	1.280	3	1.498	3	1.665
4	0.951	4	1.286	4	1.501	4	1.668
5	0.960	5	1.291	5	1.505	5	1.671
6	0.970	6	1.296	6	1.509	6	1.674
7	0.978	7	1.301	7	1.513	7	1.677
8	0.987	8	1.306	8	1.516	8	1.680
9	0.996	9	1.311	9	1.520	9	1.683
1.00040	1.004	1.00090	1.315	1.00140	1.523	1.00190	1.686
1	1.013	1	1.320	1	1.527	1	1.689
2	1.021	2	1.325	2	1.531	2	1.692
3	1.029	3	1.330	3	1.534	3	1.695
4	1.037	4	1.335	4	1.538	4	1.698
5	1.044	5	1.339	5	1.541	5	1.701
6	1.052	6	1.344	6	1.545	6	1.704
7	1.060	7	1.349	7	1.548	7	1.706
8	1.067	8	1.353	8	1.552	8	1.709
9	1.074	9	1.358	9	1.555	9	1.712
1.00050	1.082	1.00100	1.362	1.00150	1.559	1.00200	1.715

Tafel II.

\bar{y}	arg.	\bar{y}	arg.	\bar{y}	arg.	\bar{y}	arg.
1.0000	0.0	1.0050	2.322	1.0100	2.913	1.0150	3.321
1	0.6	1	2.337	1	2.923	1	3.328
2	0.8	2	2.352	2	2.932	2	3.335
3	0.9	3	2.367	3	2.941	3	3.343
4	1.0	4	2.381	4	2.951	4	3.350
5	1.1	5	2.396	5	2.960	5	3.356
6	1.1	6	2.410	6	2.969	6	3.363
7	1.2	7	2.424	7	2.978	7	3.370
8	1.3	8	2.438	8	2.987	8	3.377
9	1.3	9	2.452	9	2.996	9	3.384
1.0010	1.4	1.0060	2.465	1.0110	3.005	1.0160	3.391
1	1.4	1	2.479	1	3.014	1	3.398
2	1.4	2	2.492	2	3.022	2	3.404
3	1.5	3	2.505	3	3.031	3	3.411
4	1.5	4	2.518	4	3.040	4	3.418
5	1.6	5	2.531	5	3.048	5	3.424
6	1.6	6	2.544	6	3.057	6	3.431
7	1.6	7	2.556	7	3.066	7	3.438
8	1.7	8	2.569	8	3.074	8	3.444
9	1.7	9	2.581	9	3.082	9	3.451
1.0020	1.715	1.0070	2.593	1.0120	3.091	1.0170	3.457
1	1.743	1	2.605	1	3.099	1	3.464
2	1.770	2	2.617	2	3.107	2	3.470
3	1.796	3	2.629	3	3.116	3	3.477
4	1.822	4	2.641	4	3.124	4	3.483
5	1.847	5	2.652	5	3.132	5	3.489
6	1.871	6	2.664	6	3.140	6	3.496
7	1.894	7	2.675	7	3.148	7	3.502
8	1.917	8	2.687	8	3.156	8	3.508
9	1.940	9	2.698	9	3.164	9	3.515
1.0030	1.962	1.0080	2.709	1.0130	3.172	1.0180	3.521
1	1.983	1	2.720	1	3.180	1	3.527
2	2.004	2	2.731	2	3.187	2	3.533
3	2.024	3	2.742	3	3.195	3	3.539
4	2.044	4	2.752	4	3.203	4	3.546
5	2.064	5	2.763	5	3.211	5	3.552
6	2.083	6	2.774	6	3.218	6	3.558
7	2.102	7	2.784	7	3.226	7	3.564
8	2.121	8	2.794	8	3.233	8	3.570
9	2.139	9	2.805	9	3.241	9	3.576
1.0040	2.157	1.0090	2.815	1.0140	3.248	1.0190	3.582
1	2.175	1	2.825	1	3.256	1	3.588
2	2.192	2	2.835	2	3.263	2	3.594
3	2.209	3	2.845	3	3.271	3	3.600
4	2.226	4	2.855	4	3.278	4	3.606
5	2.243	5	2.865	5	3.285	5	3.612
6	2.259	6	2.875	6	3.293	6	3.618
7	2.275	7	2.885	7	3.300	7	3.623
8	2.291	8	2.894	8	3.307	8	3.629
9	2.306	9	2.904	9	3.314	9	3.635
1.0050	2.322	1.0100	2.913	1.0150	3.321	1.0200	3.641

Tafel II.

\bar{y}	arg.	\bar{y}	arg.	\bar{y}	arg.	\bar{y}	arg.
1.0200	3.641	1.0250	3.906	1.0300	4.1347	1.0350	4.3357
1	3.647	1	3.911	1	4.1390	1	4.3395
2	3.652	2	3.916	2	4.1433	2	4.3433
3	3.658	3	3.921	3	4.1475	3	4.3470
4	3.664	4	3.926	4	4.1517	4	4.3508
5	3.669	5	3.931	5	4.1559	5	4.3546
6	3.675	6	3.936	6	4.1602	6	4.3583
7	3.681	7	3.940	7	4.1644	7	4.3620
8	3.686	8	3.945	8	4.1685	8	4.3658
9	3.692	9	3.950	9	4.1727	9	4.3695
1.0210	3.698	1.0260	3.955	1.0310	4.1769	1.0360	4.3732
1	3.703	1	3.959	1	4.1810	1	4.3769
2	3.709	2	3.964	2	4.1852	2	4.3806
3	3.714	3	3.969	3	4.1893	3	4.3843
4	3.720	4	3.974	4	4.1935	4	4.3880
5	3.725	5	3.978	5	4.1976	5	4.3916
6	3.731	6	3.983	6	4.2017	6	4.3953
7	3.736	7	3.988	7	4.2058	7	4.3990
8	3.742	8	3.992	8	4.2099	8	4.4026
9	3.747	9	3.997	9	4.2139	9	4.4063
1.0220	3.752	1.0270	4.002	1.0320	4.2180	1.0370	4.4099
1	3.758	1	4.006	1	4.2221	1	4.4135
2	3.763	2	4.011	2	4.2261	2	4.4171
3	3.768	3	4.015	3	4.2302	3	4.4207
4	3.774	4	4.020	4	4.2342	4	4.4243
5	3.779	5	4.024	5	4.2382	5	4.4279
6	3.784	6	4.029	6	4.2422	6	4.4315
7	3.790	7	4.034	7	4.2462	7	4.4351
8	3.795	8	4.038	8	4.2502	8	4.4387
9	3.800	9	4.043	9	4.2542	9	4.4422
1.0230	3.805	1.0280	4.047	1.0330	4.2582	1.0380	4.4458
1	3.811	1	4.052	1	4.2621	1	4.4494
2	3.816	2	4.056	2	4.2661	2	4.4529
3	3.821	3	4.061	3	4.2700	3	4.4564
4	3.826	4	4.065	4	4.2740	4	4.4600
5	3.831	5	4.069	5	4.2779	5	4.4635
6	3.836	6	4.074	6	4.2818	6	4.4670
7	3.841	7	4.078	7	4.2857	7	4.4705
8	3.847	8	4.083	8	4.2896	8	4.4740
9	3.852	9	4.087	9	4.2935	9	4.4775
1.0240	3.857	1.0290	4.092	1.0340	4.2974	1.0390	4.4810
1	3.862	1	4.096	1	4.3012	1	4.4845
2	3.867	2	4.100	2	4.3051	2	4.4879
3	3.872	3	4.105	3	4.3090	3	4.4914
4	3.877	4	4.109	4	4.3128	4	4.4949
5	3.882	5	4.113	5	4.3167	5	4.4983
6	3.887	6	4.118	6	4.3205	6	4.5018
7	3.892	7	4.122	7	4.3243	7	4.5052
8	3.897	8	4.126	8	4.3281	8	4.5086
9	3.901	9	4.130	9	4.3319	9	4.5120
1.0250	3.906	1.0300	4.135	1.0350	4.3357	1.0400	4.5155

Tafel II.

\bar{y}	arg.	\bar{y}	arg.	\bar{y}	arg.	\bar{y}	arg.
1.0400	4.5155	1.0450	4.6782	1.0500	4.8270	1.0550	4.9640
1	4.5189	1	4.6813	1	4.8298	1	4.9666
2	4.5223	2	4.6844	2	4.8327	2	4.9692
3	4.5257	3	4.6875	3	4.8355	3	4.9718
4	4.5291	4	4.6906	4	4.8383	4	4.9745
5	4.5324	5	4.6937	5	4.8412	5	4.9771
6	4.5358	6	4.6968	6	4.8440	6	4.9797
7	4.5392	7	4.6998	7	4.8468	7	4.9823
8	4.5426	8	4.7029	8	4.8496	8	4.9849
9	4.5459	9	4.7059	9	4.8524	9	4.9875
1.0410	4.5493	1.0460	4.7090	1.0510	4.8552	1.0560	4.9901
1	4.5526	1	4.7121	1	4.8580	1	4.9927
2	4.5559	2	4.7151	2	4.8608	2	4.9953
3	4.5593	3	4.7181	3	4.8636	3	4.9979
4	4.5626	4	4.7212	4	4.8664	4	5.0004
5	4.5659	5	4.7242	5	4.8692	5	5.0030
6	4.5692	6	4.7272	6	4.8720	6	5.0056
7	4.5725	7	4.7302	7	4.8748	7	5.0082
8	4.5758	8	4.7332	8	4.8775	8	5.0107
9	4.5791	9	4.7363	9	4.8803	9	5.0133
1.0420	4.5824	1.0470	4.7393	1.0520	4.8831	1.0570	5.0158
1	4.5857	1	4.7422	1	4.8858	1	5.0184
2	4.5890	2	4.7452	2	4.8886	2	5.0210
3	4.5922	3	4.7482	3	4.8913	3	5.0235
4	4.5955	4	4.7512	4	4.8941	4	5.0260
5	4.5988	5	4.7542	5	4.8968	5	5.0286
6	4.6020	6	4.7572	6	4.8995	6	5.0311
7	4.6052	7	4.7601	7	4.9023	7	5.0337
8	4.6085	8	4.7631	8	4.9050	8	5.0362
9	4.6117	9	4.7660	9	4.9077	9	5.0387
1.0430	4.6149	1.0480	4.7690	1.0530	4.9104	1.0580	5.0412
1	4.6182	1	4.7719	1	4.9132	1	5.0437
2	4.6214	2	4.7749	2	4.9159	2	5.0463
3	4.6246	3	4.7778	3	4.9186	3	5.0488
4	4.6278	4	4.7807	4	4.9213	4	5.0513
5	4.6310	5	4.7837	5	4.9240	5	5.0538
6	4.6342	6	4.7866	6	4.9267	6	5.0563
7	4.6374	7	4.7895	7	4.9294	7	5.0588
8	4.6405	8	4.7924	8	4.9320	8	5.0613
9	4.6437	9	4.7953	9	4.9347	9	5.0638
1.0440	4.6469	1.0490	4.7982	1.0540	4.9374	1.0590	5.0662
1	4.6500	1	4.8011	1	4.9401	1	5.0687
2	4.6532	2	4.8040	2	4.9427	2	5.0712
3	4.6563	3	4.8069	3	4.9454	3	5.0737
4	4.6595	4	4.8098	4	4.9481	4	5.0761
5	4.6626	5	4.8126	5	4.9507	5	5.0786
6	4.6657	6	4.8155	6	4.9534	6	5.0811
7	4.6689	7	4.8184	7	4.9560	7	5.0835
8	4.6720	8	4.8213	8	4.9587	8	5.0860
9	4.6751	9	4.8241	9	4.9613	9	5.0884
1.0450	4.6782	1.0500	4.8270	1.0550	4.9640	1.0600	5.0909

Tafel II.

\bar{y}	arg.	\bar{y}	arg.	\bar{y}	arg.	\bar{y}	arg.
1.050	4.8270	1.100	5.8640	1.150	6.4912	1.200	6.9261
1	4.8552	1	5.8794	1	6.5014	1	6.9334
2	4.8831	2	5.8946	2	6.5115	2	6.9408
3	4.9104	3	5.9097	3	6.5216	3	6.9481
4	4.9374	4	5.9247	4	6.5316	4	6.9553
5	4.9640	5	5.9393	5	6.5415	5	6.9625
6	4.9901	6	5.9542	6	6.5514	6	6.9697
7	5.0158	7	5.9687	7	6.5611	7	6.9768
8	5.0412	8	5.9831	8	6.5708	8	6.9839
9	5.0662	9	5.9974	9	6.5805	9	6.9909
1.060	5.0909	1.110	6.0115	1.160	6.5901	1.210	6.9979
1	5.1152	1	6.0256	1	6.5996	1	7.0049
2	5.1392	2	6.0395	2	6.6090	2	7.0118
3	5.1628	3	6.0533	3	6.6184	3	7.0187
4	5.1861	4	6.0669	4	6.6277	4	7.0256
5	5.2091	5	6.0805	5	6.6370	5	7.0324
6	5.2318	6	6.0939	6	6.6462	6	7.0391
7	5.2542	7	6.1072	7	6.6553	7	7.0458
8	5.2764	8	6.1204	8	6.6644	8	7.0525
9	5.2982	9	6.1335	9	6.6734	9	7.0592
1.070	5.3198	1.120	6.1464	1.170	6.6824	1.220	7.0658
1	5.3411	1	6.1593	1	6.6912	1	7.0724
2	5.3621	2	6.1721	2	6.7001	2	7.0789
3	5.3829	3	6.1847	3	6.7089	3	7.0854
4	5.4034	4	6.1973	4	6.7176	4	7.0919
5	5.4237	5	6.2097	5	6.7262	5	7.0983
6	5.4437	6	6.2220	6	6.7349	6	7.1047
7	5.4635	7	6.2343	7	6.7434	7	7.1111
8	5.4831	8	6.2464	8	6.7519	8	7.1174
9	5.5024	9	6.2585	9	6.7604	9	7.1237
1.080	5.5215	1.130	6.2704	1.180	6.7687	1.230	7.1300
1	5.5405	1	6.2823	1	6.7771	1	7.1362
2	5.5592	2	6.2941	2	6.7854	2	7.1424
3	5.5777	3	6.3057	3	6.7936	3	7.1486
4	5.5959	4	6.3173	4	6.8018	4	7.1547
5	5.6140	5	6.3288	5	6.8099	5	7.1608
6	5.6319	6	6.3402	6	6.8180	6	7.1669
7	5.6497	7	6.3515	7	6.8260	7	7.1729
8	5.6672	8	6.3628	8	6.8340	8	7.1789
9	5.6845	9	6.3739	9	6.8419	9	7.1849
1.090	5.7017	1.140	6.3850	1.190	6.8498	1.240	7.1908
1	5.7187	1	6.3960	1	6.8576	1	7.1967
2	5.7355	2	6.4069	2	6.8654	2	7.2026
3	5.7521	3	6.4177	3	6.8732	3	7.2085
4	5.7686	4	6.4284	4	6.8809	4	7.2143
5	5.7849	5	6.4391	5	6.8885	5	7.2201
6	5.8010	6	6.4497	6	6.8961	6	7.2258
7	5.8170	7	6.4602	7	6.9037	7	7.2315
8	5.8328	8	6.4706	8	6.9112	8	7.2372
9	5.8485	9	6.4809	9	6.9186	9	7.2429
1.100	5.8640	1.150	6.4912	1.200	6.9261	1.250	7.2485

Tafel III.

<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.
0.000000	0.0000	0.000050	0.4388	0.000100	0.5528	0.000150	0.6328
1	0.1191	1	0.4417	1	0.5547	1	0.6342
2	0.1501	2	0.4446	2	0.5565	2	0.6356
3	0.1718	3	0.4474	3	0.5583	3	0.6370
4	0.1891	4	0.4502	4	0.5601	4	0.6384
5	0.2037	5	0.4530	5	0.5619	5	0.6398
6	0.2164	6	0.4557	6	0.5637	6	0.6412
7	0.2278	7	0.4584	7	0.5654	7	0.6425
8	0.2382	8	0.4610	8	0.5672	8	0.6439
9	0.2478	9	0.4637	9	0.5689	9	0.6452
0.000010	0.2566	0.000060	0.4663	0.000110	0.5707	0.000160	0.6466
1	0.2649	1	0.4689	1	0.5724	1	0.6479
2	0.2727	2	0.4714	2	0.5741	2	0.6493
3	0.2801	3	0.4739	3	0.5758	3	0.6506
4	0.2871	4	0.4764	4	0.5775	4	0.6519
5	0.2937	5	0.4789	5	0.5792	5	0.6533
6	0.3001	6	0.4813	6	0.5809	6	0.6546
7	0.3063	7	0.4838	7	0.5825	7	0.6559
8	0.3121	8	0.4861	8	0.5842	8	0.6572
9	0.3178	9	0.4885	9	0.5858	9	0.6585
0.000020	0.3233	0.000070	0.4909	0.000120	0.5875	0.000170	0.6598
1	0.3286	1	0.4932	1	0.5891	1	0.6611
2	0.3337	2	0.4955	2	0.5907	2	0.6624
3	0.3387	3	0.4978	3	0.5923	3	0.6636
4	0.3436	4	0.5000	4	0.5939	4	0.6649
5	0.3483	5	0.5023	5	0.5955	5	0.6662
6	0.3529	6	0.5045	6	0.5971	6	0.6675
7	0.3573	7	0.5067	7	0.5987	7	0.6687
8	0.3617	8	0.5089	8	0.6002	8	0.6700
9	0.3659	9	0.5111	9	0.6018	9	0.6712
0.000030	0.3701	0.000080	0.5132	0.000130	0.6034	0.000180	0.6725
1	0.3742	1	0.5153	1	0.6049	1	0.6737
2	0.3781	2	0.5174	2	0.6064	2	0.6750
3	0.3820	3	0.5195	3	0.6080	3	0.6762
4	0.3859	4	0.5216	4	0.6095	4	0.6774
5	0.3896	5	0.5237	5	0.6110	5	0.6786
6	0.3933	6	0.5257	6	0.6125	6	0.6799
7	0.3969	7	0.5278	7	0.6140	7	0.6811
8	0.4004	8	0.5298	8	0.6155	8	0.6823
9	0.4039	9	0.5318	9	0.6170	9	0.6835
0.000040	0.4073	0.000090	0.5338	0.000140	0.6184	0.000190	0.6847
1	0.4107	1	0.5357	1	0.6199	1	0.6859
2	0.4140	2	0.5377	2	0.6214	2	0.6871
3	0.4173	3	0.5396	3	0.6228	3	0.6883
4	0.4205	4	0.5415	4	0.6243	4	0.6895
5	0.4236	5	0.5435	5	0.6257	5	0.6907
6	0.4268	6	0.5454	6	0.6272	6	0.6918
7	0.4298	7	0.5472	7	0.6286	7	0.6930
8	0.4329	8	0.5491	8	0.6300	8	0.6942
9	0.4358	9	0.5510	9	0.6314	9	0.6953
0.000050	0.4388	0.000100	0.5528	0.000150	0.6328	0.000200	0.6965

Tafel III.

<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.
0.00000	0.00	0.00050	0.9452	0.00100	1.19080	0.00150	1.36298
1	0.26	1	0.9515	1	1.19475	1	1.36599
2	0.32	2	0.9577	2	1.19868	2	1.36900
3	0.37	3	0.9638	3	1.20258	3	1.37199
4	0.41	4	0.9698	4	1.20646	4	1.37497
5	0.44	5	0.9757	5	1.21031	5	1.37794
6	0.47	6	0.9816	6	1.21414	6	1.38089
7	0.49	7	0.9874	7	1.21794	7	1.38383
8	0.51	8	0.9932	8	1.22172	8	1.38676
9	0.53	9	0.9988	9	1.22548	9	1.38968
0.00010	0.55	0.00060	1.0044	0.00110	1.22921	0.00160	1.39258
1	0.57	1	1.0100	1	1.23292	1	1.39548
2	0.59	2	1.0155	2	1.23661	2	1.39836
3	0.60	3	1.0209	3	1.24028	3	1.40122
4	0.62	4	1.0263	4	1.24392	4	1.40408
5	0.63	5	1.0316	5	1.24755	5	1.40693
6	0.65	6	1.0369	6	1.25115	6	1.40976
7	0.66	7	1.0421	7	1.25473	7	1.41258
8	0.67	8	1.0472	8	1.25829	8	1.41539
9	0.68	9	1.0523	9	1.26184	9	1.41819
0.00020	0.6965	0.00070	1.0574	0.00120	1.26536	0.00170	1.42098
1	0.7079	1	1.0624	1	1.26886	1	1.42376
2	0.7190	2	1.0674	2	1.27234	2	1.42652
3	0.7297	3	1.0723	3	1.27581	3	1.42928
4	0.7401	4	1.0771	4	1.27925	4	1.43203
5	0.7503	5	1.0820	5	1.28268	5	1.43476
6	0.7602	6	1.0868	6	1.28609	6	1.43749
7	0.7698	7	1.0915	7	1.28948	7	1.44020
8	0.7792	8	1.0962	8	1.29285	8	1.44290
9	0.7883	9	1.1009	9	1.29621	9	1.44560
0.00030	0.7973	0.00080	1.1055	0.00130	1.29954	0.00180	1.44828
1	0.8060	1	1.1101	1	1.30287	1	1.45095
2	0.8146	2	1.1146	2	1.30617	2	1.45362
3	0.8230	3	1.1191	3	1.30946	3	1.45627
4	0.8312	4	1.1236	4	1.31273	4	1.45892
5	0.8393	5	1.1280	5	1.31598	5	1.46155
6	0.8472	6	1.1324	6	1.31922	6	1.46418
7	0.8550	7	1.1368	7	1.32244	7	1.46679
8	0.8626	8	1.1412	8	1.32565	8	1.46940
9	0.8701	9	1.1455	9	1.32884	9	1.47200
0.00040	0.8775	0.00090	1.1497	0.00140	1.33202	0.00190	1.47459
1	0.8848	1	1.1540	1	1.33518	1	1.47717
2	0.8919	2	1.1582	2	1.33832	2	1.47974
3	0.8989	3	1.1624	3	1.34146	3	1.48230
4	0.9058	4	1.1665	4	1.34457	4	1.48485
5	0.9126	5	1.1706	5	1.34767	5	1.48739
6	0.9193	6	1.1747	6	1.35076	6	1.48993
7	0.9260	7	1.1788	7	1.35384	7	1.49245
8	0.9325	8	1.1828	8	1.35690	8	1.49497
9	0.9389	9	1.1868	9	1.35994	9	1.49748
0.00050	0.9452	0.00100	1.1908	0.00150	1.36298	0.00200	1.49998

Tafel III.

<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.
0.00200	1.49998	0.00250	1.61563	0.00300	1.71667	0.00350	1.80698
1	1.50247	1	1.61777	1	1.71857	1	1.80870
2	1.50496	2	1.61992	2	1.72047	2	1.81041
3	1.50743	3	1.62205	3	1.72236	3	1.81212
4	1.50990	4	1.62418	4	1.72425	4	1.81382
5	1.51236	5	1.62631	5	1.72613	5	1.81553
6	1.51481	6	1.62843	6	1.72801	6	1.81722
7	1.51726	7	1.63054	7	1.72989	7	1.81892
8	1.51969	8	1.63265	8	1.73176	8	1.82061
9	1.52212	9	1.63475	9	1.73363	9	1.82230
0.00210	1.52454	0.00260	1.63685	0.00310	1.73550	0.00360	1.82399
1	1.52695	1	1.63894	1	1.73736	1	1.82567
2	1.52936	2	1.64103	2	1.73921	2	1.82735
3	1.53176	3	1.64311	3	1.74106	3	1.82903
4	1.53415	4	1.64519	4	1.74291	4	1.83070
5	1.53653	5	1.64726	5	1.74476	5	1.83237
6	1.53890	6	1.64932	6	1.74660	6	1.83404
7	1.54127	7	1.65138	7	1.74843	7	1.83571
8	1.54363	8	1.65344	8	1.75027	8	1.83737
9	1.54599	9	1.65549	9	1.75210	9	1.83903
0.00220	1.54833	0.00270	1.65754	0.00320	1.75392	0.00370	1.84068
1	1.55067	1	1.65958	1	1.75574	1	1.84234
2	1.55300	2	1.66161	2	1.75756	2	1.84399
3	1.55533	3	1.66364	3	1.75937	3	1.84563
4	1.55765	4	1.66567	4	1.76118	4	1.84728
5	1.55996	5	1.66769	5	1.76299	5	1.84892
6	1.56226	6	1.66970	6	1.76479	6	1.85055
7	1.56456	7	1.67171	7	1.76659	7	1.85219
8	1.56685	8	1.67372	8	1.76839	8	1.85382
9	1.56913	9	1.67572	9	1.77018	9	1.85545
0.00230	1.57141	0.00280	1.67771	0.00330	1.77196	0.00380	1.85708
1	1.57368	1	1.67971	1	1.77375	1	1.85870
2	1.57594	2	1.68169	2	1.77553	2	1.86032
3	1.57820	3	1.68367	3	1.77731	3	1.86194
4	1.58045	4	1.68565	4	1.77908	4	1.86355
5	1.58270	5	1.68762	5	1.78085	5	1.86517
6	1.58494	6	1.68959	6	1.78262	6	1.86678
7	1.58717	7	1.69155	7	1.78438	7	1.86838
8	1.58939	8	1.69351	8	1.78614	8	1.86999
9	1.59161	9	1.69547	9	1.78789	9	1.87159
0.00240	1.59383	0.00290	1.69742	0.00340	1.78965	0.00390	1.87318
1	1.59603	1	1.69936	1	1.79139	1	1.87478
2	1.59823	2	1.70130	2	1.79314	2	1.87637
3	1.60043	3	1.70324	3	1.79488	3	1.87796
4	1.60262	4	1.70517	4	1.79662	4	1.87955
5	1.60480	5	1.70710	5	1.79836	5	1.88113
6	1.60698	6	1.70902	6	1.80009	6	1.88272
7	1.60915	7	1.71094	7	1.80182	7	1.88430
8	1.61131	8	1.71285	8	1.80354	8	1.88587
9	1.61347	9	1.71476	9	1.80526	9	1.88745
0.00250	1.61563	0.00300	1.71667	0.00350	1.80698	0.00400	1.88902

Tafel III.

<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.
0.00400	1.88902	0.00450	1.96444	0.00500	2.03443	0.00550	2.09987
1	1.89059	1	1.96589	1	2.03578	1	2.10114
2	1.89215	2	1.96734	2	2.03713	2	2.10240
3	1.89372	3	1.96878	3	2.03848	3	2.10366
4	1.89528	4	1.97023	4	2.03982	4	2.10493
5	1.89684	5	1.97167	5	2.04117	5	2.10619
6	1.89839	6	1.97311	6	2.04251	6	2.10745
7	1.89994	7	1.97454	7	2.04385	7	2.10871
8	1.90149	8	1.97598	8	2.04519	8	2.10996
9	1.90304	9	1.97741	9	2.04652	9	2.11122
0.00410	1.90459	0.00460	1.97884	0.00510	2.04786	0.00560	2.11247
1	1.90613	1	1.98027	1	2.04919	1	2.11372
2	1.90767	2	1.98170	2	2.05052	2	2.11497
3	1.90921	3	1.98312	3	2.05185	3	2.11622
4	1.91074	4	1.98454	4	2.05318	4	2.11747
5	1.91228	5	1.98596	5	2.05451	5	2.11872
6	1.91381	6	1.98738	6	2.05583	6	2.11996
7	1.91534	7	1.98880	7	2.05715	7	2.12120
8	1.91686	8	1.99021	8	2.05847	8	2.12244
9	1.91838	9	1.99162	9	2.05979	9	2.12369
0.00420	1.91991	0.00470	1.99303	0.00520	2.06111	0.00570	2.12492
1	1.92142	1	1.99444	1	2.06243	1	2.12616
2	1.92294	2	1.99585	2	2.06374	2	2.12740
3	1.92445	3	1.99725	3	2.06505	3	2.12863
4	1.92596	4	1.99865	4	2.06636	4	2.12986
5	1.92747	5	2.00005	5	2.06767	5	2.13110
6	1.92898	6	2.00145	6	2.06898	6	2.13233
7	1.93048	7	2.00285	7	2.07029	7	2.13355
8	1.93198	8	2.00424	8	2.07159	8	2.13478
9	1.93348	9	2.00563	9	2.07289	9	2.13601
0.00430	1.93498	0.00480	2.00702	0.00530	2.07419	0.00580	2.13723
1	1.93648	1	2.00841	1	2.07549	1	2.13845
2	1.93797	2	2.00980	2	2.07679	2	2.13967
3	1.93946	3	2.01118	3	2.07808	3	2.14090
4	1.94094	4	2.01257	4	2.07938	4	2.14211
5	1.94243	5	2.01395	5	2.08067	5	2.14333
6	1.94391	6	2.01532	6	2.08196	6	2.14455
7	1.94539	7	2.01670	7	2.08325	7	2.14576
8	1.94687	8	2.01808	8	2.08454	8	2.14697
9	1.94835	9	2.01945	9	2.08583	9	2.14819
0.00440	1.94982	0.00490	2.02082	0.00540	2.08711	0.00590	2.14940
1	1.95129	1	2.02219	1	2.08839	1	2.15060
2	1.95276	2	2.02356	2	2.08967	2	2.15181
3	1.95423	3	2.02492	3	2.09095	3	2.15302
4	1.95570	4	2.02629	4	2.09223	4	2.15422
5	1.95716	5	2.02765	5	2.09351	5	2.15543
6	1.95862	6	2.02901	6	2.09478	6	2.15663
7	1.96008	7	2.03037	7	2.09606	7	2.15783
8	1.96153	8	2.03172	8	2.09733	8	2.15903
9	1.96299	9	2.03308	9	2.09860	9	2.16023
0.00450	1.96444	0.00500	2.03443	0.00550	2.09987	0.00600	2.16142

Tafel III.

<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.
0.00600	2.16142	0.00650	2.21962	0.00700	2.27488	0.00750	2.32754
1	2.16262	1	2.22075	1	2.27596	1	2.32857
2	2.16381	2	2.22189	2	2.27704	2	2.32960
3	2.16501	3	2.22302	3	2.27811	3	2.33063
4	2.16620	4	2.22414	4	2.27919	4	2.33165
5	2.16739	5	2.22527	5	2.28026	5	2.33268
6	2.16858	6	2.22640	6	2.28133	6	2.33370
7	2.16976	7	2.22753	7	2.28240	7	2.33473
8	2.17095	8	2.22865	8	2.28347	8	2.33575
9	2.17213	9	2.22977	9	2.28454	9	2.33677
0.00610	2.17332	0.00660	2.23090	0.00710	2.28561	0.00760	2.33779
1	2.17450	1	2.23202	1	2.28668	1	2.33881
2	2.17568	2	2.23314	2	2.28775	2	2.33983
3	2.17686	3	2.23426	3	2.28881	3	2.34085
4	2.17804	4	2.23537	4	2.28988	4	2.34186
5	2.17921	5	2.23649	5	2.29094	5	2.34288
6	2.18039	6	2.23761	6	2.29200	6	2.34390
7	2.18156	7	2.23872	7	2.29306	7	2.34491
8	2.18274	8	2.23983	8	2.29412	8	2.34592
9	2.18391	9	2.24095	9	2.29518	9	2.34694
0.00620	2.18508	0.00670	2.24206	0.00720	2.29624	0.00770	2.34795
1	2.18625	1	2.24317	1	2.29730	1	2.34896
2	2.18742	2	2.24428	2	2.29836	2	2.34997
3	2.18858	3	2.24538	3	2.29941	3	2.35098
4	2.18975	4	2.24649	4	2.30047	4	2.35199
5	2.19091	5	2.24760	5	2.30152	5	2.35299
6	2.19208	6	2.24870	6	2.30257	6	2.35400
7	2.19324	7	2.24980	7	2.30362	7	2.35501
8	2.19440	8	2.25091	8	2.30467	8	2.35601
9	2.19556	9	2.25201	9	2.30572	9	2.35701
0.00630	2.19672	0.00680	2.25311	0.00730	2.30677	0.00780	2.35802
1	2.19787	1	2.25421	1	2.30782	1	2.35902
2	2.19903	2	2.25530	2	2.30887	2	2.36002
3	2.20018	3	2.25640	3	2.30991	3	2.36102
4	2.20134	4	2.25750	4	2.31096	4	2.36202
5	2.20249	5	2.25859	5	2.31200	5	2.36302
6	2.20364	6	2.25968	6	2.31304	6	2.36402
7	2.20479	7	2.26078	7	2.31409	7	2.36501
8	2.20594	8	2.26187	8	2.31513	8	2.36601
9	2.20708	9	2.26296	9	2.31617	9	2.36700
0.00640	2.20823	0.00690	2.26405	0.00740	2.31721	0.00790	2.36800
1	2.20937	1	2.26513	1	2.31824	1	2.36899
2	2.21052	2	2.26622	2	2.31928	2	2.36998
3	2.21166	3	2.26731	3	2.32032	3	2.37098
4	2.21280	4	2.26839	4	2.32135	4	2.37197
5	2.21394	5	2.26948	5	2.32239	5	2.37296
6	2.21508	6	2.27056	6	2.32342	6	2.37395
7	2.21622	7	2.27164	7	2.32445	7	2.37493
8	2.21735	8	2.27272	8	2.32548	8	2.37592
9	2.21849	9	2.27380	9	2.32652	9	2.37691
0.00650	2.21962	0.00700	2.27488	0.00750	2.32754	0.00800	2.37789

Tafel III.

<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.
0.00800	2.37789	0.00850	2.42617	0.00900	2.47256	0.00950	2.51724
1	2.37888	1	2.42711	1	2.47347	1	2.51812
2	2.37986	2	2.42806	2	2.47438	2	2.51900
3	2.38085	3	2.42900	3	2.47529	3	2.51987
4	2.38183	4	2.42994	4	2.47619	4	2.52075
5	2.38281	5	2.43089	5	2.47710	5	2.52162
6	2.38379	6	2.43183	6	2.47801	6	2.52250
7	2.38477	7	2.43277	7	2.47891	7	2.52337
8	2.38575	8	2.43371	8	2.47982	8	2.52424
9	2.38673	9	2.43465	9	2.48072	9	2.52512
0.00810	2.38771	0.00860	2.43559	0.00910	2.48163	0.00960	2.52599
1	2.38868	1	2.43653	1	2.48253	1	2.52686
2	2.38966	2	2.43746	2	2.48343	2	2.52773
3	2.39064	3	2.43840	3	2.48434	3	2.52860
4	2.39161	4	2.43934	4	2.48524	4	2.52947
5	2.39258	5	2.44027	5	2.48614	5	2.53034
6	2.39356	6	2.44121	6	2.48704	6	2.53121
7	2.39453	7	2.44214	7	2.48794	7	2.53207
8	2.39550	8	2.44307	8	2.48883	8	2.53294
9	2.39647	9	2.44401	9	2.48973	9	2.53381
0.00820	2.39744	0.00870	2.44494	0.00920	2.49063	0.00970	2.53467
1	2.39841	1	2.44587	1	2.49153	1	2.53554
2	2.39938	2	2.44680	2	2.49242	2	2.53640
3	2.40034	3	2.44773	3	2.49332	3	2.53727
4	2.40131	4	2.44866	4	2.49421	4	2.53813
5	2.40228	5	2.44959	5	2.49511	5	2.53899
6	2.40324	6	2.45051	6	2.49600	6	2.53985
7	2.40421	7	2.45144	7	2.49689	7	2.54072
8	2.40517	8	2.45237	8	2.49778	8	2.54158
9	2.40613	9	2.45329	9	2.49867	9	2.54244
0.00830	2.40709	0.00880	2.45422	0.00930	2.49956	0.00980	2.54330
1	2.40805	1	2.45514	1	2.50045	1	2.54416
2	2.40901	2	2.45606	2	2.50134	2	2.54501
3	2.40997	3	2.45698	3	2.50223	3	2.54587
4	2.41093	4	2.45891	4	2.50312	4	2.54673
5	2.41189	5	2.45883	5	2.50401	5	2.54759
6	2.41285	6	2.45975	6	2.50490	6	2.54844
7	2.41380	7	2.46067	7	2.50578	7	2.54930
8	2.41476	8	2.46159	8	2.50667	8	2.55015
9	2.41571	9	2.46250	9	2.50755	9	2.55101
0.00840	2.41667	0.00890	2.46342	0.00940	2.50844	0.00990	2.55186
1	2.41762	1	2.46434	1	2.50932	1	2.55271
2	2.41857	2	2.46526	2	2.51020	2	2.55357
3	2.41953	3	2.46617	3	2.51108	3	2.55442
4	2.42048	4	2.46709	4	2.51197	4	2.55527
5	2.42143	5	2.46800	5	2.51285	5	2.55612
6	2.42238	6	2.46891	6	2.51373	6	2.55697
7	2.42332	7	2.46983	7	2.51461	7	2.55782
8	2.42427	8	2.47074	8	2.51549	8	2.55867
9	2.42522	9	2.47165	9	2.51637	9	2.55952
0.00850	2.42617	0.00900	2.47256	0.00950	2.51724	0.01000	2.56037

Tafel III.

<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.
0.01000	2.56037	0.01050	2.60206	0.01100	2.64243	0.01150	2.68157
1	2.56122	1	2.60288	1	2.64322	1	2.68234
2	2.56206	2	2.60370	2	2.64402	2	2.68311
3	2.56291	3	2.60452	3	2.64481	3	2.68388
4	2.56375	4	2.60534	4	2.64560	4	2.68465
5	2.56460	5	2.60615	5	2.64640	5	2.68542
6	2.56544	6	2.60697	6	2.64719	6	2.68619
7	2.56629	7	2.60779	7	2.64798	7	2.68696
8	2.56713	8	2.60860	8	2.64877	8	2.68773
9	2.56797	9	2.60942	9	2.64956	9	2.68850
0.01010	2.56882	0.01060	2.61023	0.01110	2.65035	0.01160	2.68926
1	2.56966	1	2.61105	1	2.65114	1	2.69003
2	2.57050	2	2.61186	2	2.65193	2	2.69080
3	2.57134	3	2.61268	3	2.65272	3	2.69156
4	2.57218	4	2.61349	4	2.65351	4	2.69233
5	2.57302	5	2.61430	5	2.65430	5	2.69309
6	2.57386	6	2.61512	6	2.65508	6	2.69386
7	2.57470	7	2.61593	7	2.65587	7	2.69462
8	2.57554	8	2.61674	8	2.65666	8	2.69538
9	2.57637	9	2.61755	9	2.65744	9	2.69615
0.01020	2.57721	0.01070	2.61836	0.01120	2.65823	0.01170	2.69691
1	2.57805	1	2.61917	1	2.65901	1	2.69767
2	2.57888	2	2.61998	2	2.65980	2	2.69843
3	2.57972	3	2.62079	3	2.66058	3	2.69919
4	2.58055	4	2.62159	4	2.66136	4	2.69995
5	2.58138	5	2.62240	5	2.66215	5	2.70072
6	2.58222	6	2.62321	6	2.66293	6	2.70148
7	2.58305	7	2.62402	7	2.66371	7	2.70223
8	2.58388	8	2.62482	8	2.66449	8	2.70299
9	2.58472	9	2.62563	9	2.66528	9	2.70375
0.01030	2.58555	0.01080	2.62643	0.01130	2.66606	0.01180	2.70451
1	2.58638	1	2.62724	1	2.66684	1	2.70527
2	2.58721	2	2.62804	2	2.66762	2	2.70603
3	2.58804	3	2.62884	3	2.66840	3	2.70678
4	2.58887	4	2.62965	4	2.66917	4	2.70754
5	2.58969	5	2.63045	5	2.66995	5	2.70829
6	2.59052	6	2.63125	6	2.67073	6	2.70905
7	2.59135	7	2.63205	7	2.67151	7	2.70981
8	2.59218	8	2.63285	8	2.67228	8	2.71056
9	2.59300	9	2.63365	9	2.67306	9	2.71131
0.01040	2.59383	0.01090	2.63445	0.01140	2.67384	0.01190	2.71207
1	2.59465	1	2.63525	1	2.67461	1	2.71282
2	2.59548	2	2.63605	2	2.67539	2	2.71357
3	2.59630	3	2.63685	3	2.67616	3	2.71433
4	2.59713	4	2.63765	4	2.67694	4	2.71508
5	2.59795	5	2.63845	5	2.67771	5	2.71583
6	2.59877	6	2.63924	6	2.67848	6	2.71658
7	2.59960	7	2.64004	7	2.67926	7	2.71733
8	2.60042	8	2.64084	8	2.68003	8	2.71808
9	2.60124	9	2.64163	9	2.68080	9	2.71883
0.01050	2.60206	0.01100	2.64243	0.01150	2.68157	0.01200	2.71958

Tafel III.

<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.
0.01200	2.71958	0.01250	2.75653	0.01300	2.79250	0.01350	2.82753
1	2.72033	1	2.75726	1	2.79321	1	2.82823
2	2.72108	2	2.75799	2	2.79392	2	2.82892
3	2.72183	3	2.75872	3	2.79463	3	2.82961
4	2.72258	4	2.75945	4	2.79533	4	2.83030
5	2.72332	5	2.76017	5	2.79604	5	2.83099
6	2.72407	6	2.76090	6	2.79675	6	2.83168
7	2.72482	7	2.76163	7	2.79746	7	2.83237
8	2.72556	8	2.76235	8	2.79816	8	2.83306
9	2.72631	9	2.76308	9	2.79887	9	2.83375
0.01210	2.72706	0.01260	2.76380	0.01310	2.79958	0.01360	2.83443
1	2.72780	1	2.76453	1	2.80028	1	2.83512
2	2.72855	2	2.76525	2	2.80099	2	2.83581
3	2.72929	3	2.76598	3	2.80169	3	2.83650
4	2.73003	4	2.76670	4	2.80240	4	2.83719
5	2.73078	5	2.76742	5	2.80310	5	2.83787
6	2.73152	6	2.76815	6	2.80381	6	2.83856
7	2.73226	7	2.76887	7	2.80451	7	2.83925
8	2.73300	8	2.76959	8	2.80521	8	2.83993
9	2.73375	9	2.77031	9	2.80592	9	2.84062
0.01220	2.73449	0.01270	2.77103	0.01320	2.80662	0.01370	2.84130
1	2.73523	1	2.77176	1	2.80732	1	2.84199
2	2.73597	2	2.77248	2	2.80802	2	2.84267
3	2.73671	3	2.77320	3	2.80873	3	2.84336
4	2.73745	4	2.77392	4	2.80943	4	2.84404
5	2.73819	5	2.77464	5	2.81013	5	2.84472
6	2.73893	6	2.77535	6	2.81083	6	2.84541
7	2.73966	7	2.77607	7	2.81153	7	2.84609
8	2.74040	8	2.77679	8	2.81223	8	2.84677
9	2.74114	9	2.77751	9	2.81293	9	2.84745
0.01230	2.74188	0.01280	2.77823	0.01330	2.81363	0.01380	2.84813
1	2.74261	1	2.77894	1	2.81433	1	2.84882
2	2.74335	2	2.77966	2	2.81502	2	2.84950
3	2.74409	3	2.78038	3	2.81572	3	2.85018
4	2.74482	4	2.78109	4	2.81642	4	2.85086
5	2.74556	5	2.78181	5	2.81712	5	2.85154
6	2.74629	6	2.78252	6	2.81781	6	2.85222
7	2.74703	7	2.78324	7	2.81851	7	2.85290
8	2.74776	8	2.78395	8	2.81921	8	2.85358
9	2.74849	9	2.78467	9	2.81990	9	2.85426
0.01240	2.74923	0.01290	2.78538	0.01340	2.82060	0.01390	2.85493
1	2.74996	1	2.78609	1	2.82129	1	2.85561
2	2.75069	2	2.78681	2	2.82199	2	2.85629
3	2.75142	3	2.78752	3	2.82268	3	2.85697
4	2.75215	4	2.78823	4	2.82338	4	2.85764
5	2.75289	5	2.78894	5	2.82407	5	2.85832
6	2.75362	6	2.78966	6	2.82476	6	2.85900
7	2.75435	7	2.79037	7	2.82546	7	2.85967
8	2.75508	8	2.79108	8	2.82615	8	2.86035
9	2.75581	9	2.79179	9	2.82684	9	2.86102
0.01250	2.75653	0.01300	2.79250	0.01350	2.82753	0.01400	2.86170

Tafel III.

<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.
0.01400	2.86170	0.01450	2.89505	0.01500	2.92762	0.01550	2.95946
1	2.86237	1	2.89571	1	2.92826	1	2.96009
2	2.86305	2	2.89636	2	2.92891	2	2.96072
3	2.86372	3	2.89702	3	2.92955	3	2.96135
4	2.86440	4	2.89768	4	2.93019	4	2.96198
5	2.86507	5	2.89834	5	2.93084	5	2.96261
6	2.86574	6	2.89900	6	2.93148	6	2.96324
7	2.86542	7	2.89965	7	2.93212	7	2.96387
8	2.86709	8	2.90031	8	2.93276	8	2.96449
9	2.86776	9	2.90097	9	2.93341	9	2.96512
0.01410	2.86843	0.01460	2.90162	0.01510	2.93405	0.01560	2.96575
1	2.86910	1	2.90228	1	2.93469	1	2.96638
2	2.86978	2	2.90293	2	2.93533	2	2.96700
3	2.87045	3	2.90359	3	2.93597	3	2.96763
4	2.87112	4	2.90424	4	2.93661	4	2.96826
5	2.87179	5	2.90490	5	2.93725	5	2.96888
6	2.87246	6	2.90555	6	2.93789	6	2.96951
7	2.87313	7	2.90621	7	2.93853	7	2.97013
8	2.87380	8	2.90686	8	2.93917	8	2.97076
9	2.87447	9	2.90751	9	2.93981	9	2.97138
0.01420	2.87513	0.01470	2.90817	0.01520	2.94044	0.01570	2.97201
1	2.87580	1	2.90882	1	2.94108	1	2.97263
2	2.87647	2	2.90947	2	2.94172	2	2.97325
3	2.87714	3	2.91012	3	2.94236	3	2.97388
4	2.87781	4	2.91078	4	2.94299	4	2.97450
5	2.87847	5	2.91143	5	2.94363	5	2.97512
6	2.87914	6	2.91208	6	2.94427	6	2.97575
7	2.87981	7	2.91273	7	2.94490	7	2.97637
8	2.88047	8	2.91338	8	2.94554	8	2.97699
9	2.88114	9	2.91403	9	2.94618	9	2.97761
0.01430	2.88180	0.01480	2.91468	0.01530	2.94681	0.01580	2.97824
1	2.88247	1	2.91533	1	2.94745	1	2.97886
2	2.88313	2	2.91598	2	2.94808	2	2.97948
3	2.88380	3	2.91663	3	2.94872	3	2.98010
4	2.88446	4	2.91728	4	2.94935	4	2.98072
5	2.88513	5	2.91793	5	2.94999	5	2.98134
6	2.88579	6	2.91858	6	2.95062	6	2.98196
7	2.88645	7	2.91922	7	2.95125	7	2.98258
8	2.88712	8	2.91987	8	2.95189	8	2.98320
9	2.88778	9	2.92052	9	2.95252	9	2.98382
0.01440	2.88844	0.01490	2.92117	0.01540	2.95315	0.01590	2.98444
1	2.88910	1	2.92181	1	2.95378	1	2.98506
2	2.88976	2	2.92246	2	2.95442	2	2.98568
3	2.89043	3	2.92311	3	2.95505	3	2.98630
4	2.89109	4	2.92375	4	2.95568	4	2.98691
5	2.89175	5	2.92440	5	2.95631	5	2.98753
6	2.89241	6	2.92504	6	2.95694	6	2.98815
7	2.89307	7	2.92569	7	2.95757	7	2.98877
8	2.89373	8	2.92633	8	2.95820	8	2.98938
9	2.89439	9	2.92698	9	2.95883	9	2.99000
0.01450	2.89505	0.01500	2.92762	0.01550	2.95946	0.01600	2.99062

Tafel III.

<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.
0.01600	2.99062	0.01650	3.02111	0.01700	3.05098	0.01750	3.08026
1	2.99123	1	3.02172	1	3.05158	1	3.08084
2	2.99185	2	3.02232	2	3.05217	2	3.08142
3	2.99246	3	3.02292	3	3.05276	3	3.08200
4	2.99308	4	3.02352	4	3.05335	4	3.08258
5	2.99370	5	3.02413	5	3.05394	5	3.08316
6	2.99431	6	3.02473	6	3.05453	6	3.08374
7	2.99492	7	3.02533	7	3.05512	7	3.08432
8	2.99554	8	3.02593	8	3.05571	8	3.08489
9	2.99615	9	3.02653	9	3.05630	9	3.08547
0.01610	2.99677	0.01660	3.02714	0.01710	3.05689	0.01760	3.08605
1	2.99738	1	3.02774	1	3.05748	1	3.08663
2	2.99799	2	3.02834	2	3.05806	2	3.08721
3	2.99861	3	3.02894	3	3.05865	3	3.08778
4	2.99922	4	3.02954	4	3.05924	4	3.08836
5	2.99983	5	3.03014	5	3.05983	5	3.08894
6	3.00045	6	3.03074	6	3.06042	6	3.08951
7	3.00106	7	3.03134	7	3.06100	7	3.09009
8	3.00167	8	3.03194	8	3.06159	8	3.09066
9	3.00228	9	3.03254	9	3.06218	9	3.09124
0.01620	3.00289	0.01670	3.03313	0.01720	3.06277	0.01770	3.09182
1	3.00350	1	3.03373	1	3.06335	1	3.09239
2	3.00411	2	3.03433	2	3.06394	2	3.09297
3	3.00472	3	3.03493	3	3.06452	3	3.09354
4	3.00533	4	3.03553	4	3.06511	4	3.09411
5	3.00594	5	3.03612	5	3.06570	5	3.09469
6	3.00655	6	3.03672	6	3.06628	6	3.09526
7	3.00716	7	3.03732	7	3.06687	7	3.09584
8	3.00777	8	3.03792	8	3.06745	8	3.09641
9	3.00838	9	3.03851	9	3.06804	9	3.09698
0.01630	3.00899	0.01680	3.03911	0.01730	3.06862	0.01780	3.09756
1	3.00960	1	3.03970	1	3.06921	1	3.09813
2	3.01021	2	3.04030	2	3.06979	2	3.09870
3	3.01082	3	3.04090	3	3.07037	3	3.09928
4	3.01142	4	3.04149	4	3.07096	4	3.09985
5	3.01203	5	3.04209	5	3.07154	5	3.10042
6	3.01264	6	3.04268	6	3.07212	6	3.10099
7	3.01324	7	3.04328	7	3.07271	7	3.10156
8	3.01385	8	3.04387	8	3.07329	8	3.10214
9	3.01446	9	3.04446	9	3.07387	9	3.10271
0.01640	3.01506	0.01690	3.04506	0.01740	3.07445	0.01790	3.10328
1	3.01567	1	3.04565	1	3.07504	1	3.10385
2	3.01628	2	3.04625	2	3.07562	2	3.10442
3	3.01688	3	3.04684	3	3.07620	3	3.10499
4	3.01749	4	3.04743	4	3.07678	4	3.10556
5	3.01809	5	3.04802	5	3.07736	5	3.10613
6	3.01870	6	3.04862	6	3.07794	6	3.10670
7	3.01930	7	3.04921	7	3.07852	7	3.10727
8	3.01990	8	3.04980	8	3.07910	8	3.10784
9	3.02051	9	3.05039	9	3.07968	9	3.10841
0.01650	3.02111	0.01700	3.05098	0.01750	3.08026	0.01800	3.10898

Tafel III.

<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.
0.01800	3.10898	0.01850	3.13715	0.01900	3.16481	0.01950	3.19197
1	3.10955	1	3.13771	1	3.16536	1	3.19251
2	3.11011	2	3.13827	2	3.16590	2	3.19305
3	3.11068	3	3.13882	3	3.16645	3	3.19359
4	3.11125	4	3.13938	4	3.16700	4	3.19413
5	3.11182	5	3.13994	5	3.16755	5	3.19466
6	3.11239	6	3.14050	6	3.16809	6	3.19520
7	3.11295	7	3.14105	7	3.16864	7	3.19574
8	3.11352	8	3.14161	8	3.16919	8	3.19627
9	3.11409	9	3.14217	9	3.16973	9	3.19681
0.01810	3.11465	0.01860	3.14272	0.01910	3.17028	0.01960	3.19735
1	3.11522	1	3.14328	1	3.17083	1	3.19788
2	3.11579	2	3.14383	2	3.17137	2	3.19842
3	3.11635	3	3.14439	3	3.17192	3	3.19896
4	3.11692	4	3.14495	4	3.17246	4	3.19949
5	3.11748	5	3.14550	5	3.17301	5	3.20003
6	3.11805	6	3.14606	6	3.17355	6	3.20056
7	3.11862	7	3.14661	7	3.17410	7	3.20110
8	3.11918	8	3.14717	8	3.17464	8	3.20164
9	3.11974	9	3.14772	9	3.17519	9	3.20217
0.01820	3.12031	0.01870	3.14827	0.01920	3.17573	0.01970	3.20270
1	3.12087	1	3.14883	1	3.17628	1	3.20324
2	3.12144	2	3.14938	2	3.17682	2	3.20377
3	3.12200	3	3.14994	3	3.17736	3	3.20431
4	3.12257	4	3.15049	4	3.17791	4	3.20484
5	3.12313	5	3.15104	5	3.17845	5	3.20538
6	3.12369	6	3.15160	6	3.17899	6	3.20591
7	3.12426	7	3.15215	7	3.17954	7	3.20644
8	3.12482	8	3.15270	8	3.18008	8	3.20698
9	3.12538	9	3.15325	9	3.18062	9	3.20751
0.01830	3.12594	0.01880	3.15381	0.01930	3.18116	0.01980	3.20804
1	3.12651	1	3.15436	1	3.18171	1	3.20858
2	3.12707	2	3.15491	2	3.18225	2	3.20911
3	3.12763	3	3.15546	3	3.18279	3	3.20964
4	3.12819	4	3.15601	4	3.18333	4	3.21017
5	3.12875	5	3.15656	5	3.18387	5	3.21071
6	3.12931	6	3.15711	6	3.18442	6	3.21124
7	3.12988	7	3.15767	7	3.18496	7	3.21177
8	3.13044	8	3.15822	8	3.18550	8	3.21230
9	3.13100	9	3.15877	9	3.18604	9	3.21283
0.01840	3.13156	0.01890	3.15932	0.01940	3.18658	0.01990	3.21336
1	3.13212	1	3.15987	1	3.18712	1	3.21389
2	3.13268	2	3.16042	2	3.18766	2	3.21442
3	3.13324	3	3.16097	3	3.18820	3	3.21496
4	3.13380	4	3.16152	4	3.18874	4	3.21549
5	3.13436	5	3.16206	5	3.18928	5	3.21602
6	3.13492	6	3.16261	6	3.18982	6	3.21655
7	3.13547	7	3.16316	7	3.19036	7	3.21708
8	3.13603	8	3.16371	8	3.19090	8	3.21761
9	3.13659	9	3.16426	9	3.19143	9	3.21814
0.01850	3.13715	0.01900	3.16481	0.01950	3.19197	0.02000	3.21866

Tafel III.

<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.
0.02000	3.21866	0.02050	3.24490	0.02100	3.27071	0.02150	3.29609
1	3.21919	1	3.24542	1	3.27122	1	3.29660
2	3.21972	2	3.24594	2	3.27173	2	3.29710
3	3.22025	3	3.24646	3	3.27224	3	3.29760
4	3.22078	4	3.24698	4	3.27275	4	3.29811
5	3.22131	5	3.24750	5	3.27326	5	3.29861
6	3.22184	6	3.24802	6	3.27378	6	3.29911
7	3.22236	7	3.24854	7	3.27429	7	3.29961
8	3.22289	8	3.24906	8	3.27480	8	3.30012
9	3.22342	9	3.24958	9	3.27531	9	3.30062
0.02010	3.22395	0.02060	3.25010	0.02110	3.27582	0.02160	3.30112
1	3.22448	1	3.25062	1	3.27633	1	3.30162
2	3.22500	2	3.25114	2	3.27684	2	3.30212
3	3.22553	3	3.25165	3	3.27735	3	3.30263
4	3.22606	4	3.25217	4	3.27786	4	3.30313
5	3.22658	5	3.25269	5	3.27837	5	3.30363
6	3.22711	6	3.25321	6	3.27888	6	3.30413
7	3.22764	7	3.25372	7	3.27938	7	3.30463
8	3.22816	8	3.25424	8	3.27989	8	3.30513
9	3.22869	9	3.25476	9	3.28040	9	3.30563
0.02020	3.22921	0.02070	3.25528	0.02120	3.28091	0.02170	3.30613
1	3.22974	1	3.25579	1	3.28142	1	3.30663
2	3.23026	2	3.25631	2	3.28193	2	3.30713
3	3.23079	3	3.25683	3	3.28244	3	3.30763
4	3.23131	4	3.25734	4	3.28294	4	3.30813
5	3.23184	5	3.25786	5	3.28345	5	3.30863
6	3.23236	6	3.25837	6	3.28396	6	3.30913
7	3.23289	7	3.25889	7	3.28447	7	3.30963
8	3.23341	8	3.25941	8	3.28497	8	3.31013
9	3.23394	9	3.25992	9	3.28548	9	3.31063
0.02030	3.23446	0.02080	3.26044	0.02130	3.28599	0.02180	3.31113
1	3.23498	1	3.26095	1	3.28649	1	3.31163
2	3.23551	2	3.26147	2	3.28700	2	3.31213
3	3.23603	3	3.26198	3	3.28751	3	3.31263
4	3.23656	4	3.26250	4	3.28801	4	3.31312
5	3.23708	5	3.26301	5	3.28852	5	3.31362
6	3.23760	6	3.26352	6	3.28903	6	3.31412
7	3.23812	7	3.26404	7	3.28953	7	3.31462
8	3.23865	8	3.26455	8	3.29004	8	3.31512
9	3.23917	9	3.26507	9	3.29054	9	3.31561
0.02040	3.23969	0.02090	3.26558	0.02140	3.29105	0.02190	3.31611
1	3.24021	1	3.26609	1	3.29155	1	3.31661
2	3.24073	2	3.26661	2	3.29206	2	3.31711
3	3.24126	3	3.26712	3	3.29256	3	3.31760
4	3.24178	4	3.26763	4	3.29307	4	3.31810
5	3.24230	5	3.26815	5	3.29357	5	3.31860
6	3.24282	6	3.26866	6	3.29408	6	3.31910
7	3.24334	7	3.26917	7	3.29458	7	3.31959
8	3.24386	8	3.26968	8	3.29509	8	3.32008
9	3.24438	9	3.27020	9	3.29559	9	3.32058
0.02050	3.24490	0.02100	3.27071	0.02150	3.29609	0.02200	3.32108

Tafel III.

<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.
0.02200	3.32108	0.02250	3.34567	0.02300	3.36990	0.02350	3.39376
1	3.32157	1	3.34616	1	3.37038	1	3.39424
2	3.32207	2	3.34665	2	3.37086	2	3.39471
3	3.32256	3	3.34714	3	3.37134	3	3.39518
4	3.32306	4	3.34762	4	3.37182	4	3.39566
5	3.32355	5	3.34811	5	3.37230	5	3.39613
6	3.32405	6	3.34860	6	3.37278	6	3.39660
7	3.32454	7	3.34909	7	3.37326	7	3.39708
8	3.32504	8	3.34957	8	3.37374	8	3.39755
9	3.32553	9	3.35006	9	3.37422	9	3.39802
0.02210	3.32603	0.02260	3.35055	0.02310	3.37470	0.02360	3.39849
1	3.32652	1	3.35103	1	3.37518	1	3.39897
2	3.32701	2	3.35152	2	3.37566	2	3.39944
3	3.32751	3	3.35201	3	3.37614	3	3.39991
4	3.32800	4	3.35249	4	3.37662	4	3.40038
5	3.32850	5	3.35298	5	3.37709	5	3.40085
6	3.32899	6	3.35347	6	3.37757	6	3.40133
7	3.32948	7	3.35395	7	3.37805	7	3.40180
8	3.32998	8	3.35444	8	3.37853	8	3.40227
9	3.33047	9	3.35492	9	3.37901	9	3.40274
0.02220	3.33096	0.02270	3.35541	0.02320	3.37949	0.02370	3.40321
1	3.33145	1	3.35589	1	3.37996	1	3.40368
2	3.33195	2	3.35638	2	3.38044	2	3.40415
3	3.33244	3	3.35686	3	3.38092	3	3.40462
4	3.33293	4	3.35735	4	3.38140	4	3.40509
5	3.33342	5	3.35783	5	3.38187	5	3.40556
6	3.33391	6	3.35832	6	3.38235	6	3.40603
7	3.33441	7	3.35880	7	3.38283	7	3.40650
8	3.33490	8	3.35928	8	3.38331	8	3.40697
9	3.33539	9	3.35977	9	3.38378	9	3.40744
0.02230	3.33588	0.02280	3.36025	0.02330	3.38426	0.02380	3.40791
1	3.33637	1	3.36074	1	3.38474	1	3.40838
2	3.33686	2	3.36122	2	3.38521	2	3.40885
3	3.33735	3	3.36170	3	3.38569	3	3.40932
4	3.33784	4	3.36219	4	3.38616	4	3.40979
5	3.33833	5	3.36267	5	3.38664	5	3.41026
6	3.33882	6	3.36315	6	3.38712	6	3.41073
7	3.33931	7	3.36363	7	3.38759	7	3.41120
8	3.33980	8	3.36412	8	3.38807	8	3.41167
9	3.34029	9	3.36460	9	3.38854	9	3.41214
0.02240	3.34078	0.02290	3.36508	0.02340	3.38902	0.02390	3.41260
1	3.34127	1	3.36556	1	3.38949	1	3.41307
2	3.34176	2	3.36605	2	3.38997	2	3.41354
3	3.34225	3	3.36653	3	3.39044	3	3.41401
4	3.34274	4	3.36701	4	3.39092	4	3.41448
5	3.34323	5	3.36749	5	3.39139	5	3.41494
6	3.34372	6	3.36797	6	3.39187	6	3.41541
7	3.34421	7	3.36845	7	3.39234	7	3.41588
8	3.34470	8	3.36894	8	3.39281	8	3.41635
9	3.34519	9	3.36942	9	3.39329	9	3.41681
0.02250	3.34567	0.02300	3.36990	0.02350	3.39376	0.02400	3.41728

Tafel III.

<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.
0.02400	3.41728	0.02450	3.44046	0.02500	3.46332	0.02550	3.48587
1	3.41775	1	3.44092	1	3.46378	1	3.48632
2	3.41821	2	3.44138	2	3.46423	2	3.48676
3	3.41868	3	3.44184	3	3.46468	3	3.48721
4	3.41915	4	3.44230	4	3.46514	4	3.48766
5	3.41961	5	3.44276	5	3.46559	5	3.48811
6	3.42008	6	3.44322	6	3.46604	6	3.48855
7	3.42055	7	3.44368	7	3.46650	7	3.48900
8	3.42101	8	3.44414	8	3.46695	8	3.48945
9	3.42148	9	3.44460	9	3.46740	9	3.48989
0.02410	3.42194	0.02460	3.44506	0.02510	3.46786	0.02560	3.49034
1	3.42241	1	3.44552	1	3.46831	1	3.49079
2	3.42287	2	3.44598	2	3.46876	2	3.49123
3	3.42334	3	3.44644	3	3.46921	3	3.49168
4	3.42380	4	3.44690	4	3.46967	4	3.49213
5	3.42427	5	3.44735	5	3.47012	5	3.49257
6	3.42473	6	3.44781	6	3.47057	6	3.49302
7	3.42520	7	3.44827	7	3.47102	7	3.49346
8	3.42566	8	3.44873	8	3.47147	8	3.49391
9	3.42613	9	3.44919	9	3.47193	9	3.49436
0.02420	3.42659	0.02470	3.44964	0.02520	3.47238	0.02570	3.49480
1	3.42706	1	3.45010	1	3.47283	1	3.49525
2	3.42752	2	3.45056	2	3.47328	2	3.49569
3	3.42798	3	3.45102	3	3.47373	3	3.49614
4	3.42845	4	3.45147	4	3.47418	4	3.49658
5	3.42891	5	3.45193	5	3.47463	5	3.49703
6	3.42938	6	3.45239	6	3.47508	6	3.49747
7	3.42984	7	3.45285	7	3.47553	7	3.49792
8	3.43030	8	3.45330	8	3.47599	8	3.49836
9	3.43077	9	3.45376	9	3.47644	9	3.49880
0.02430	3.43123	0.02480	3.45422	0.02530	3.47689	0.02580	3.49925
1	3.43169	1	3.45467	1	3.47734	1	3.49969
2	3.43215	2	3.45513	2	3.47779	2	3.50014
3	3.43262	3	3.45559	3	3.47824	3	3.50058
4	3.43308	4	3.45604	4	3.47869	4	3.50103
5	3.43354	5	3.45650	5	3.47914	5	3.50147
6	3.43400	6	3.45695	6	3.47959	6	3.50191
7	3.43447	7	3.45741	7	3.48004	7	3.50236
8	3.43493	8	3.45786	8	3.48048	8	3.50280
9	3.43539	9	3.45832	9	3.48093	9	3.50324
0.02440	3.43585	0.02490	3.45878	0.02540	3.48138	0.02590	3.50369
1	3.43631	1	3.45923	1	3.48183	1	3.50413
2	3.43678	2	3.45969	2	3.48228	2	3.50457
3	3.43724	3	3.46014	3	3.48273	3	3.50501
4	3.43770	4	3.46060	4	3.48318	4	3.50546
5	3.43816	5	3.46105	5	3.48363	5	3.50590
6	3.43862	6	3.46150	6	3.48408	6	3.50634
7	3.43908	7	3.46196	7	3.48452	7	3.50678
8	3.43954	8	3.46241	8	3.48497	8	3.50723
9	3.44000	9	3.46287	9	3.48542	9	3.50767
0.02450	3.44046	0.02500	3.46332	0.02550	3.48587	0.02600	3.50811

Tafel III.

<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.
0.02600	3.50811	0.02650	3.53006	0.02700	3.55173	0.02750	3.57312
1	3.50855	1	3.53050	1	3.55216	1	3.57354
2	3.50899	2	3.53093	2	3.55259	2	3.57396
3	3.50944	3	3.53137	3	3.55302	3	3.57439
4	3.50988	4	3.53180	4	3.55345	4	3.57481
5	3.51032	5	3.53224	5	3.55388	5	3.57524
6	3.51076	6	3.53268	6	3.55431	6	3.57566
7	3.51120	7	3.53311	7	3.55474	7	3.57609
8	3.51164	8	3.53355	8	3.55517	8	3.57651
9	3.51208	9	3.53398	9	3.55560	9	3.57694
0.02610	3.51252	0.02660	3.53442	0.02710	3.55603	0.02760	3.57736
1	3.51296	1	3.53485	1	3.55645	1	3.57778
2	3.51340	2	3.53529	2	3.55688	2	3.57821
3	3.51385	3	3.53572	3	3.55731	3	3.57863
4	3.51429	4	3.53615	4	3.55774	4	3.57906
5	3.51473	5	3.53659	5	3.55817	5	3.57948
6	3.51517	6	3.53702	6	3.55860	6	3.57990
7	3.51561	7	3.53746	7	3.55903	7	3.58033
8	3.51605	8	3.53789	8	3.55946	8	3.58075
9	3.51649	9	3.53833	9	3.55989	9	3.58117
0.02620	3.51693	0.02670	3.53876	0.02720	3.56031	0.02770	3.58160
1	3.51736	1	3.53919	1	3.56074	1	3.58202
2	3.51780	2	3.53963	2	3.56117	2	3.58244
3	3.51824	3	3.54006	3	3.56160	3	3.58286
4	3.51868	4	3.54049	4	3.56203	4	3.58329
5	3.51912	5	3.54093	5	3.56245	5	3.58371
6	3.51956	6	3.54136	6	3.56288	6	3.58413
7	3.52000	7	3.54179	7	3.56331	7	3.58455
8	3.52044	8	3.54223	8	3.56374	8	3.58498
9	3.52088	9	3.54266	9	3.56416	9	3.58540
0.02630	3.52132	0.02680	3.54309	0.02730	3.56459	0.02780	3.58582
1	3.52175	1	3.54353	1	3.56502	1	3.58624
2	3.52219	2	3.54396	2	3.56545	2	3.58666
3	3.52263	3	3.54439	3	3.56587	3	3.58709
4	3.52307	4	3.54482	4	3.56630	4	3.58751
5	3.52351	5	3.54526	5	3.56673	5	3.58793
6	3.52394	6	3.54569	6	3.56715	6	3.58835
7	3.52438	7	3.54612	7	3.56758	7	3.58877
8	3.52482	8	3.54655	8	3.56801	8	3.58919
9	3.52526	9	3.54698	9	3.56843	9	3.58961
0.02640	3.52569	0.02690	3.54741	0.02740	3.56886	0.02790	3.59003
1	3.52613	1	3.54785	1	3.56928	1	3.59045
2	3.52657	2	3.54828	2	3.56971	2	3.59088
3	3.52700	3	3.54871	3	3.57014	3	3.59130
4	3.52744	4	3.54914	4	3.57056	4	3.59172
5	3.52788	5	3.54957	5	3.57099	5	3.59214
6	3.52831	6	3.55000	6	3.57141	6	3.59256
7	3.52875	7	3.55043	7	3.57184	7	3.59298
8	3.52919	8	3.55086	8	3.57226	8	3.59340
9	3.52962	9	3.55129	9	3.57269	9	3.59382
0.02650	3.53006	0.02700	3.55173	0.02750	3.57312	0.02800	3.59424

Tafel III.

<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.
0.02800	3.59424	0.02850	3.61510	0.02900	3.63571	0.02950	3.65608
1	3.59466	1	3.61551	1	3.63612	1	3.65648
2	3.59508	2	3.61593	2	3.63653	2	3.65689
3	3.59550	3	3.61634	3	3.63694	3	3.65729
4	3.59592	4	3.61676	4	3.63735	4	3.65770
5	3.59634	5	3.61717	5	3.63776	5	3.65810
6	3.59675	6	3.61759	6	3.63817	6	3.65850
7	3.59717	7	3.61800	7	3.63858	7	3.65891
8	3.59759	8	3.61841	8	3.63899	8	3.65931
9	3.59801	9	3.61883	9	3.63939	9	3.65972
0.02810	3.59843	0.02860	3.61924	0.02910	3.63980	0.02960	3.66012
1	3.59885	1	3.61966	1	3.64021	1	3.66052
2	3.59927	2	3.62007	2	3.64062	2	3.66093
3	3.59969	3	3.62048	3	3.64103	3	3.66133
4	3.60010	4	3.62090	4	3.64144	4	3.66174
5	3.60052	5	3.62131	5	3.64185	5	3.66214
6	3.60094	6	3.62172	6	3.64225	6	3.66254
7	3.60136	7	3.62214	7	3.64266	7	3.66295
8	3.60178	8	3.62255	8	3.64307	8	3.66335
9	3.60220	9	3.62296	9	3.64348	9	3.66375
0.02820	3.60261	0.02870	3.62337	0.02920	3.64389	0.02970	3.66416
1	3.60303	1	3.62379	1	3.64429	1	3.66456
2	3.60345	2	3.62420	2	3.64470	2	3.66496
3	3.60387	3	3.62461	3	3.64511	3	3.66536
4	3.60428	4	3.62502	4	3.64552	4	3.66577
5	3.60470	5	3.62544	5	3.64592	5	3.66617
6	3.60512	6	3.62585	6	3.64633	6	3.66657
7	3.60553	7	3.62626	7	3.64674	7	3.66697
8	3.60595	8	3.62667	8	3.64715	8	3.66738
9	3.60637	9	3.62708	9	3.64755	9	3.66778
0.02830	3.60679	0.02880	3.62750	0.02930	3.64796	0.02980	3.66818
1	3.60720	1	3.62791	1	3.64837	1	3.66858
2	3.60762	2	3.62832	2	3.64877	2	3.66898
3	3.60804	3	3.62873	3	3.64918	3	3.66939
4	3.60845	4	3.62914	4	3.64959	4	3.66979
5	3.60887	5	3.62955	5	3.64999	5	3.67019
6	3.60928	6	3.62996	6	3.65040	6	3.67059
7	3.60970	7	3.63038	7	3.65080	7	3.67099
8	3.61012	8	3.63079	8	3.65121	8	3.67139
9	3.61053	9	3.63120	9	3.65162	9	3.67180
0.02840	3.61095	0.02890	3.63161	0.02940	3.65202	0.02990	3.67220
1	3.61136	1	3.63202	1	3.65243	1	3.67260
2	3.61178	2	3.63243	2	3.65283	2	3.67300
3	3.61219	3	3.63284	3	3.65324	3	3.67340
4	3.61261	4	3.63325	4	3.65365	4	3.67380
5	3.61303	5	3.63366	5	3.65405	5	3.67420
6	3.61344	6	3.63407	6	3.65446	6	3.67460
7	3.61386	7	3.63448	7	3.65486	7	3.67500
8	3.61427	8	3.63489	8	3.65527	8	3.67540
9	3.61469	9	3.63530	9	3.65567	9	3.67580
0.02850	3.61510	0.02900	3.63571	0.02950	3.65608	0.03000	3.67620

Tafel III.

<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.
0.03000	3.67620	0.03050	3.69610	0.03100	3.71577	0.03150	3.73522
1	3.67660	1	3.69650	1	3.71616	1	3.73561
2	3.67700	2	3.69689	2	3.71655	2	3.73600
3	3.67740	3	3.69729	3	3.71694	3	3.73638
4	3.67780	4	3.69768	4	3.71733	4	3.73677
5	3.67820	5	3.69808	5	3.71773	5	3.73716
6	3.67860	6	3.69847	6	3.71812	6	3.73754
7	3.67900	7	3.69887	7	3.71851	7	3.73793
8	3.67940	8	3.69926	8	3.71890	8	3.73831
9	3.67980	9	3.69966	9	3.71929	9	3.73870
0.03010	3.68020	0.03060	3.70005	0.03110	3.71968	0.03160	3.73909
1	3.68060	1	3.70045	1	3.72007	1	3.73947
2	3.68100	2	3.70084	2	3.72046	2	3.73986
3	3.68140	3	3.70124	3	3.72085	3	3.74024
4	3.68180	4	3.70163	4	3.72124	4	3.74063
5	3.68220	5	3.70202	5	3.72163	5	3.74102
6	3.68260	6	3.70242	6	3.72202	6	3.74140
7	3.68299	7	3.70281	7	3.72241	7	3.74179
8	3.68339	8	3.70321	8	3.72280	8	3.74217
9	3.68379	9	3.70360	9	3.72319	9	3.74256
0.03020	3.68419	0.03070	3.70399	0.03120	3.72358	0.03170	3.74294
1	3.68459	1	3.70439	1	3.72397	1	3.74333
2	3.68499	2	3.70478	2	3.72436	2	3.74371
3	3.68538	3	3.70518	3	3.72475	3	3.74410
4	3.68578	4	3.70557	4	3.72513	4	3.74448
5	3.68618	5	3.70596	5	3.72552	5	3.74487
6	3.68658	6	3.70636	6	3.72591	6	3.74525
7	3.68698	7	3.70675	7	3.72630	7	3.74564
8	3.68737	8	3.70714	8	3.72669	8	3.74602
9	3.68777	9	3.70754	9	3.72708	9	3.74641
0.03030	3.68817	0.03080	3.70793	0.03130	3.72747	0.03180	3.74679
1	3.68857	1	3.70832	1	3.72786	1	3.74717
2	3.68896	2	3.70871	2	3.72824	2	3.74756
3	3.68936	3	3.70911	3	3.72863	3	3.74794
4	3.68976	4	3.70950	4	3.72902	4	3.74833
5	3.69016	5	3.70989	5	3.72941	5	3.74871
6	3.69055	6	3.71029	6	3.72980	6	3.74909
7	3.69095	7	3.71068	7	3.73019	7	3.74948
8	3.69135	8	3.71107	8	3.73057	8	3.74986
9	3.69174	9	3.71146	9	3.73096	9	3.75025
0.03040	3.69214	0.03090	3.71185	0.03140	3.73135	0.03190	3.75063
1	3.69254	1	3.71225	1	3.73174	1	3.75101
2	3.69293	2	3.71264	2	3.73212	2	3.75140
3	3.69333	3	3.71303	3	3.73251	3	3.75178
4	3.69372	4	3.71342	4	3.73290	4	3.75216
5	3.69412	5	3.71381	5	3.73329	5	3.75255
6	3.69452	6	3.71421	6	3.73367	6	3.75293
7	3.69491	7	3.71460	7	3.73406	7	3.75331
8	3.69531	8	3.71499	8	3.73445	8	3.75369
9	3.69570	9	3.71538	9	3.73484	9	3.75408
0.03050	3.69610	0.03100	3.71577	0.03150	3.73522	0.03200	3.75446

Tafel III.

<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.
0.03200	3.75446	0.03250	3.77349	0.03300	3.79232	0.03350	3.81095
1	3.75484	1	3.77387	1	3.79269	1	3.81132
2	3.75522	2	3.77425	2	3.79307	2	3.81169
3	3.75561	3	3.77462	3	3.79344	3	3.81206
4	3.75599	4	3.77500	4	3.79381	4	3.81243
5	3.75637	5	3.77538	5	3.79419	5	3.81280
6	3.75675	6	3.77576	6	3.79456	6	3.81317
7	3.75714	7	3.77614	7	3.79494	7	3.81354
8	3.75752	8	3.77652	8	3.79531	8	3.81391
9	3.75790	9	3.77689	9	3.79568	9	3.81428
0.03210	3.75828	0.03260	3.77727	0.03310	3.79606	0.03360	3.81465
1	3.75866	1	3.77765	1	3.79643	1	3.81502
2	3.75905	2	3.77803	2	3.79680	2	3.81539
3	3.75943	3	3.77840	3	3.79718	3	3.81576
4	3.75981	4	3.77878	4	3.79755	4	3.81613
5	3.76019	5	3.77916	5	3.79793	5	3.81650
6	3.76057	6	3.77954	6	3.79830	6	3.81687
7	3.76095	7	3.77991	7	3.79867	7	3.81724
8	3.76133	8	3.78029	8	3.79905	8	3.81760
9	3.76172	9	3.78067	9	3.79942	9	3.81797
0.03220	3.76210	0.03270	3.78104	0.03320	3.79979	0.03370	3.81834
1	3.76248	1	3.78142	1	3.80016	1	3.81871
2	3.76286	2	3.78180	2	3.80054	2	3.81908
3	3.76324	3	3.78217	3	3.80091	3	3.81945
4	3.76362	4	3.78255	4	3.80128	4	3.81982
5	3.76400	5	3.78293	5	3.80166	5	3.82019
6	3.76438	6	3.78330	6	3.80203	6	3.82056
7	3.76476	7	3.78368	7	3.80240	7	3.82092
8	3.76514	8	3.78406	8	3.80277	8	3.82129
9	3.76552	9	3.78443	9	3.80314	9	3.82166
0.03230	3.76590	0.03280	3.78481	0.03330	3.80352	0.03380	3.82203
1	3.76628	1	3.78519	1	3.80389	1	3.82240
2	3.76666	2	3.78556	2	3.80426	2	3.82277
3	3.76704	3	3.78594	3	3.80463	3	3.82313
4	3.76742	4	3.78631	4	3.80501	4	3.82350
5	3.76780	5	3.78669	5	3.80538	5	3.82387
6	3.76818	6	3.78706	6	3.80575	6	3.82424
7	3.76856	7	3.78744	7	3.80612	7	3.82461
8	3.76894	8	3.78782	8	3.80649	8	3.82497
9	3.76932	9	3.78819	9	3.80686	9	3.82534
0.03240	3.76970	0.03290	3.78857	0.03340	3.80724	0.03390	3.82571
1	3.77008	1	3.78894	1	3.80761	1	3.82608
2	3.77046	2	3.78932	2	3.80798	2	3.82644
3	3.77084	3	3.78969	3	3.80835	3	3.82681
4	3.77122	4	3.79007	4	3.80872	4	3.82718
5	3.77160	5	3.79044	5	3.80909	5	3.82755
6	3.77197	6	3.79082	6	3.80946	6	3.82791
7	3.77235	7	3.79119	7	3.80983	7	3.82828
8	3.77273	8	3.79157	8	3.81020	8	3.82865
9	3.77311	9	3.79194	9	3.81057	9	3.82901
0.03250	3.77349	0.03300	3.79232	0.03350	3.81095	0.03400	3.82938

Tafel III.

<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.
0.03400	3.82938	0.03450	3.84763	0.03500	3.86569	0.03550	3.88358
1	3.82975	1	3.84799	1	3.86605	1	3.88393
2	3.83011	2	3.84836	2	3.86641	2	3.88429
3	3.83048	3	3.84872	3	3.86677	3	3.88464
4	3.83085	4	3.84908	4	3.86713	4	3.88500
5	3.83121	5	3.84944	5	3.86749	5	3.88536
6	3.83158	6	3.84981	6	3.86785	6	3.88571
7	3.83195	7	3.85017	7	3.86821	7	3.88607
8	3.83231	8	3.85053	8	3.86857	8	3.88642
9	3.83268	9	3.85089	9	3.86893	9	3.88678
0.03410	3.83305	0.03460	3.85126	0.03510	3.86928	0.03560	3.88713
1	3.83341	1	3.85162	1	3.86964	1	3.88749
2	3.83378	2	3.85198	2	3.87000	2	3.88784
3	3.83414	3	3.85234	3	3.87036	3	3.88820
4	3.83451	4	3.85271	4	3.87072	4	3.88855
5	3.83488	5	3.85307	5	3.87108	5	3.88891
6	3.83524	6	3.85343	6	3.87144	6	3.88926
7	3.83561	7	3.85379	7	3.87179	7	3.88962
8	3.83597	8	3.85415	8	3.87215	8	3.88997
9	3.83634	9	3.85451	9	3.87251	9	3.89033
0.03420	3.83670	0.03470	3.85488	0.03520	3.87287	0.03570	3.89068
1	3.83707	1	3.85524	1	3.87323	1	3.89104
2	3.83743	2	3.85560	2	3.87358	2	3.89139
3	3.83780	3	3.85596	3	3.87394	3	3.89174
4	3.83816	4	3.85632	4	3.87430	4	3.89210
5	3.83853	5	3.85668	5	3.87466	5	3.89245
6	3.83889	6	3.85704	6	3.87502	6	3.89281
7	3.83926	7	3.85741	7	3.87537	7	3.89316
8	3.83962	8	3.85777	8	3.87573	8	3.89352
9	3.83999	9	3.85813	9	3.87609	9	3.89387
0.03430	3.84035	0.03480	3.85849	0.03530	3.87644	0.03580	3.89422
1	3.84072	1	3.85885	1	3.87680	1	3.89458
2	3.84108	2	3.85921	2	3.87716	2	3.89493
3	3.84145	3	3.85957	3	3.87752	3	3.89528
4	3.84181	4	3.85993	4	3.87787	4	3.89564
5	3.84217	5	3.86029	5	3.87823	5	3.89599
6	3.84254	6	3.86065	6	3.87859	6	3.89635
7	3.84290	7	3.86101	7	3.87894	7	3.89670
8	3.84327	8	3.86137	8	3.87930	8	3.89705
9	3.84363	9	3.86173	9	3.87966	9	3.89741
0.03440	3.84399	0.03490	3.86209	0.03540	3.88001	0.03590	3.89776
1	3.84436	1	3.86245	1	3.88037	1	3.89811
2	3.84472	2	3.86281	2	3.88073	2	3.89846
3	3.84509	3	3.86317	3	3.88108	3	3.89882
4	3.84545	4	3.86353	4	3.88144	4	3.89917
5	3.84581	5	3.86389	5	3.88180	5	3.89952
6	3.84618	6	3.86425	6	3.88215	6	3.89988
7	3.84654	7	3.86461	7	3.88251	7	3.90023
8	3.84690	8	3.86497	8	3.88287	8	3.90058
9	3.84727	9	3.86533	9	3.88322	9	3.90093
0.03450	3.84763	0.03500	3.86569	0.03550	3.88358	0.03600	3.90129

Tafel III.

<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.
0.03600	3.90129	0.03650	3.91882	0.03700	3.93619	0.03750	3.95340
1	3.90164	1	3.91917	1	3.93654	1	3.95374
2	3.90199	2	3.91952	2	3.93689	2	3.95409
3	3.90234	3	3.91987	3	3.93723	3	3.95443
4	3.90270	4	3.92022	4	3.93758	4	3.95477
5	3.90305	5	3.92057	5	3.93792	5	3.95511
6	3.90340	6	3.92092	6	3.93827	6	3.95546
7	3.90375	7	3.92127	7	3.93861	7	3.95580
8	3.90410	8	3.92161	8	3.93896	8	3.95614
9	3.90446	9	3.92196	9	3.93930	9	3.95648
0.03610	3.90481	0.03660	3.92231	0.03710	3.93965	0.03760	3.95682
1	3.90516	1	3.92266	1	3.93999	1	3.95716
2	3.90551	2	3.92301	2	3.94034	2	3.95751
3	3.90586	3	3.92336	3	3.94068	3	3.95785
4	3.90621	4	3.92370	4	3.94103	4	3.95819
5	3.90657	5	3.92405	5	3.94137	5	3.95853
6	3.90692	6	3.92440	6	3.94172	6	3.95887
7	3.90727	7	3.92475	7	3.94206	7	3.95921
8	3.90762	8	3.92510	8	3.94241	8	3.95956
9	3.90797	9	3.92544	9	3.94275	9	3.95990
0.03620	3.90832	0.03670	3.92579	0.03720	3.94310	0.03770	3.96024
1	3.90867	1	3.92614	1	3.94344	1	3.96058
2	3.90902	2	3.92649	2	3.94379	2	3.96092
3	3.90937	3	3.92684	3	3.94413	3	3.96126
4	3.90973	4	3.92718	4	3.94447	4	3.96160
5	3.91008	5	3.92753	5	3.94482	5	3.96194
6	3.91043	6	3.92788	6	3.94516	6	3.96228
7	3.91078	7	3.92822	7	3.94551	7	3.96263
8	3.91113	8	3.92857	8	3.94585	8	3.96297
9	3.91148	9	3.92892	9	3.94619	9	3.96331
0.03630	3.91183	0.03680	3.92927	0.03730	3.94654	0.03780	3.96365
1	3.91218	1	3.92961	1	3.94688	1	3.96399
2	3.91253	2	3.92996	2	3.94723	2	3.96433
3	3.91288	3	3.93031	3	3.94757	3	3.96467
4	3.91323	4	3.93065	4	3.94791	4	3.96501
5	3.91358	5	3.93100	5	3.94826	5	3.96535
6	3.91393	6	3.93135	6	3.94860	6	3.96569
7	3.91428	7	3.93169	7	3.94894	7	3.96603
8	3.91463	8	3.93204	8	3.94929	8	3.96637
9	3.91498	9	3.93239	9	3.94963	9	3.96671
0.03640	3.91533	0.03690	3.93273	0.03740	3.94997	0.03790	3.96705
1	3.91568	1	3.93308	1	3.95032	1	3.96739
2	3.91603	2	3.93343	2	3.95066	2	3.96773
3	3.91638	3	3.93377	3	3.95100	3	3.96807
4	3.91673	4	3.93412	4	3.95134	4	3.96841
5	3.91708	5	3.93446	5	3.95169	5	3.96875
6	3.91743	6	3.93481	6	3.95203	6	3.96909
7	3.91778	7	3.93516	7	3.95237	7	3.96943
8	3.91813	8	3.93550	8	3.95272	8	3.96977
9	3.91848	9	3.93585	9	3.95306	9	3.97011
0.03650	3.91882	0.03700	3.93619	0.03750	3.95340	0.03800	3.97045

Tafel III.

<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.
0.03800	3.97045	0.03850	3.98734	0.03900	4.00407	0.03950	4.02066
1	3.97079	1	3.98767	1	4.00441	1	4.02099
2	3.97113	2	3.98801	2	4.00474	2	4.02132
3	3.97147	3	3.98835	3	4.00507	3	4.02165
4	3.97180	4	3.98868	4	4.00541	4	4.02198
5	3.97214	5	3.98902	5	4.00574	5	4.02231
6	3.97248	6	3.98935	6	4.00607	6	4.02264
7	3.97282	7	3.98969	7	4.00640	7	4.02297
8	3.97316	8	3.99002	8	4.00674	8	4.02330
9	3.97350	9	3.99036	9	4.00707	9	4.02363
0.03810	3.97384	0.03860	3.99070	0.03910	4.00740	0.03960	4.02396
1	3.97418	1	3.99103	1	4.00774	1	4.02429
2	3.97452	2	3.99137	2	4.00807	2	4.02462
3	3.97485	3	3.99170	3	4.00840	3	4.02495
4	3.97519	4	3.99204	4	4.00873	4	4.02528
5	3.97553	5	3.99237	5	4.00906	5	4.02561
6	3.97587	6	3.99271	6	4.00940	6	4.02594
7	3.97621	7	3.99304	7	4.00973	7	4.02626
8	3.97655	8	3.99338	8	4.01006	8	4.02659
9	3.97688	9	3.99371	9	4.01039	9	4.02692
0.03820	3.97722	0.03870	3.99405	0.03920	4.01073	0.03970	4.02725
1	3.97756	1	3.99438	1	4.01106	1	4.02758
2	3.97790	2	3.99472	2	4.01139	2	4.02791
3	3.97824	3	3.99505	3	4.01172	3	4.02824
4	3.97857	4	3.99539	4	4.01205	4	4.02857
5	3.97891	5	3.99572	5	4.01238	5	4.02890
6	3.97925	6	3.99606	6	4.01272	6	4.02923
7	3.97959	7	3.99639	7	4.01305	7	4.02955
8	3.97992	8	3.99673	8	4.01338	8	4.02988
9	3.98026	9	3.99706	9	4.01371	9	4.03021
0.03830	3.98060	0.03880	3.99740	0.03930	4.01404	0.03980	4.03054
1	3.98094	1	3.99773	1	4.01437	1	4.03087
2	3.98127	2	3.99807	2	4.01471	2	4.03120
3	3.98161	3	3.99840	3	4.01504	3	4.03153
4	3.98195	4	3.99873	4	4.01537	4	4.03185
5	3.98229	5	3.99907	5	4.01570	5	4.03218
6	3.98262	6	3.99940	6	4.01603	6	4.03251
7	3.98296	7	3.99974	7	4.01636	7	4.03284
8	3.98330	8	4.00007	8	4.01669	8	4.03317
9	3.98363	9	4.00040	9	4.01702	9	4.03349
0.03840	3.98397	0.03890	4.00074	0.03940	4.01735	0.03990	4.03382
1	3.98431	1	4.00107	1	4.01768	1	4.03415
2	3.98464	2	4.00141	2	4.01802	2	4.03448
3	3.98498	3	4.00174	3	4.01835	3	4.03481
4	3.98532	4	4.00207	4	4.01868	4	4.03513
5	3.98566	5	4.00241	5	4.01901	5	4.03546
6	3.98599	6	4.00274	6	4.01934	6	4.03579
7	3.98633	7	4.00307	7	4.01967	7	4.03612
8	3.98666	8	4.00341	8	4.02000	8	4.03644
9	3.98700	9	4.00374	9	4.02033	9	4.03677
0.03850	3.98734	0.03900	4.00407	0.03950	4.02066	0.04000	4.03710

Tafel III.

<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.
0.04000	4.03710	0.04050	4.05339	0.04100	4.06955	0.04150	4.08556
1	4.03743	1	4.05372	1	4.06987	1	4.08588
2	4.03775	2	4.05404	2	4.07019	2	4.08620
3	4.03808	3	4.05437	3	4.07051	3	4.08652
4	4.03841	4	4.05469	4	4.07083	4	4.08684
5	4.03873	5	4.05502	5	4.07116	5	4.08716
6	4.03906	6	4.05534	6	4.07148	6	4.08748
7	4.03939	7	4.05566	7	4.07180	7	4.08779
8	4.03972	8	4.05599	8	4.07212	8	4.08811
9	4.04004	9	4.05631	9	4.07244	9	4.08843
0.04010	4.04037	0.04060	4.05664	0.04110	4.07276	0.04160	4.08875
1	4.04070	1	4.05696	1	4.07308	1	4.08907
2	4.04102	2	4.05728	2	4.07340	2	4.08939
3	4.04135	3	4.05761	3	4.07372	3	4.08971
4	4.04168	4	4.05793	4	4.07405	4	4.09002
5	4.04200	5	4.05825	5	4.07437	5	4.09034
6	4.04233	6	4.05858	6	4.07469	6	4.09066
7	4.04265	7	4.05890	7	4.07501	7	4.09098
8	4.04298	8	4.05923	8	4.07533	8	4.09130
9	4.04331	9	4.05955	9	4.07565	9	4.09161
0.04020	4.04363	0.04070	4.05987	0.04120	4.07597	0.04170	4.09193
1	4.04396	1	4.06020	1	4.07629	1	4.09225
2	4.04429	2	4.06052	2	4.07661	2	4.09257
3	4.04461	3	4.06084	3	4.07693	3	4.09288
4	4.04494	4	4.06116	4	4.07725	4	4.09320
5	4.04526	5	4.06149	5	4.07757	5	4.09352
6	4.04559	6	4.06181	6	4.07789	6	4.09384
7	4.04592	7	4.06213	7	4.07821	7	4.09416
8	4.04624	8	4.06246	8	4.07853	8	4.09447
9	4.04657	9	4.06278	9	4.07885	9	4.09479
0.04030	4.04689	0.04080	4.06310	0.04130	4.07917	0.04180	4.09511
1	4.04722	1	4.06343	1	4.07949	1	4.09542
2	4.04754	2	4.06375	2	4.07981	2	4.09574
3	4.04787	3	4.06407	3	4.08013	3	4.09606
4	4.04819	4	4.06439	4	4.08045	4	4.09638
5	4.04852	5	4.06472	5	4.08077	5	4.09669
6	4.04885	6	4.06504	6	4.08109	6	4.09701
7	4.04917	7	4.06536	7	4.08141	7	4.09733
8	4.04950	8	4.06568	8	4.08173	8	4.09764
9	4.04982	9	4.06601	9	4.08205	9	4.09796
0.04040	4.05015	0.04090	4.06633	0.04140	4.08237	0.04190	4.09828
1	4.05047	1	4.06665	1	4.08269	1	4.09860
2	4.05080	2	4.06697	2	4.08301	2	4.09891
3	4.05112	3	4.06729	3	4.08333	3	4.09923
4	4.05145	4	4.06762	4	4.08365	4	4.09954
5	4.05177	5	4.06794	5	4.08397	5	4.09986
6	4.05210	6	4.06826	6	4.08429	6	4.10018
7	4.05242	7	4.06858	7	4.08461	7	4.10049
8	4.05274	8	4.06890	8	4.08493	8	4.10081
9	4.05307	9	4.06923	9	4.08524	9	4.10113
0.04050	4.05339	0.04100	4.06955	0.04150	4.08556	0.04200	4.10144

Tafel III.

<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.
0.04200	4.10144	0.04250	4.11719	0.04300	4.13281	0.04350	4.14830
1	4.10176	1	4.11750	1	4.13312	1	4.14861
2	4.10208	2	4.11782	2	4.13343	2	4.14891
3	4.10239	3	4.11813	3	4.13374	3	4.14922
4	4.10271	4	4.11845	4	4.13405	4	4.14953
5	4.10302	5	4.11876	5	4.13436	5	4.14984
6	4.10334	6	4.11907	6	4.13467	6	4.15015
7	4.10366	7	4.11939	7	4.13498	7	4.15046
8	4.10397	8	4.11970	8	4.13529	8	4.15076
9	4.10429	9	4.12001	9	4.13561	9	4.15107
0.04210	4.10460	0.04260	4.12032	0.04310	4.13592	0.04360	4.15138
1	4.10492	1	4.12064	1	4.13623	1	4.15169
2	4.10524	2	4.12095	2	4.13654	2	4.15200
3	4.10555	3	4.12126	3	4.13685	3	4.15230
4	4.10587	4	4.12158	4	4.13716	4	4.15261
5	4.10618	5	4.12189	5	4.13747	5	4.15292
6	4.10650	6	4.12220	6	4.13778	6	4.15323
7	4.10681	7	4.12252	7	4.13809	7	4.15354
8	4.10713	8	4.12283	8	4.13840	8	4.15384
9	4.10744	9	4.12314	9	4.13871	9	4.15415
0.04220	4.10776	0.04270	4.12345	0.04320	4.13902	0.04370	4.15446
1	4.10807	1	4.12377	1	4.13933	1	4.15477
2	4.10839	2	4.12408	2	4.13964	2	4.15507
3	4.10870	3	4.12439	3	4.13995	3	4.15538
4	4.10902	4	4.12470	4	4.14026	4	4.15569
5	4.10933	5	4.12502	5	4.14057	5	4.15599
6	4.10965	6	4.12533	6	4.14088	6	4.15630
7	4.10996	7	4.12564	7	4.14119	7	4.15661
8	4.11028	8	4.12595	8	4.14150	8	4.15692
9	4.11059	9	4.12626	9	4.14181	9	4.15722
0.04230	4.11091	0.04280	4.12658	0.04330	4.14212	0.04380	4.15753
1	4.11122	1	4.12689	1	4.14243	1	4.15784
2	4.11154	2	4.12720	2	4.14274	2	4.15814
3	4.11185	3	4.12751	3	4.14305	3	4.15845
4	4.11217	4	4.12782	4	4.14335	4	4.15876
5	4.11248	5	4.12814	5	4.14366	5	4.15906
6	4.11280	6	4.12845	6	4.14397	6	4.15937
7	4.11311	7	4.12876	7	4.14428	7	4.15968
8	4.11342	8	4.12907	8	4.14459	8	4.15999
9	4.11374	9	4.12938	9	4.14490	9	4.16029
0.04240	4.11405	0.04290	4.12970	0.04340	4.14521	0.04390	4.16060
1	4.11437	1	4.13001	1	4.14552	1	4.16090
2	4.11468	2	4.13032	2	4.14583	2	4.16121
3	4.11499	3	4.13063	3	4.14614	3	4.16152
4	4.11531	4	4.13094	4	4.14645	4	4.16182
5	4.11562	5	4.13125	5	4.14675	5	4.16213
6	4.11594	6	4.13156	6	4.14706	6	4.16244
7	4.11625	7	4.13187	7	4.14737	7	4.16274
8	4.11656	8	4.13219	8	4.14768	8	4.16305
9	4.11688	9	4.13250	9	4.14799	9	4.16336
0.04250	4.11719	0.04300	4.13281	0.04350	4.14830	0.04400	4.16366

Tafel III.

<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.
0.04400	4.16366	0.04450	4.17890	0.04500	4.19402	0.04550	4.20902
1	4.16397	1	4.17921	1	4.19432	1	4.20932
2	4.16427	2	4.17951	2	4.19462	2	4.20962
3	4.16458	3	4.17981	3	4.19493	3	4.20992
4	4.16488	4	4.18012	4	4.19523	4	4.21022
5	4.16519	5	4.18042	5	4.19553	5	4.21052
6	4.16550	6	4.18072	6	4.19583	6	4.21082
7	4.16580	7	4.18103	7	4.19613	7	4.21111
8	4.16611	8	4.18133	8	4.19643	8	4.21141
9	4.16641	9	4.18163	9	4.19673	9	4.21171
0.04410	4.16672	0.04460	4.18194	0.04510	4.19703	0.04560	4.21201
1	4.16702	1	4.18224	1	4.19733	1	4.21231
2	4.16733	2	4.18254	2	4.19763	2	4.21261
3	4.16764	3	4.18284	3	4.19793	3	4.21290
4	4.16794	4	4.18315	4	4.19823	4	4.21320
5	4.16825	5	4.18345	5	4.19853	5	4.21350
6	4.16855	6	4.18375	6	4.19884	6	4.21380
7	4.16886	7	4.18406	7	4.19914	7	4.21410
8	4.16916	8	4.18436	8	4.19944	8	4.21440
9	4.16947	9	4.18466	9	4.19974	9	4.21469
0.04420	4.16977	0.04470	4.18496	0.04520	4.20004	0.04570	4.21499
1	4.17008	1	4.18527	1	4.20034	1	4.21529
2	4.17038	2	4.18557	2	4.20064	2	4.21559
3	4.17069	3	4.18587	3	4.20094	3	4.21588
4	4.17099	4	4.18617	4	4.20124	4	4.21618
5	4.17130	5	4.18648	5	4.20154	5	4.21648
6	4.17160	6	4.18678	6	4.20184	6	4.21678
7	4.17191	7	4.18708	7	4.20214	7	4.21708
8	4.17221	8	4.18738	8	4.20244	8	4.21737
9	4.17252	9	4.18769	9	4.20274	9	4.21767
0.04430	4.17282	0.04480	4.18799	0.04530	4.20304	0.04580	4.21797
1	4.17312	1	4.18829	1	4.20334	1	4.21827
2	4.17343	2	4.18859	2	4.20364	2	4.21856
3	4.17373	3	4.18889	3	4.20394	3	4.21886
4	4.17404	4	4.18920	4	4.20424	4	4.21916
5	4.17434	5	4.18950	5	4.20454	5	4.21945
6	4.17465	6	4.18980	6	4.20483	6	4.21975
7	4.17495	7	4.19010	7	4.20513	7	4.22005
8	4.17526	8	4.19040	8	4.20543	8	4.22035
9	4.17556	9	4.19071	9	4.20573	9	4.22064
0.04440	4.17586	0.04490	4.19101	0.04540	4.20603	0.04590	4.22094
1	4.17617	1	4.19131	1	4.20633	1	4.22124
2	4.17647	2	4.19161	2	4.20663	2	4.22153
3	4.17678	3	4.19191	3	4.20693	3	4.22183
4	4.17708	4	4.19221	4	4.20723	4	4.22213
5	4.17738	5	4.19252	5	4.20753	5	4.22242
6	4.17769	6	4.19282	6	4.20783	6	4.22272
7	4.17799	7	4.19312	7	4.20813	7	4.22302
8	4.17829	8	4.19342	8	4.20843	8	4.22332
9	4.17860	9	4.19372	9	4.20872	9	4.22361
0.04450	4.17890	0.04500	4.19402	0.04550	4.20902	0.04600	4.22391

Tafel III.

<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.
0.04600	4.22391	0.04650	4.23868	0.04700	4.25334	0.04750	4.26788
1	4.22420	1	4.23897	1	4.25363	1	4.26817
2	4.22450	2	4.23927	2	4.25392	2	4.26846
3	4.22480	3	4.23956	3	4.25421	3	4.26875
4	4.22509	4	4.23986	4	4.25450	4	4.26904
5	4.22539	5	4.24015	5	4.25480	5	4.26933
6	4.22569	6	4.24044	6	4.25509	6	4.26962
7	4.22598	7	4.24074	7	4.25538	7	4.26991
8	4.22628	8	4.24103	8	4.25567	8	4.27020
9	4.22658	9	4.24133	9	4.25596	9	4.27049
0.04610	4.22687	0.04660	4.24162	0.04710	4.25626	0.04760	4.27078
1	4.22717	1	4.24191	1	4.25655	1	4.27107
2	4.22746	2	4.24221	2	4.25684	2	4.27136
3	4.22776	3	4.24250	3	4.25713	3	4.27165
4	4.22806	4	4.24279	4	4.25742	4	4.27194
5	4.22835	5	4.24309	5	4.25771	5	4.27223
6	4.22865	6	4.24338	6	4.25800	6	4.27252
7	4.22894	7	4.24368	7	4.25830	7	4.27281
8	4.22924	8	4.24397	8	4.25859	8	4.27310
9	4.22953	9	4.24426	9	4.25888	9	4.27338
0.04620	4.22983	0.04670	4.24456	0.04720	4.25917	0.04770	4.27367
1	4.23013	1	4.24485	1	4.25946	1	4.27396
2	4.23042	2	4.24514	2	4.25975	2	4.27425
3	4.23072	3	4.24544	3	4.26004	3	4.27454
4	4.23101	4	4.24573	4	4.26033	4	4.27483
5	4.23131	5	4.24602	5	4.26062	5	4.27512
6	4.23160	6	4.24631	6	4.26092	6	4.27541
7	4.23190	7	4.24661	7	4.26121	7	4.27570
8	4.23219	8	4.24690	8	4.26150	8	4.27598
9	4.23249	9	4.24719	9	4.26179	9	4.27627
0.04630	4.23278	0.04680	4.24749	0.04730	4.26208	0.04780	4.27656
1	4.23308	1	4.24778	1	4.26237	1	4.27685
2	4.23337	2	4.24807	2	4.26266	2	4.27714
3	4.23367	3	4.24837	3	4.26295	3	4.27743
4	4.23396	4	4.24866	4	4.26324	4	4.27772
5	4.23426	5	4.24895	5	4.26353	5	4.27800
6	4.23455	6	4.24924	6	4.26382	6	4.27829
7	4.23485	7	4.24954	7	4.26411	7	4.27858
8	4.23514	8	4.24983	8	4.26440	8	4.27887
9	4.23544	9	4.25012	9	4.26469	9	4.27916
0.04640	4.23573	0.04690	4.25041	0.04740	4.26498	0.04790	4.27944
1	4.23603	1	4.25071	1	4.26527	1	4.27973
2	4.23632	2	4.25100	2	4.26556	2	4.28002
3	4.23662	3	4.25129	3	4.26585	3	4.28031
4	4.23691	4	4.25158	4	4.26614	4	4.28060
5	4.23721	5	4.25188	5	4.26643	5	4.28088
6	4.23750	6	4.25217	6	4.26672	6	4.28117
7	4.23780	7	4.25246	7	4.26702	7	4.28146
8	4.23809	8	4.25275	8	4.26730	8	4.28175
9	4.23838	9	4.25304	9	4.26759	9	4.28204
0.04650	4.23868	0.04700	4.25334	0.04750	4.26788	0.04800	4.28232

Tafel III.

<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.
0.04800	4.28232	0.04850	4.29666	0.04900	4.31088	0.04950	4.32501
1	4.28261	1	4.29694	1	4.31117	1	4.32529
2	4.28290	2	4.29723	2	4.31145	2	4.32557
3	4.28319	3	4.29751	3	4.31173	3	4.32585
4	4.28347	4	4.29780	4	4.31202	4	4.32613
5	4.28376	5	4.29808	5	4.31230	5	4.32642
6	4.28405	6	4.29837	6	4.31258	6	4.32670
7	4.28434	7	4.29865	7	4.31287	7	4.32698
8	4.28462	8	4.29894	8	4.31315	8	4.32726
9	4.28491	9	4.29923	9	4.31343	9	4.32754
0.04810	4.28520	0.04860	4.29951	0.04910	4.31372	0.04960	4.32782
1	4.28549	1	4.29980	1	4.31400	1	4.32810
2	4.28577	2	4.30008	2	4.31428	2	4.32838
3	4.28606	3	4.30037	3	4.31457	3	4.32866
4	4.28635	4	4.30065	4	4.31485	4	4.32895
5	4.28663	5	4.30094	5	4.31513	5	4.32923
6	4.28692	6	4.30122	6	4.31542	6	4.32951
7	4.28721	7	4.30151	7	4.31570	7	4.32979
8	4.28750	8	4.30179	8	4.31598	8	4.33007
9	4.28778	9	4.30208	9	4.31626	9	4.33035
0.04820	4.28807	0.04870	4.30236	0.04920	4.31655	0.04970	4.33063
1	4.28836	1	4.30264	1	4.31683	1	4.33091
2	4.28864	2	4.30293	2	4.31711	2	4.33119
3	4.28893	3	4.30321	3	4.31739	3	4.33147
4	4.28922	4	4.30350	4	4.31768	4	4.33175
5	4.28950	5	4.30378	5	4.31796	5	4.33203
6	4.28979	6	4.30407	6	4.31824	6	4.33231
7	4.29008	7	4.30435	7	4.31852	7	4.33259
8	4.29036	8	4.30464	8	4.31881	8	4.33287
9	4.29065	9	4.30492	9	4.31909	9	4.33315
0.04830	4.29094	0.04880	4.30521	0.04930	4.31937	0.04980	4.33344
1	4.29122	1	4.30549	1	4.31965	1	4.33372
2	4.29151	2	4.30577	2	4.31994	2	4.33400
3	4.29180	3	4.30606	3	4.32022	3	4.33428
4	4.29208	4	4.30634	4	4.32050	4	4.33456
5	4.29237	5	4.30663	5	4.32078	5	4.33484
6	4.29265	6	4.30691	6	4.32106	6	4.33512
7	4.29294	7	4.30720	7	4.32135	7	4.33540
8	4.29323	8	4.30748	8	4.32163	8	4.33568
9	4.29351	9	4.30776	9	4.32191	9	4.33596
0.04840	4.29380	0.04890	4.30805	0.04940	4.32219	0.04990	4.33624
1	4.29408	1	4.30833	1	4.32247	1	4.33652
2	4.29437	2	4.30861	2	4.32276	2	4.33680
3	4.29466	3	4.30890	3	4.32304	3	4.33708
4	4.29494	4	4.30918	4	4.32332	4	4.33735
5	4.29523	5	4.30947	5	4.32360	5	4.33763
6	4.29551	6	4.30975	6	4.32388	6	4.33791
7	4.29580	7	4.31003	7	4.32416	7	4.33819
8	4.29609	8	4.31032	8	4.32445	8	4.33847
9	4.29637	9	4.31060	9	4.32473	9	4.33875
0.04850	4.29666	0.04900	4.31088	0.04950	4.32501	0.05000	4.33903

Tafel III.

b	arg.	b	arg.	b	arg.	b	arg.
0.0500	4.33903	0.0550	4.47403	0.0600	4.60048	0.0650	4.71952
1	4.34182	1	4.47664	1	4.60293	1	4.72183
2	4.34461	2	4.47925	2	4.60538	2	4.72414
3	4.34740	3	4.48185	3	4.60783	3	4.72645
4	4.35018	4	4.48445	4	4.61027	4	4.72875
5	4.35296	5	4.48704	5	4.61270	5	4.73106
6	4.35573	6	4.48963	6	4.61514	6	4.73335
7	4.35850	7	4.49222	7	4.61757	7	4.73565
8	4.36126	8	4.49481	8	4.62000	8	4.73794
9	4.36402	9	4.49739	9	4.62243	9	4.74024
0.0510	4.36678	0.0560	4.49997	0.0610	4.62485	0.0660	4.74252
1	4.36953	1	4.50254	1	4.62727	1	4.74481
2	4.37228	2	4.50511	2	4.62969	2	4.74709
3	4.37503	3	4.50768	3	4.63211	3	4.74938
4	4.37777	4	4.51025	4	4.63452	4	4.75165
5	4.38051	5	4.51281	5	4.63693	5	4.75393
6	4.38324	6	4.51537	6	4.63933	6	4.75620
7	4.38598	7	4.51792	7	4.64174	7	4.75848
8	4.38870	8	4.52048	8	4.64414	8	4.76074
9	4.39142	9	4.52302	9	4.64654	9	4.76301
0.0520	4.39414	0.0570	4.52557	0.0620	4.64893	0.0670	4.76527
1	4.39686	1	4.52811	1	4.65133	1	4.76753
2	4.39957	2	4.53065	2	4.65372	2	4.76979
3	4.40228	3	4.53319	3	4.65610	3	4.77205
4	4.40498	4	4.53572	4	4.65849	4	4.77430
5	4.40768	5	4.53825	5	4.66087	5	4.77656
6	4.41038	6	4.54078	6	4.66325	6	4.77880
7	4.41308	7	4.54330	7	4.66562	7	4.78105
8	4.41576	8	4.54582	8	4.66800	8	4.78330
9	4.41845	9	4.54834	9	4.67037	9	4.78554
0.0530	4.42113	0.0580	4.55085	0.0630	4.67273	0.0680	4.78778
1	4.42381	1	4.55336	1	4.67510	1	4.79001
2	4.42649	2	4.55587	2	4.67746	2	4.79225
3	4.42916	3	4.55837	3	4.67982	3	4.79448
4	4.43183	4	4.56088	4	4.68218	4	4.79671
5	4.43449	5	4.56337	5	4.68453	5	4.79894
6	4.43715	6	4.56587	6	4.68688	6	4.80116
7	4.43981	7	4.56836	7	4.68923	7	4.80338
8	4.44246	8	4.57085	8	4.69158	8	4.80560
9	4.44511	9	4.57334	9	4.69392	9	4.80782
0.0540	4.44776	0.0590	4.57582	0.0640	4.69626	0.0690	4.81004
1	4.45040	1	4.57830	1	4.69860	1	4.81225
2	4.45304	2	4.58078	2	4.70093	2	4.81446
3	4.45568	3	4.58325	3	4.70327	3	4.81667
4	4.45831	4	4.58572	4	4.70560	4	4.81888
5	4.46094	5	4.58819	5	4.70792	5	4.82108
6	4.46357	6	4.59065	6	4.71025	6	4.82328
7	4.46619	7	4.59312	7	4.71257	7	4.82548
8	4.46881	8	4.59557	8	4.71489	8	4.82768
9	4.47142	9	4.59803	9	4.71721	9	4.82987
0.0550	4.47403	0.0600	4.60048	0.0650	4.71952	0.0700	4.83206

Tafel III.

<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.
0.0700	4.83206	0.0750	4.93885	0.0800	5.04050	0.0850	5.13752
1	4.83425	1	4.94093	1	5.04248	1	5.13942
2	4.83644	2	4.94301	2	5.04446	2	5.14131
3	4.83863	3	4.94509	3	5.04644	3	5.14320
4	4.84081	4	4.94716	4	5.04842	4	5.14510
5	4.84299	5	4.94924	5	5.05040	5	5.14699
6	4.84517	6	4.95131	6	5.05238	6	5.14887
7	4.84734	7	4.95338	7	5.05435	7	5.15076
8	4.84952	8	4.95544	8	5.05632	8	5.15264
9	4.85169	9	4.95751	9	5.05829	9	5.15453
0.0710	4.85386	0.0760	4.95957	0.0810	5.06026	0.0860	5.15641
1	4.85603	1	4.96163	1	5.06222	1	5.15829
2	4.85819	2	4.96369	2	5.06419	2	5.16017
3	4.86035	3	4.96575	3	5.06615	3	5.16204
4	4.86252	4	4.96781	4	5.06811	4	5.16392
5	4.86467	5	4.96986	5	5.07007	5	5.16579
6	4.86683	6	4.97191	6	5.07203	6	5.16766
7	4.86898	7	4.97396	7	5.07398	7	5.16953
8	4.87114	8	4.97601	8	5.07593	8	5.17140
9	4.87328	9	4.97805	9	5.07789	9	5.17327
0.0720	4.87543	0.0770	4.98010	0.0820	5.07984	0.0870	5.17513
1	4.87758	1	4.98214	1	5.08178	1	5.17700
2	4.87972	2	4.98418	2	5.08373	2	5.17886
3	4.88186	3	4.98621	3	5.08567	3	5.18072
4	4.88400	4	4.98825	4	5.08762	4	5.18258
5	4.88614	5	4.99028	5	5.08956	5	5.18444
6	4.88827	6	4.99231	6	5.09150	6	5.18629
7	4.89040	7	4.99434	7	5.09344	7	5.18815
8	4.89253	8	4.99637	8	5.09537	8	5.19000
9	4.89466	9	4.99840	9	5.09730	9	5.19185
0.0730	4.89678	0.0780	5.00042	0.0830	5.09924	0.0880	5.19370
1	4.89891	1	5.00244	1	5.10117	1	5.19555
2	4.90103	2	5.00446	2	5.10310	2	5.19739
3	4.90315	3	5.00648	3	5.10502	3	5.19924
4	4.90526	4	5.00850	4	5.10695	4	5.20108
5	4.90738	5	5.01051	5	5.10887	5	5.20292
6	4.90949	6	5.01252	6	5.11079	6	5.20476
7	4.91160	7	5.01453	7	5.11271	7	5.20660
8	4.91371	8	5.01654	8	5.11463	8	5.20843
9	4.91582	9	5.01855	9	5.11655	9	5.21027
0.0740	4.91792	0.0790	5.02055	0.0840	5.11846	0.0890	5.21210
1	4.92002	1	5.02256	1	5.12038	1	5.21394
2	4.92212	2	5.02456	2	5.12229	2	5.21577
3	4.92422	3	5.02656	3	5.12420	3	5.21759
4	4.92632	4	5.02855	4	5.12611	4	5.21942
5	4.92841	5	5.03055	5	5.12801	5	5.22125
6	4.93050	6	5.03254	6	5.12992	6	5.22307
7	4.93259	7	5.03453	7	5.13182	7	5.22489
8	4.93468	8	5.03652	8	5.13372	8	5.22672
9	4.93677	9	5.03851	9	5.13562	9	5.22854
0.0750	4.93885	0.0800	5.04050	0.0850	5.13752	0.0900	5.23035

Tafel III.

b	arg.	b	arg.	b	arg.	b	arg.
0.0900	5.23035	0.0950	5.31937	0.1000	5.40489	0.1050	5.48719
1	5.23217	1	5.32111	1	5.40657	1	5.48881
2	5.23398	2	5.32286	2	5.40824	2	5.49042
3	5.23580	3	5.32460	3	5.40992	3	5.49204
4	5.23761	4	5.32634	4	5.41159	4	5.49365
5	5.23942	5	5.32807	5	5.41326	5	5.49526
6	5.24123	6	5.32981	6	5.41493	6	5.49687
7	5.24304	7	5.33155	7	5.41660	7	5.49847
8	5.24484	8	5.33328	8	5.41827	8	5.50008
9	5.24665	9	5.33501	9	5.41993	9	5.50169
0.0910	5.24845	0.0960	5.33674	0.1010	5.42160	0.1060	5.50329
1	5.25025	1	5.33847	1	5.42326	1	5.50489
2	5.25205	2	5.34020	2	5.42493	2	5.50650
3	5.25385	3	5.34193	3	5.42659	3	5.50810
4	5.25565	4	5.34366	4	5.42825	4	5.50970
5	5.25744	5	5.34538	5	5.42991	5	5.51130
6	5.25924	6	5.34710	6	5.43156	6	5.51289
7	5.26103	7	5.34882	7	5.43322	7	5.51449
8	5.26282	8	5.35054	8	5.43488	8	5.51608
9	5.26461	9	5.35226	9	5.43653	9	5.51768
0.0920	5.26640	0.0970	5.35398	0.1020	5.43818	0.1070	5.51927
1	5.26819	1	5.35570	1	5.43983	1	5.52086
2	5.26997	2	5.35741	2	5.44149	2	5.52245
3	5.27175	3	5.35913	3	5.44313	3	5.52404
4	5.27354	4	5.36084	4	5.44478	4	5.52563
5	5.27532	5	5.36255	5	5.44643	5	5.52722
6	5.27710	6	5.36426	6	5.44807	6	5.52880
7	5.27887	7	5.36597	7	5.44972	7	5.53039
8	5.28065	8	5.36767	8	5.45136	8	5.53197
9	5.28243	9	5.36938	9	5.45300	9	5.53355
0.0930	5.28420	0.0980	5.37108	0.1030	5.45464	0.1080	5.53514
1	5.28597	1	5.37279	1	5.45628	1	5.53672
2	5.28774	2	5.37449	2	5.45792	2	5.53830
3	5.28951	3	5.37619	3	5.45956	3	5.53987
4	5.29128	4	5.37789	4	5.46119	4	5.54145
5	5.29305	5	5.37958	5	5.46283	5	5.54303
6	5.29481	6	5.38128	6	5.46446	6	5.54460
7	5.29657	7	5.38297	7	5.46609	7	5.54617
8	5.29834	8	5.38467	8	5.46772	8	5.54775
9	5.30010	9	5.38636	9	5.46935	9	5.54932
0.0940	5.30186	0.0990	5.38805	0.1040	5.47098	0.1090	5.55089
1	5.30361	1	5.38974	1	5.47261	1	5.55246
2	5.30537	2	5.39143	2	5.47423	2	5.55402
3	5.30712	3	5.39312	3	5.47586	3	5.55559
4	5.30888	4	5.39480	4	5.47748	4	5.55716
5	5.31063	5	5.39649	5	5.47910	5	5.55872
6	5.31238	6	5.39817	6	5.48072	6	5.56028
7	5.31413	7	5.39985	7	5.48234	7	5.56185
8	5.31588	8	5.40153	8	5.48396	8	5.56341
9	5.31762	9	5.40321	9	5.48558	9	5.56497
0.0950	5.31937	0.1000	5.40489	0.1050	5.48719	0.1100	5.56653

Tafel III.

<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.
0.1100	5.56653	0.1150	5.64310	0.1200	5.71712	0.1250	5.78873
1	5.56808	1	5.64461	1	5.71857	1	5.79014
2	5.56964	2	5.64611	2	5.72002	2	5.79155
3	5.57120	3	5.64761	3	5.72148	3	5.79296
4	5.57275	4	5.64912	4	5.72293	4	5.79436
5	5.57431	5	5.65062	5	5.72438	5	5.79577
6	5.57586	6	5.65212	6	5.72583	6	5.79717
7	5.57741	7	5.65362	7	5.72728	7	5.79858
8	5.57896	8	5.65511	8	5.72873	8	5.79998
9	5.58051	9	5.65661	9	5.73018	9	5.80138
0.1110	5.58206	0.1160	5.65811	0.1210	5.73162	0.1260	5.80278
1	5.58360	1	5.65960	1	5.73307	1	5.80418
2	5.58515	2	5.66109	2	5.73452	2	5.80558
3	5.58669	3	5.66259	3	5.73596	3	5.80698
4	5.58824	4	5.66408	4	5.73740	4	5.80838
5	5.58978	5	5.66557	5	5.73884	5	5.80977
6	5.59132	6	5.66706	6	5.74029	6	5.81117
7	5.59286	7	5.66855	7	5.74173	7	5.81256
8	5.59440	8	5.67003	8	5.74316	8	5.81396
9	5.59594	9	5.67152	9	5.74460	9	5.81535
0.1120	5.59748	0.1170	5.67301	0.1220	5.74604	0.1270	5.81674
1	5.59901	1	5.67449	1	5.74748	1	5.81813
2	5.60055	2	5.67597	2	5.74891	2	5.81952
3	5.60208	3	5.67746	3	5.75035	3	5.82091
4	5.60362	4	5.67894	4	5.75178	4	5.82230
5	5.60515	5	5.68042	5	5.75321	5	5.82369
6	5.60668	6	5.68190	6	5.75464	6	5.82508
7	5.60821	7	5.68338	7	5.75608	7	5.82646
8	5.60974	8	5.68485	8	5.75751	8	5.82785
9	5.61126	9	5.68633	9	5.75893	9	5.82923
0.1130	5.61279	0.1180	5.68781	0.1230	5.76036	0.1280	5.83062
1	5.61432	1	5.68928	1	5.76179	1	5.83200
2	5.61584	2	5.69076	2	5.76322	2	5.83338
3	5.61736	3	5.69223	3	5.76464	3	5.83476
4	5.61889	4	5.69370	4	5.76607	4	5.83614
5	5.62041	5	5.69517	5	5.76749	5	5.83752
6	5.62193	6	5.69664	6	5.76891	6	5.83890
7	5.62345	7	5.69811	7	5.77033	7	5.84028
8	5.62497	8	5.69958	8	5.77175	8	5.84165
9	5.62648	9	5.70104	9	5.77317	9	5.84303
0.1140	5.62800	0.1190	5.70251	0.1240	5.77459	0.1290	5.84440
1	5.62951	1	5.70397	1	5.77601	1	5.84578
2	5.63103	2	5.70544	2	5.77743	2	5.84715
3	5.63254	3	5.70690	3	5.77884	3	5.84852
4	5.63405	4	5.70836	4	5.78026	4	5.84990
5	5.63556	5	5.70982	5	5.78167	5	5.85127
6	5.63707	6	5.71128	6	5.78309	6	5.85264
7	5.63858	7	5.71274	7	5.78450	7	5.85400
8	5.64009	8	5.71420	8	5.78591	8	5.85537
9	5.64160	9	5.71566	9	5.78732	9	5.85674
0.1150	5.64310	0.1200	5.71712	0.1250	5.78873	0.1300	5.85811

Tafel III.

<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.
0.1300	5.85811	0.1350	5.92538	0.1400	5.99066	0.1450	6.05408
1	5.85947	1	5.92670	1	5.99195	1	6.05533
2	5.86084	2	5.92802	2	5.99324	2	6.05658
3	5.86220	3	5.92935	3	5.99452	3	6.05783
4	5.86356	4	5.93067	4	5.99580	4	6.05908
5	5.86493	5	5.93199	5	5.99709	5	6.06032
6	5.86629	6	5.93331	6	5.99837	6	6.06157
7	5.86765	7	5.93463	7	5.99965	7	6.06282
8	5.86901	8	5.93595	8	6.00093	8	6.06406
9	5.87037	9	5.93727	9	6.00221	9	6.06531
0.1310	5.87172	0.1360	5.93859	0.1410	6.00349	0.1460	6.06655
1	5.87308	1	5.93990	1	6.00477	1	6.06779
2	5.87444	2	5.94122	2	6.00605	2	6.06904
3	5.87579	3	5.94254	3	6.00733	3	6.07028
4	5.87715	4	5.94385	4	6.00860	4	6.07152
5	5.87850	5	5.94516	5	6.00988	5	6.07276
6	5.87986	6	5.94648	6	6.01116	6	6.07400
7	5.88121	7	5.94779	7	6.01243	7	6.07524
8	5.88256	8	5.94910	8	6.01370	8	6.07647
9	5.88391	9	5.95041	9	6.01498	9	6.07771
0.1320	5.88526	0.1370	5.95172	0.1420	6.01625	0.1470	6.07895
1	5.88661	1	5.95303	1	6.01752	1	6.08019
2	5.88796	2	5.95434	2	6.01879	2	6.08142
3	5.88930	3	5.95565	3	6.02006	3	6.08266
4	5.89065	4	5.95695	4	6.02133	4	6.08389
5	5.89200	5	5.95826	5	6.02260	5	6.08512
6	5.89334	6	5.95956	6	6.02387	6	6.08635
7	5.89468	7	5.96087	7	6.02513	7	6.08759
8	5.89603	8	5.96217	8	6.02640	8	6.08882
9	5.89737	9	5.96348	9	6.02767	9	6.09005
0.1330	5.89871	0.1380	5.96478	0.1430	6.02893	0.1480	6.09128
1	5.90005	1	5.96608	1	6.03020	1	6.09251
2	5.90139	2	5.96738	2	6.03146	2	6.09374
3	5.90273	3	5.96868	3	6.03272	3	6.09496
4	5.90407	4	5.96998	4	6.03398	4	6.09619
5	5.90541	5	5.97128	5	6.03525	5	6.09742
6	5.90674	6	5.97258	6	6.03651	6	6.09864
7	5.90808	7	5.97387	7	6.03777	7	6.09987
8	5.90942	8	5.97517	8	6.03903	8	6.10109
9	5.91075	9	5.97646	9	6.04028	9	6.10232
0.1340	5.91208	0.1390	5.97776	0.1440	6.04154	0.1490	6.10354
1	5.91342	1	5.97905	1	6.04280	1	6.10476
2	5.91475	2	5.98035	2	6.04406	2	6.10598
3	5.91608	3	5.98164	3	6.04531	3	6.10720
4	5.91741	4	5.98293	4	6.04657	4	6.10843
5	5.91874	5	5.98422	5	6.04782	5	6.10964
6	5.92007	6	5.98551	6	6.04907	6	6.11086
7	5.92140	7	5.98680	7	6.05033	7	6.11208
8	5.92272	8	5.98809	8	6.05158	8	6.11330
9	5.92405	9	5.98938	9	6.05283	9	6.11452
0.1350	5.92538	0.1400	5.99066	0.1450	6.05408	0.1500	6.11573

Tafel III.

<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.
0.1500	6.11573	0.1550	6.17571	0.1600	6.23410	0.1650	6.29098
1	6.11695	1	6.17689	1	6.23525	1	6.29210
2	6.11816	2	6.17808	2	6.23640	2	6.29322
3	6.11938	3	6.17926	3	6.23755	3	6.29435
4	6.12059	4	6.18044	4	6.23870	4	6.29547
5	6.12180	5	6.18162	5	6.23985	5	6.29659
6	6.12302	6	6.18280	6	6.24100	6	6.29771
7	6.12423	7	6.18398	7	6.24215	7	6.29883
8	6.12544	8	6.18516	8	6.24330	8	6.29994
9	6.12665	9	6.18634	9	6.24445	9	6.30106
0.1510	6.12786	0.1560	6.18751	0.1610	6.24559	0.1660	6.30218
1	6.12907	1	6.18869	1	6.24674	1	6.30330
2	6.13028	2	6.18987	2	6.24789	2	6.30441
3	6.13148	3	6.19104	3	6.24903	3	6.30553
4	6.13269	4	6.19222	4	6.25018	4	6.30664
5	6.13390	5	6.19339	5	6.25132	5	6.30776
6	6.13510	6	6.19456	6	6.25246	6	6.30887
7	6.13631	7	6.19574	7	6.25360	7	6.30999
8	6.13751	8	6.19691	8	6.25475	8	6.31110
9	6.13872	9	6.19808	9	6.25589	9	6.31221
0.1520	6.13992	0.1570	6.19925	0.1620	6.25703	0.1670	6.31332
1	6.14112	1	6.20042	1	6.25817	1	6.31444
2	6.14232	2	6.20159	2	6.25931	2	6.31555
3	6.14353	3	6.20276	3	6.26045	3	6.31666
4	6.14473	4	6.20393	4	6.26159	4	6.31777
5	6.14593	5	6.20510	5	6.26272	5	6.31887
6	6.14712	6	6.20627	6	6.26386	6	6.31998
7	6.14832	7	6.20743	7	6.26500	7	6.32109
8	6.14952	8	6.20860	8	6.26613	8	6.32220
9	6.15072	9	6.20976	9	6.26727	9	6.32331
0.1530	6.15192	0.1580	6.21093	0.1630	6.26840	0.1680	6.32441
1	6.15311	1	6.21209	1	6.26954	1	6.32552
2	6.15431	2	6.21326	2	6.27067	2	6.32662
3	6.15550	3	6.21442	3	6.27180	3	6.32773
4	6.15669	4	6.21558	4	6.27294	4	6.32883
5	6.15789	5	6.21675	5	6.27407	5	6.32993
6	6.15908	6	6.21791	6	6.27520	6	6.33104
7	6.16027	7	6.21907	7	6.27633	7	6.33214
8	6.16146	8	6.22023	8	6.27746	8	6.33324
9	6.16265	9	6.22139	9	6.27859	9	6.33434
0.1540	6.16384	0.1590	6.22255	0.1640	6.27972	0.1690	6.33544
1	6.16503	1	6.22370	1	6.28085	1	6.33654
2	6.16622	2	6.22486	2	6.28198	2	6.33764
3	6.16741	3	6.22602	3	6.28310	3	6.33874
4	6.16860	4	6.22717	4	6.28423	4	6.33984
5	6.16979	5	6.22833	5	6.28536	5	6.34094
6	6.17097	6	6.22949	6	6.28648	6	6.34204
7	6.17216	7	6.23064	7	6.28761	7	6.34313
8	6.17334	8	6.23179	8	6.28873	8	6.34423
9	6.17453	9	6.23295	9	6.28986	9	6.34532
0.1550	6.17571	0.1600	6.23410	0.1650	6.29098	0.1700	6.34642

Tafel III.

<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.
0.1700	6.34642	0.1750	6.40049	0.1800	6.45325	0.1850	6.50476
1	6.34751	1	6.40156	1	6.45429	1	6.50577
2	6.34861	2	6.40262	2	6.45533	2	6.50679
3	6.34970	3	6.40369	3	6.45637	3	6.50781
4	6.35080	4	6.40476	4	6.45742	4	6.50882
5	6.35189	5	6.40582	5	6.45846	5	6.50984
6	6.35298	6	6.40689	6	6.45950	6	6.51086
7	6.35407	7	6.40795	7	6.46053	7	6.51187
8	6.35516	8	6.40902	8	6.46157	8	6.51288
9	6.35625	9	6.41008	9	6.46261	9	6.51390
0.1710	6.35734	0.1760	6.41114	0.1810	6.46365	0.1860	6.51491
1	6.35843	1	6.41221	1	6.46469	1	6.51593
2	6.35952	2	6.41327	2	6.46572	2	6.51694
3	6.36061	3	6.41433	3	6.46676	3	6.51795
4	6.36169	4	6.41539	4	6.46780	4	6.51896
5	6.36278	5	6.41645	5	6.46883	5	6.51997
6	6.36387	6	6.41751	6	6.46987	6	6.52098
7	6.36495	7	6.41857	7	6.47090	7	6.52199
8	6.36604	8	6.41963	8	6.47193	8	6.52300
9	6.36712	9	6.42069	9	6.47297	9	6.52401
0.1720	6.36821	0.1770	6.42175	0.1820	6.47400	0.1870	6.52502
1	6.36929	1	6.42280	1	6.47503	1	6.52603
2	6.37038	2	6.42386	2	6.47606	2	6.52704
3	6.37146	3	6.42492	3	6.47709	3	6.52804
4	6.37254	4	6.42597	4	6.47813	4	6.52905
5	6.37362	5	6.42703	5	6.47916	5	6.53006
6	6.37470	6	6.42808	6	6.48019	6	6.53106
7	6.37578	7	6.42914	7	6.48122	7	6.53207
8	6.37686	8	6.43019	8	6.48224	8	6.53307
9	6.37794	9	6.43125	9	6.48327	9	6.53408
0.1730	6.37902	0.1780	6.43230	0.1830	6.48430	0.1880	6.53508
1	6.38010	1	6.43335	1	6.48533	1	6.53609
2	6.38118	2	6.43440	2	6.48635	2	6.53709
3	6.38226	3	6.43545	3	6.48738	3	6.53809
4	6.38333	4	6.43651	4	6.48841	4	6.53909
5	6.38441	5	6.43756	5	6.48943	5	6.54009
6	6.38548	6	6.43861	6	6.49046	6	6.54110
7	6.38656	7	6.43965	7	6.49148	7	6.54210
8	6.38763	8	6.44070	8	6.49251	8	6.54310
9	6.38871	9	6.44175	9	6.49353	9	6.54410
0.1740	6.38978	0.1790	6.44280	0.1840	6.49455	0.1890	6.54510
1	6.39086	1	6.44385	1	6.49558	1	6.54610
2	6.39193	2	6.44489	2	6.49660	2	6.54709
3	6.39300	3	6.44594	3	6.49762	3	6.54809
4	6.39407	4	6.44699	4	6.49864	4	6.54909
5	6.39514	5	6.44803	5	6.49956	5	6.55009
6	6.39621	6	6.44908	6	6.50068	6	6.55108
7	6.39728	7	6.45012	7	6.50170	7	6.55208
8	6.39835	8	6.45116	8	6.50272	8	6.55307
9	6.39942	9	6.45221	9	6.50374	9	6.55407
0.1750	6.40049	0.1800	6.45325	0.1850	6.50476	0.1900	6.55506

Tafel III.

<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.
0.1900	6.55506	0.1950	6.60422	0.2000	6.65228	0.2050	6.69927
1	6.55606	1	6.60519	1	6.65323	1	6.70020
2	6.55705	2	6.60616	2	6.65418	2	6.70113
3	6.55805	3	6.60714	3	6.65512	3	6.70206
4	6.55904	4	6.60811	4	6.65607	4	6.70298
5	6.56003	5	6.60908	5	6.65702	5	6.70391
6	6.56102	6	6.61005	6	6.65797	6	6.70484
7	6.56201	7	6.61101	7	6.65892	7	6.70576
8	6.56301	8	6.61198	8	6.65986	8	6.70669
9	6.56400	9	6.61295	9	6.66081	9	6.70762
0.1910	6.56499	0.1960	6.61392	0.2010	6.66176	0.2060	6.70854
1	6.56598	1	6.61489	1	6.66270	1	6.70947
2	6.56697	2	6.61585	2	6.66365	2	6.71039
3	6.56795	3	6.61682	3	6.66459	3	6.71132
4	6.56894	4	6.61779	4	6.66554	4	6.71224
5	6.56993	5	6.61875	5	6.66648	5	6.71317
6	6.57092	6	6.61972	6	6.66743	6	6.71409
7	6.57190	7	6.62068	7	6.66837	7	6.71501
8	6.57289	8	6.62165	8	6.66931	8	6.71593
9	6.57388	9	6.62261	9	6.67026	9	6.71686
0.1920	6.57486	0.1970	6.62357	0.2020	6.67120	0.2070	6.71778
1	6.57585	1	6.62454	1	6.67214	1	6.71870
2	6.57683	2	6.62550	2	6.67308	2	6.71962
3	6.57782	3	6.62646	3	6.67402	3	6.72054
4	6.57880	4	6.62742	4	6.67496	4	6.72146
5	6.57978	5	6.62838	5	6.67590	5	6.72238
6	6.58077	6	6.62934	6	6.67684	6	6.72330
7	6.58175	7	6.63031	7	6.67778	7	6.72422
8	6.58273	8	6.63127	8	6.67872	8	6.72514
9	6.58371	9	6.63222	9	6.67966	9	6.72605
0.1930	6.58469	0.1980	6.63318	0.2030	6.68060	0.2080	6.72697
1	6.58567	1	6.63414	1	6.68153	1	6.72789
2	6.58665	2	6.63510	2	6.68247	2	6.72881
3	6.58763	3	6.63606	3	6.68341	3	6.72972
4	6.58861	4	6.63702	4	6.68434	4	6.73064
5	6.58959	5	6.63797	5	6.68528	5	6.73155
6	6.59057	6	6.63893	6	6.68621	6	6.73247
7	6.59155	7	6.63989	7	6.68715	7	6.73338
8	6.59253	8	6.64084	8	6.68808	8	6.73430
9	6.59350	9	6.64180	9	6.68902	9	6.73521
0.1940	6.59448	0.1990	6.64275	0.2040	6.68995	0.2090	6.73613
1	6.59546	1	6.64371	1	6.69089	1	6.73704
2	6.59643	2	6.64466	2	6.69182	2	6.73795
3	6.59741	3	6.64561	3	6.69275	3	6.73886
4	6.59838	4	6.64657	4	6.69368	4	6.73978
5	6.59936	5	6.64752	5	6.69462	5	6.74069
6	6.60033	6	6.64847	6	6.69555	6	6.74160
7	6.60130	7	6.64942	7	6.69648	7	6.74251
8	6.60228	8	6.65037	8	6.69741	8	6.74342
9	6.60325	9	6.65132	9	6.69834	9	6.74433
0.1950	6.60422	0.2000	6.65228	0.2050	6.69927	0.2100	6.74524

Tafel III.

<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.
0.2100	6.74524	0.2150	6.79023	0.2200	6.83427	0.2250	6.87740
1	6.74615	1	6.79112	1	6.83514	1	6.87825
2	6.74706	2	6.79201	2	6.83602	2	6.87911
3	6.74797	3	6.79290	3	6.83689	3	6.87996
4	6.74888	4	6.79379	4	6.83776	4	6.88081
5	6.74978	5	6.79468	5	6.83863	5	6.88167
6	6.75069	6	6.79556	6	6.83950	6	6.88252
7	6.75160	7	6.79645	7	6.84036	7	6.88337
8	6.75250	8	6.79734	8	6.84123	8	6.88422
9	6.75341	9	6.79823	9	6.84210	9	6.88507
0.2110	6.75432	0.2160	6.79911	0.2210	6.84297	0.2260	6.88592
1	6.75522	1	6.80000	1	6.84384	1	6.88677
2	6.75613	2	6.80089	2	6.84471	2	6.88762
3	6.75703	3	6.80177	3	6.84557	3	6.88847
4	6.75794	4	6.80266	4	6.84644	4	6.88932
5	6.75884	5	6.80354	5	6.84731	5	6.89017
6	6.75974	6	6.80443	6	6.84817	6	6.89101
7	6.76065	7	6.80531	7	6.84904	7	6.89186
8	6.76155	8	6.80619	8	6.84990	8	6.89271
9	6.76245	9	6.80708	9	6.85077	9	6.89356
0.2120	6.76335	0.2170	6.80796	0.2220	6.85163	0.2270	6.89440
1	6.76425	1	6.80884	1	6.85250	1	6.89525
2	6.76515	2	6.80972	2	6.85336	2	6.89610
3	6.76606	3	6.81061	3	6.85422	3	6.89694
4	6.76696	4	6.81149	4	6.85509	4	6.89779
5	6.76786	5	6.81237	5	6.85595	5	6.89863
6	6.76876	6	6.81325	6	6.85681	6	6.89948
7	6.76965	7	6.81413	7	6.85767	7	6.90032
8	6.77055	8	6.81501	8	6.85854	8	6.90117
9	6.77145	9	6.81589	9	6.85940	9	6.90201
0.2130	6.77235	0.2180	6.81677	0.2230	6.86026	0.2280	6.90285
1	6.77325	1	6.81765	1	6.86112	1	6.90370
2	6.77414	2	6.81852	2	6.86198	2	6.90454
3	6.77504	3	6.81940	3	6.86284	3	6.90538
4	6.77594	4	6.82028	4	6.86370	4	6.90622
5	6.77683	5	6.82116	5	6.86456	5	6.90706
6	6.77773	6	6.82203	6	6.86542	6	6.90791
7	6.77863	7	6.82291	7	6.86627	7	6.90875
8	6.77952	8	6.82379	8	6.86713	8	6.90959
9	6.78041	9	6.82466	9	6.86799	9	6.91043
0.2140	6.78131	0.2190	6.82554	0.2240	6.86885	0.2290	6.91127
1	6.78220	1	6.82641	1	6.86970	1	6.91211
2	6.78310	2	6.82729	2	6.87056	2	6.91295
3	6.78399	3	6.82816	3	6.87142	3	6.91379
4	6.78488	4	6.82904	4	6.87227	4	6.91462
5	6.78577	5	6.82991	5	6.87313	5	6.91546
6	6.78667	6	6.83078	6	6.87398	6	6.91630
7	6.78756	7	6.83166	7	6.87484	7	6.91714
8	6.78845	8	6.83253	8	6.87569	8	6.91797
9	6.78934	9	6.83340	9	6.87655	9	6.91881
0.2150	6.79023	0.2200	6.83427	0.2250	6.87740	0.2300	6.91965

Tafel III.

b	arg.	b	arg.	b	arg.	b	arg.
0.2300	6.91965	0.2350	6.96104	0.2400	7.00161	0.2450	7.04138
1	6.92048	1	6.96186	1	7.00241	1	7.04217
2	6.92132	2	6.96268	2	7.00322	2	7.04296
3	6.92216	3	6.96350	3	7.00402	3	7.04374
4	6.92299	4	6.96432	4	7.00482	4	7.04453
5	6.92383	5	6.96514	5	7.00562	5	7.04532
6	6.92466	6	6.96595	6	7.00643	6	7.04610
7	6.92549	7	6.96677	7	7.00723	7	7.04689
8	6.92633	8	6.96759	8	7.00803	8	7.04767
9	6.92716	9	6.96840	9	7.00883	9	7.04846
0.2310	6.92799	0.2360	6.96922	0.2410	7.00963	0.2460	7.04924
1	6.92883	1	6.97004	1	7.01043	1	7.05003
2	6.92966	2	6.97085	2	7.01123	2	7.05081
3	6.93049	3	6.97167	3	7.01203	3	7.05160
4	6.93132	4	6.97248	4	7.01283	4	7.05238
5	6.93215	5	6.97330	5	7.01363	5	7.05316
6	6.93299	6	6.97411	6	7.01442	6	7.05395
7	6.93382	7	6.97493	7	7.01522	7	7.05473
8	6.93465	8	6.97574	8	7.01602	8	7.05551
9	6.93548	9	6.97655	9	7.01682	9	7.05629
0.2320	6.93631	0.2370	6.97737	0.2420	7.01761	0.2470	7.05707
1	6.93714	1	6.97818	1	7.01841	1	7.05786
2	6.93796	2	6.97899	2	7.01921	2	7.05864
3	6.93879	3	6.97980	3	7.02000	3	7.05942
4	6.93962	4	6.98062	4	7.02080	4	7.06020
5	6.94045	5	6.98143	5	7.02160	5	7.06098
6	6.94128	6	6.98224	6	7.02239	6	7.06176
7	6.94210	7	6.98305	7	7.02319	7	7.06254
8	6.94293	8	6.98386	8	7.02398	8	7.06332
9	6.94376	9	6.98467	9	7.02477	9	7.06409
0.2330	6.94458	0.2380	6.98548	0.2430	7.02557	0.2480	7.06487
1	6.94541	1	6.98629	1	7.02636	1	7.06565
2	6.94624	2	6.98710	2	7.02716	2	7.06643
3	6.94706	3	6.98791	3	7.02795	3	7.06721
4	6.94789	4	6.98872	4	7.02874	4	7.06798
5	6.94871	5	6.98953	5	7.02953	5	7.06876
6	6.94954	6	6.99033	6	7.03033	6	7.06954
7	6.95036	7	6.99114	7	7.03112	7	7.07032
8	6.95118	8	6.99195	8	7.03191	8	7.07109
9	6.95201	9	6.99276	9	7.03270	9	7.07187
0.2340	6.95283	0.2390	6.99356	0.2440	7.03349	0.2490	7.07264
1	6.95365	1	6.99437	1	7.03428	1	7.07342
2	6.95448	2	6.99517	2	7.03507	2	7.07419
3	6.95530	3	6.99598	3	7.03586	3	7.07497
4	6.95612	4	6.99679	4	7.03665	4	7.07574
5	6.95694	5	6.99759	5	7.03744	5	7.07652
6	6.95776	6	6.99840	6	7.03823	6	7.07729
7	6.95858	7	6.99920	7	7.03902	7	7.07806
8	6.95940	8	7.00000	8	7.03981	8	7.07884
9	6.96022	9	7.00081	9	7.04060	9	7.07961
0.2350	6.96104	0.2400	7.00161	0.2450	7.04138	0.2500	7.08038

Tafel III.

b	arg.	b	arg.	b	arg.	b	arg.
0.250	7.08038	0.300	7.43255	0.350	7.72754	0.400	7.97732
1	7.08809	1	7.43896	1	7.73295	1	7.98192
2	7.09577	2	7.44535	2	7.73834	2	7.98650
3	7.10342	3	7.45172	3	7.74371	3	7.99106
4	7.11104	4	7.45806	4	7.74906	4	7.99561
5	7.11863	5	7.46438	5	7.75440	5	8.00015
6	7.12619	6	7.47068	6	7.75972	6	8.00467
7	7.13373	7	7.47696	7	7.76502	7	8.00918
8	7.14123	8	7.48322	8	7.77030	8	8.01367
9	7.14871	9	7.48945	9	7.77557	9	8.01815
0.260	7.15615	0.310	7.49567	0.360	7.78081	0.410	8.02262
1	7.16357	1	7.50186	1	7.78604	1	8.02707
2	7.17096	2	7.50803	2	7.79126	2	8.03150
3	7.17833	3	7.51418	3	7.79645	3	8.03592
4	7.18566	4	7.52030	4	7.80163	4	8.04033
5	7.19297	5	7.52641	5	7.80680	5	8.04473
6	7.20025	6	7.53250	6	7.81194	6	8.04911
7	7.20751	7	7.53856	7	7.81707	7	8.05347
8	7.21473	8	7.54460	8	7.82218	8	8.05782
9	7.22193	9	7.55063	9	7.82728	9	8.06216
0.270	7.22911	0.320	7.55663	0.370	7.83236	0.420	8.06649
1	7.23625	1	7.56261	1	7.83742	1	8.07080
2	7.24337	2	7.56857	2	7.84247	2	8.07509
3	7.25046	3	7.57451	3	7.84750	3	8.07938
4	7.25753	4	7.58043	4	7.85251	4	8.08365
5	7.26457	5	7.58633	5	7.85751	5	8.08790
6	7.27159	6	7.59221	6	7.86249	6	8.09215
7	7.27858	7	7.59807	7	7.86745	7	8.09638
8	7.28554	8	7.60391	8	7.87240	8	8.10059
9	7.29248	9	7.60973	9	7.87733	9	8.10479
0.280	7.29939	0.330	7.61553	0.380	7.88225	0.430	8.10898
1	7.30628	1	7.62131	1	7.88715	1	8.11316
2	7.31315	2	7.62708	2	7.89204	2	8.11732
3	7.31998	3	7.63282	3	7.89691	3	8.12147
4	7.32680	4	7.63854	4	7.90176	4	8.12561
5	7.33359	5	7.64425	5	7.90660	5	8.12973
6	7.34035	6	7.64993	6	7.91142	6	8.13384
7	7.34709	7	7.65560	7	7.91622	7	8.13794
8	7.35381	8	7.66124	8	7.92102	8	8.14202
9	7.36050	9	7.66687	9	7.92579	9	8.14609
0.290	7.36717	0.340	7.67248	0.390	7.93055	0.440	8.15015
1	7.37381	1	7.67807	1	7.93530	1	8.15420
2	7.38043	2	7.68364	2	7.94003	2	8.15823
3	7.38703	3	7.68919	3	7.94474	3	8.16225
4	7.39360	4	7.69472	4	7.94944	4	8.16626
5	7.40015	5	7.70024	5	7.95412	5	8.17025
6	7.40667	6	7.70574	6	7.95879	6	8.17423
7	7.41318	7	7.71122	7	7.96345	7	8.17820
8	7.41966	8	7.71668	8	7.96809	8	8.18216
9	7.42611	9	7.72212	9	7.97271	9	8.18610
0.300	7.43255	0.350	7.72754	0.400	7.97732	0.450	8.19004

Tafel III.

<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.
0.450	8.19004	0.500	8.37153	0.550	8.52615	0.600	8.65724
1	8.19396	1	8.37487	1	8.52900	1	8.65964
2	8.19786	2	8.37821	2	8.53183	2	8.66203
3	8.20176	3	8.38153	3	8.53465	3	8.66442
4	8.20564	4	8.38484	4	8.53747	4	8.66679
5	8.20951	5	8.38814	5	8.54027	5	8.66916
6	8.21337	6	8.39143	6	8.54307	6	8.67152
7	8.21721	7	8.39471	7	8.54586	7	8.67387
8	8.22105	8	8.39798	8	8.54863	8	8.67621
9	8.22487	9	8.40124	9	8.55140	9	8.67855
0.460	8.22868	0.510	8.40449	0.560	8.55416	0.610	8.68087
1	8.23247	1	8.40772	1	8.55691	1	8.68319
2	8.23626	2	8.41095	2	8.55965	2	8.68550
3	8.24003	3	8.41417	3	8.56238	3	8.68780
4	8.24379	4	8.41737	4	8.56511	4	8.69010
5	8.24754	5	8.42057	5	8.56782	5	8.69238
6	8.25128	6	8.42376	6	8.57052	6	8.69466
7	8.25500	7	8.42693	7	8.57322	7	8.69693
8	8.25872	8	8.43010	8	8.57591	8	8.69919
9	8.26242	9	8.43325	9	8.57858	9	8.70144
0.470	8.26611	0.520	8.43640	0.570	8.58125	0.620	8.70369
1	8.26979	1	8.43953	1	8.58391	1	8.70593
2	8.27346	2	8.44266	2	8.58656	2	8.70816
3	8.27711	3	8.44577	3	8.58920	3	8.71038
4	8.28075	4	8.44888	4	8.59184	4	8.71259
5	8.28439	5	8.45197	5	8.59446	5	8.71480
6	8.28801	6	8.45506	6	8.59708	6	8.71699
7	8.29162	7	8.45813	7	8.59968	7	8.71918
8	8.29521	8	8.46120	8	8.60228	8	8.72137
9	8.29880	9	8.46425	9	8.60487	9	8.72354
0.480	8.30237	0.530	8.46730	0.580	8.60745	0.630	8.72571
1	8.30594	1	8.47033	1	8.61002	1	8.72787
2	8.30949	2	8.47336	2	8.61258	2	8.73002
3	8.31303	3	8.47637	3	8.61514	3	8.73216
4	8.31656	4	8.47938	4	8.61768	4	8.73429
5	8.32008	5	8.48237	5	8.62022	5	8.73642
6	8.32359	6	8.48536	6	8.62275	6	8.73854
7	8.32708	7	8.48834	7	8.62527	7	8.74065
8	8.33057	8	8.49130	8	8.62778	8	8.74276
9	8.33404	9	8.49426	9	8.63028	9	8.74485
0.490	8.33750	0.540	8.49721	0.590	8.63277	0.640	8.74694
1	8.34096	1	8.50014	1	8.63526	1	8.74902
2	8.34440	2	8.50307	2	8.63773	2	8.75110
3	8.34783	3	8.50599	3	8.64020	3	8.75316
4	8.35124	4	8.50890	4	8.64266	4	8.75522
5	8.35465	5	8.51180	5	8.64511	5	8.75727
6	8.35805	6	8.51469	6	8.64755	6	8.75931
7	8.36144	7	8.51757	7	8.64999	7	8.76135
8	8.36481	8	8.52044	8	8.65241	8	8.76338
9	8.36818	9	8.52330	9	8.65483	9	8.76540
0.500	8.37153	0.550	8.52615	0.600	8.65724	0.650	8.76741

Tafel III.

<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.
0.650	8.76741	0.700	8.85876	0.750	8.93299	0.800	8.99152
1	8.76941	1	8.86040	1	8.93431	1	8.99254
2	8.77141	2	8.86204	2	8.93563	2	8.99356
3	8.77340	3	8.86368	3	8.93693	3	8.99456
4	8.77538	4	8.86530	4	8.93824	4	8.99556
5	8.77736	5	8.86692	5	8.93953	5	8.99656
6	8.77933	6	8.86854	6	8.94082	6	8.99755
7	8.78129	7	8.87014	7	8.94210	7	8.99853
8	8.78324	8	8.87174	8	8.94338	8	8.99951
9	8.78519	9	8.87334	9	8.94465	9	9.00049
0.660	8.78712	0.710	8.87492	0.760	8.94591	0.810	9.00145
1	8.78905	1	8.87650	1	8.94717	1	9.00241
2	8.79098	2	8.87808	2	8.94842	2	9.00337
3	8.79289	3	8.87964	3	8.94967	3	9.00432
4	8.79480	4	8.88120	4	8.95091	4	9.00526
5	8.79670	5	8.88276	5	8.95214	5	9.00620
6	8.79860	6	8.88430	6	8.95337	6	9.00714
7	8.80049	7	8.88584	7	8.95459	7	9.00806
8	8.80237	8	8.88737	8	8.95581	8	9.00898
9	8.80424	9	8.88890	9	8.95702	9	9.00990
0.670	8.80610	0.720	8.89042	0.770	8.95822	0.820	9.01081
1	8.80796	1	8.89193	1	8.95942	1	9.01171
2	8.80981	2	8.89344	2	8.96061	2	9.01261
3	8.81165	3	8.89494	3	8.96179	3	9.01351
4	8.81349	4	8.89643	4	8.96297	4	9.01439
5	8.81532	5	8.89792	5	8.96414	5	9.01528
6	8.81714	6	8.89940	6	8.96531	6	9.01615
7	8.81896	7	8.90087	7	8.96647	7	9.01702
8	8.82076	8	8.90234	8	8.96763	8	9.01789
9	8.82257	9	8.90380	9	8.96877	9	9.01875
0.680	8.82436	0.730	8.90526	0.780	8.96992	0.830	9.01960
1	8.82615	1	8.90670	1	8.97105	1	9.02045
2	8.82792	2	8.90814	2	8.97218	2	9.02129
3	8.82970	3	8.90958	3	8.97331	3	9.02213
4	8.83146	4	8.91101	4	8.97443	4	9.02296
5	8.83322	5	8.91243	5	8.97554	5	9.02379
6	8.83497	6	8.91385	6	8.97665	6	9.02461
7	8.83672	7	8.91525	7	8.97775	7	9.02543
8	8.83845	8	8.91666	8	8.97884	8	9.02624
9	8.84018	9	8.91805	9	8.97993	9	9.02704
0.690	8.84191	0.740	8.91944	0.790	8.98101	0.840	9.02784
1	8.84362	1	8.92083	1	8.98209	1	9.02863
2	8.84533	2	8.92220	2	8.98316	2	9.02942
3	8.84703	3	8.92357	3	8.98423	3	9.03020
4	8.84873	4	8.92494	4	8.98529	4	9.03098
5	8.85042	5	8.92630	5	8.98634	5	9.03175
6	8.85210	6	8.92765	6	8.98739	6	9.03252
7	8.85377	7	8.92899	7	8.98843	7	9.03328
8	8.85544	8	8.93033	8	8.98947	8	9.03403
9	8.85710	9	8.93167	9	8.99050	9	9.03478
0.700	8.85876	0.750	8.93299	0.800	8.99152	0.850	9.03553

Tafel III.

b	arg.	b	arg.	b	arg.	b	arg.
0.850	9.03553	0.900	9.06599	0.950	9.08375	1.000	9.08953
1	9.03627	1	9.06647	1	9.08398	1	9.08953
2	9.03700	2	9.06694	2	9.08421	2	9.08952
3	9.03773	3	9.06741	3	9.08443	3	9.08951
4	9.03845	4	9.06787	4	9.08465	4	9.08950
5	9.03917	5	9.06833	5	9.08486	5	9.08948
6	9.03988	6	9.06878	6	9.08507	6	9.08945
7	9.04059	7	9.06922	7	9.08527	7	9.08942
8	9.04129	8	9.06967	8	9.08547	8	9.08939
9	9.04198	9	9.07010	9	9.08566	9	9.08935
0.860	9.04267	0.910	9.07053	0.960	9.08585	1.010	9.08931
1	9.04336	1	9.07096	1	9.08603	1	9.08926
2	9.04404	2	9.07138	2	9.08621	2	9.08921
3	9.04471	3	9.07180	3	9.08638	3	9.08915
4	9.04538	4	9.07221	4	9.08655	4	9.08909
5	9.04605	5	9.07262	5	9.08672	5	9.08902
6	9.04671	6	9.07302	6	9.08687	6	9.08895
7	9.04736	7	9.07342	7	9.08703	7	9.08888
8	9.04801	8	9.07381	8	9.08718	8	9.08880
9	9.04865	9	9.07419	9	9.08733	9	9.08872
0.870	9.04929	0.920	9.07458	0.970	9.08747	1.020	9.08863
1	9.04992	1	9.07495	1	9.08760	1	9.08854
2	9.05055	2	9.07533	2	9.08773	2	9.08844
3	9.05117	3	9.07569	3	9.08786	3	9.08834
4	9.05178	4	9.07605	4	9.08798	4	9.08823
5	9.05240	5	9.07641	5	9.08810	5	9.08812
6	9.05300	6	9.07676	6	9.08821	6	9.08801
7	9.05360	7	9.07711	7	9.08832	7	9.08789
8	9.05420	8	9.07745	8	9.08842	8	9.08777
9	9.05479	9	9.07779	9	9.08852	9	9.08764
0.880	9.05537	0.930	9.07812	0.980	9.08862	1.030	9.08751
1	9.05595	1	9.07845	1	9.08871	1	9.08737
2	9.05653	2	9.07877	2	9.08879	2	9.08723
3	9.05710	3	9.07909	3	9.08887	3	9.08708
4	9.05766	4	9.07940	4	9.08895	4	9.08693
5	9.05822	5	9.07971	5	9.08902	5	9.08678
6	9.05877	6	9.08002	6	9.08908	6	9.08662
7	9.05932	7	9.08031	7	9.08915	7	9.08646
8	9.05987	8	9.08061	8	9.08920	8	9.08629
9	9.06040	9	9.08090	9	9.08926	9	9.08612
0.890	9.06094	0.940	9.08118	0.990	9.08930	1.040	9.08594
1	9.06147	1	9.08146	1	9.08935	1	9.08576
2	9.06199	2	9.08173	2	9.08939	2	9.08558
3	9.06251	3	9.08200	3	9.08942	3	9.08539
4	9.06302	4	9.08227	4	9.08945	4	9.08520
5	9.06353	5	9.08253	5	9.08948	5	9.08500
6	9.06403	6	9.08278	6	9.08950	6	9.08480
7	9.06453	7	9.08303	7	9.08951	7	9.08459
8	9.06502	8	9.08328	8	9.08952	8	9.08438
9	9.06551	9	9.08352	9	9.08953	9	9.08416
0.900	9.06599	0.950	9.08375	1.000	9.08953	1.050	9.08394

Tafel III.

<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.
1.050	9.08394	1.100	9.06751	1.150	9.04070	1.200	9.00389
1	9.08372	1	9.06708	1	9.04006	1	9.00306
2	9.08349	2	9.06664	2	9.03942	2	9.00222
3	9.08326	3	9.06619	3	9.03877	3	9.00137
4	9.08302	4	9.06574	4	9.03812	4	9.00053
5	9.08278	5	9.06529	5	9.03746	5	8.99968
6	9.08253	6	9.06483	6	9.03680	6	8.99882
7	9.08228	7	9.06437	7	9.03614	7	8.99796
8	9.08203	8	9.06391	8	9.03547	8	8.99710
9	9.08177	9	9.06344	9	9.03480	9	8.99623
1.060	9.08151	1.110	9.06297	1.160	9.03412	1.210	8.99536
1	9.08124	1	9.06249	1	9.03345	1	8.99449
2	9.08097	2	9.06201	2	9.03276	2	8.99361
3	9.08069	3	9.06152	3	9.03208	3	8.99273
4	9.08041	4	9.06103	4	9.03138	4	8.99184
5	9.08013	5	9.06054	5	9.03069	5	8.99095
6	9.07984	6	9.06004	6	9.02999	6	8.99006
7	9.07955	7	9.05954	7	9.02929	7	8.98916
8	9.07925	8	9.05903	8	9.02858	8	8.98826
9	9.07895	9	9.05852	9	9.02787	9	8.98736
1.070	9.07864	1.120	9.05801	1.170	9.02715	1.220	8.98645
1	9.07833	1	9.05749	1	9.02644	1	8.98554
2	9.07802	2	9.05697	2	9.02571	2	8.98462
3	9.07770	3	9.05644	3	9.02499	3	8.98370
4	9.07738	4	9.05591	4	9.02426	4	8.98278
5	9.07705	5	9.05538	5	9.02352	5	8.98185
6	9.07672	6	9.05484	6	9.02278	6	8.98092
7	9.07639	7	9.05430	7	9.02204	7	8.97998
8	9.07605	8	9.05375	8	9.02130	8	8.97904
9	9.07570	9	9.05320	9	9.02054	9	8.97810
1.080	9.07535	1.130	9.05264	1.180	9.01979	1.230	8.97716
1	9.07500	1	9.05208	1	9.01903	1	8.97621
2	9.07465	2	9.05152	2	9.01827	2	8.97525
3	9.07429	3	9.05095	3	9.01751	3	8.97429
4	9.07392	4	9.05038	4	9.01674	4	8.97333
5	9.07355	5	9.04981	5	9.01596	5	8.97237
6	9.07318	6	9.04923	6	9.01518	6	8.97140
7	9.07280	7	9.04865	7	9.01440	7	8.97042
8	9.07242	8	9.04806	8	9.01362	8	8.96945
9	9.07203	9	9.04747	9	9.01283	9	8.96847
1.090	9.07164	1.140	9.04687	1.190	9.01204	1.240	8.96748
1	9.07125	1	9.04627	1	9.01124	1	8.96649
2	9.07085	2	9.04567	2	9.01044	2	8.96550
3	9.07045	3	9.04506	3	9.00963	3	8.96451
4	9.07004	4	9.04445	4	9.00882	4	8.96351
5	9.06963	5	9.04384	5	9.00801	5	8.96250
6	9.06921	6	9.04322	6	9.00720	6	8.96150
7	9.06880	7	9.04259	7	9.00638	7	8.96049
8	9.06837	8	9.04196	8	9.00555	8	8.95947
9	9.06794	9	9.04133	9	9.00472	9	8.95845
1.100	9.06751	1.150	9.04070	1.200	9.00389	1.250	8.95743

Tafel III.

<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.
1.250	8.95743	1.300	8.90161	1.350	8.83667	1.400	8.76283
1	8.95641	1	8.90040	1	8.83528	1	8.76126
2	8.95538	2	8.89919	2	8.83389	2	8.75969
3	8.95435	3	8.89797	3	8.83249	3	8.75812
4	8.95331	4	8.89675	4	8.83109	4	8.75654
5	8.95227	5	8.89552	5	8.82969	5	8.75496
6	8.95122	6	8.89430	6	8.82828	6	8.75337
7	8.95018	7	8.89306	7	8.82687	7	8.75179
8	8.94912	8	8.89183	8	8.82545	8	8.75020
9	8.94807	9	8.89059	9	8.82403	9	8.74860
1.260	8.94701	1.310	8.88935	1.360	8.82261	1.410	8.74700
1	8.94595	1	8.88810	1	8.82118	1	8.74540
2	8.94488	2	8.88685	2	8.81975	2	8.74380
3	8.94381	3	8.88559	3	8.81832	3	8.74219
4	8.94274	4	8.88434	4	8.81689	4	8.74058
5	8.94166	5	8.88308	5	8.81545	5	8.73896
6	8.94058	6	8.88181	6	8.81400	6	8.73734
7	8.93949	7	8.88054	7	8.81255	7	8.73572
8	8.93840	8	8.87927	8	8.81110	8	8.73410
9	8.93731	9	8.87800	9	8.80965	9	8.73247
1.270	8.93621	1.320	8.87672	1.370	8.80819	1.420	8.73083
1	8.93511	1	8.87543	1	8.80673	1	8.72920
2	8.93401	2	8.87415	2	8.80527	2	8.72756
3	8.93290	3	8.87286	3	8.80380	3	8.72591
4	8.93179	4	8.87156	4	8.80233	4	8.72427
5	8.93068	5	8.87027	5	8.80085	5	8.72262
6	8.92956	6	8.86897	6	8.79937	6	8.72096
7	8.92844	7	8.86766	7	8.79789	7	8.71931
8	8.92731	8	8.86635	8	8.79640	8	8.71765
9	8.92618	9	8.86504	9	8.79491	9	8.71598
1.280	8.92505	1.330	8.86373	1.380	8.79342	1.430	8.71432
1	8.92391	1	8.86241	1	8.79193	1	8.71265
2	8.92277	2	8.86109	2	8.79043	2	8.71097
3	8.92162	3	8.85976	3	8.78892	3	8.70929
4	8.92048	4	8.85843	4	8.78742	4	8.70761
5	8.91933	5	8.85710	5	8.78590	5	8.70593
6	8.91817	6	8.85576	6	8.78439	6	8.70424
7	8.91701	7	8.85442	7	8.78287	7	8.70255
8	8.91585	8	8.85308	8	8.78135	8	8.70085
9	8.91468	9	8.85173	9	8.77983	9	8.69916
1.290	8.91351	1.340	8.85038	1.390	8.77830	1.440	8.69745
1	8.91234	1	8.84902	1	8.77677	1	8.69575
2	8.91116	2	8.84767	2	8.77523	2	8.69404
3	8.90998	3	8.84630	3	8.77369	3	8.69233
4	8.90880	4	8.84494	4	8.77215	4	8.69061
5	8.90761	5	8.84357	5	8.77061	5	8.68889
6	8.90642	6	8.84220	6	8.76906	6	8.68717
7	8.90522	7	8.84082	7	8.76750	7	8.68544
8	8.90402	8	8.83944	8	8.76595	8	8.68371
9	8.90282	9	8.83806	9	8.76439	9	8.68198
1.300	8.90161	1.350	8.83667	1.400	8.76283	1.450	8.68025

Tafel III.

<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.	<i>b</i>	arg.
1.450	8.68025	1.500	8.58907	1.550	8.48941
1	8.67851	1	8.58716	1	8.48733
2	8.67676	2	8.58525	2	8.48525
3	8.67502	3	8.58333	3	8.48316
4	8.67327	4	8.58141	4	8.48107
5	8.67151	5	8.57948	5	8.47898
6	8.66976	6	8.57756	6	8.47688
7	8.66800	7	8.57563	7	8.47478
8	8.66623	8	8.57369	8	8.47268
9	8.66446	9	8.57175	9	8.47058
1.460	8.66269	1.510	8.56981	1.560	8.46847
1	8.66092	1	8.56787	1	8.46635
2	8.65914	2	8.56592	2	8.46424
3	8.65736	3	8.56397	3	8.46212
4	8.65558	4	8.56202	4	8.45999
5	8.65379	5	8.56006	5	8.45787
6	8.65200	6	8.55810	6	8.45574
7	8.65020	7	8.55613	7	8.45361
8	8.64841	8	8.55416	8	8.45147
9	8.64660	9	8.55219	9	8.44933
1.470	8.64480	1.520	8.55022	1.570	8.44719
1	8.64299	1	8.54824	1	8.44504
2	8.64118	2	8.54626	2	8.44289
3	8.63936	3	8.54427	3	8.44074
4	8.63755	4	8.54229	4	8.43858
5	8.63572	5	8.54029	5	8.43642
6	8.63390	6	8.53830	6	8.43426
7	8.63207	7	8.53630	7	8.43209
8	8.63024	8	8.53430	8	8.42992
9	8.62840	9	8.53229	9	8.42775
1.480	8.62656	1.530	8.53029	1.580	8.42557
1	8.62472	1	8.52827	1	8.42339
2	8.62288	2	8.52626	2	8.42121
3	8.62103	3	8.52424	3	8.41902
4	8.61917	4	8.52222	4	8.41683
5	8.61732	5	8.52019	5	8.41464
6	8.61546	6	8.51816	6	8.41244
7	8.61360	7	8.51613	7	8.41024
8	8.61173	8	8.51410	8	8.40804
9	8.60986	9	8.51206	9	8.40583
1.490	8.60799	1.540	8.51002	1.590	8.40362
1	8.60611	1	8.50797	1	8.40141
2	8.60423	2	8.50592	2	8.39919
3	8.60235	3	8.50387	3	8.39698
4	8.60046	4	8.50181	4	8.39475
5	8.59857	5	8.49975	5	8.39252
6	8.59668	6	8.49769	6	8.39030
7	8.59478	7	8.49563	7	8.38806
8	8.59288	8	8.49356	8	8.38582
9	8.59098	9	8.49148	9	8.38358
1.500	8.58907	1.550	8.48941	1.600	8.38134

Tafel III a.

b	r_i^2	b	r_i^2	b	r_i^2	b	r_i^2
1.500	0.750 000	1.550	0.724 194	1.600	0.696 889	1.650	0.668 250
1	749 500	1	723 662	1	696 329	1	667 665
2	748 999	2	723 130	2	695 768	2	667 079
3	748 497	3	722 597	3	695 206	3	666 493
4	747 995	4	722 063	4	694 645	4	665 906
5	747 492	5	721 529	5	694 082	5	665 319
6	746 988	6	720 994	6	693 519	6	664 732
7	746 484	7	720 458	7	692 956	7	664 144
8	745 979	8	719 922	8	692 392	8	663 555
9	745 473	9	719 385	9	691 827	9	662 966
1.510	0.744 967	1.560	0.718 848	1.610	0.691 262	1.660	0.662 377
1	744 460	1	718 310	1	690 697	1	661 787
2	743 952	2	717 772	2	690 131	2	661 197
3	743 444	3	717 233	3	689 564	3	660 606
4	742 935	4	716 693	4	688 997	4	660 015
5	742 426	5	716 153	5	688 430	5	659 423
6	741 916	6	715 612	6	687 862	6	658 831
7	741 405	7	715 070	7	687 293	7	658 239
8	740 893	8	714 529	8	686 724	8	657 646
9	740 381	9	713 986	9	686 154	9	657 052
1.520	0.739 868	1.570	0.713 443	1.620	0.685 584	1.670	0.656 458
1	739 355	1	712 899	1	685 013	1	655 864
2	738 841	2	712 355	2	684 442	2	655 269
3	738 326	3	711 810	3	683 871	3	654 674
4	737 811	4	711 265	4	683 298	4	654 079
5	737 295	5	710 719	5	682 726	5	653 483
6	736 779	6	710 172	6	682 153	6	652 886
7	736 261	7	709 625	7	681 579	7	652 289
8	735 744	8	709 077	8	681 005	8	651 692
9	735 225	9	708 529	9	680 430	9	651 094
1.530	0.734 706	1.580	0.707 980	1.630	0.679 855	1.680	0.650 496
1	734 186	1	707 431	1	679 279	1	649 897
2	733 666	2	706 881	2	678 703	2	649 298
3	733 145	3	706 331	3	678 126	3	648 699
4	732 623	4	705 780	4	677 549	4	648 099
5	732 101	5	705 228	5	676 972	5	647 499
6	731 578	6	704 676	6	676 394	6	646 898
7	731 055	7	704 123	7	675 815	7	646 297
8	730 531	8	703 570	8	675 236	8	645 695
9	730 006	9	703 016	9	674 656	9	645 093
1.540	0.729 481	1.590	0.702 462	1.640	0.674 076	1.690	0.644 491
1	728 955	1	701 907	1	673 496	1	643 888
2	728 428	2	701 352	2	672 915	2	643 285
3	727 901	3	700 796	3	672 333	3	642 681
4	727 374	4	700 239	4	671 752	4	642 077
5	726 845	5	699 682	5	671 169	5	641 473
6	726 316	6	699 125	6	670 586	6	640 868
7	725 787	7	698 566	7	670 003	7	640 263
8	725 257	8	698 008	8	669 419	8	639 657
9	724 726	9	697 449	9	668 835	9	639 051
1.550	0.724 194	1.600	0.696 889	1.650	0.668 250	1.700	0.638 444

Tafel III a.

b	r_1^2	b	r_1^2	b	r_1^2	b	r_1^2
1.700	0.638 444	1.750	0.607 639	1.800	0.576 000	1.850	0.543 694
1	637 838	1	607 014	1	575 360	1	543 043
2	637 230	2	606 388	2	574 719	2	542 391
3	636 623	3	605 762	3	574 079	3	541 739
4	636 015	4	605 136	4	573 438	4	541 086
5	635 406	5	604 510	5	572 797	5	540 434
6	634 797	6	603 883	6	572 155	6	539 781
7	634 188	7	603 256	7	571 514	7	539 128
8	633 578	8	602 628	8	570 872	8	538 475
9	632 968	9	602 001	9	570 229	9	537 822
1.710	0.632 358	1.760	0.601 372	1.810	0.569 587	1.860	0.537 168
1	631 747	1	600 744	1	568 944	1	536 514
2	631 136	2	600 115	2	568 301	2	535 860
3	630 524	3	599 486	3	567 658	3	535 206
4	629 913	4	598 857	4	567 014	4	534 552
5	629 300	5	598 227	5	566 371	5	533 898
6	628 687	6	597 597	6	565 727	6	533 243
7	628 074	7	596 967	7	565 083	7	532 588
8	627 461	8	596 336	8	564 438	8	531 933
9	626 847	9	595 705	9	563 793	9	531 278
1.720	0.626 233	1.770	0.595 074	1.820	0.563 148	1.870	0.530 623
1	625 618	1	594 442	1	562 503	1	529 967
2	625 003	2	593 811	2	561 858	2	529 312
3	624 388	3	593 178	3	561 212	3	528 656
4	623 772	4	592 546	4	560 566	4	528 000
5	623 156	5	591 913	5	559 920	5	527 344
6	622 540	6	591 280	6	559 274	6	526 687
7	621 923	7	590 647	7	558 627	7	526 031
8	621 306	8	590 013	8	557 980	8	525 374
9	620 688	9	589 379	9	557 333	9	524 717
1.730	0.620 070	1.780	0.588 745	1.830	0.556 686	1.880	0.524 060
1	619 452	1	588 110	1	556 038	1	523 403
2	618 834	2	587 476	2	555 391	2	522 746
3	618 215	3	586 840	3	554 743	3	522 089
4	617 595	4	586 205	4	554 095	4	521 431
5	616 976	5	585 569	5	553 446	5	520 773
6	616 356	6	584 933	6	552 798	6	520 115
7	615 735	7	584 297	7	552 149	7	519 457
8	615 115	8	583 660	8	551 500	8	518 799
9	614 493	9	583 024	9	550 850	9	518 141
1.740	0.613 872	1.790	0.582 386	1.840	0.550 201	1.890	0.517 482
1	613 250	1	581 749	1	549 551	1	516 823
2	612 628	2	581 111	2	548 901	2	516 165
3	612 006	3	580 473	3	548 251	3	515 506
4	611 383	4	579 835	4	547 601	4	514 846
5	610 760	5	579 197	5	546 950	5	514 187
6	610 136	6	578 558	6	546 299	6	513 528
7	609 512	7	577 919	7	545 649	7	512 868
8	608 888	8	577 279	8	544 997	8	512 209
9	608 264	9	576 640	9	544 346	9	511 549
1.750	0.607 639	1.800	0.576 000	1.850	0.543 694	1.900	0.510 889

Tafel III a.

b	η^2	b	η^2
1.900	0.510 889	1.950	0.477 750
1	510 229	1	477 085
2	509 569	2	476 420
3	508 908	3	475 755
4	508 248	4	475 089
5	507 587	5	474 424
6	506 927	6	473 759
7	506 266	7	473 093
8	505 605	8	472 428
9	504 944	9	471 762
1.910	0.504 282	1.960	0.471 097
1	503 621	1	470 431
2	502 960	2	469 765
3	502 298	3	469 100
4	501 636	4	468 434
5	500 975	5	467 768
6	500 313	6	467 102
7	499 651	7	466 436
8	498 989	8	465 770
9	498 326	9	465 104
1.920	0.497 664	1.970	0.464 438
1	497 002	1	463 772
2	496 339	2	463 106
3	495 676	3	462 440
4	495 014	4	461 774
5	494 351	5	461 108
6	493 688	6	460 441
7	493 025	7	459 775
8	492 362	8	459 109
9	491 698	9	458 442
1.930	0.491 035	1.980	0.457 776
1	490 371	1	457 110
2	489 708	2	456 443
3	489 044	3	455 777
4	488 381	4	455 110
5	487 717	5	454 444
6	487 053	6	453 777
7	486 389	7	453 111
8	485 725	8	452 444
9	485 061	9	451 777
1.940	0.484 396	1.990	0.451 111
1	483 732	1	450 444
2	483 068	2	449 778
3	482 403	3	449 111
4	481 739	4	448 444
5	481 074	5	447 778
6	480 409	6	447 111
7	479 745	7	446 444
8	479 080	8	445 778
9	478 415	9	445 111
1.950	0.477 750	2.000	0.444 444

Tafel IV.

α	n	α	n	α	n	α	n
	0.000		0.000		0.000		0.000
1.0000	000000	1.0050	00312	1.0100	01244	1.0150	02792
1	000001	1	00324	1	01269	1	02829
2	000005	2	00337	2	01294	2	02866
3	000011	3	00350	3	01319	3	02904
4	000020	4	00364	4	01345	4	02942
5	000031	5	00377	5	01371	5	02980
6	000045	6	00391	6	01397	6	03018
7	000061	7	00405	7	01424	7	03057
8	000080	8	00419	8	01450	8	03096
9	000101	9	00434	9	01477	9	03135
1.0010	000125	1.0060	00449	1.0110	01504	1.0160	03175
1	000151	1	00464	1	01532	1	03214
2	000180	2	00479	2	01559	2	03254
3	000211	3	00495	3	01587	3	03294
4	000245	4	00510	4	01615	4	03335
5	000281	5	00526	5	01644	5	03375
6	000320	6	00543	6	01672	6	03416
7	000361	7	00559	7	01701	7	03457
8	000405	8	00576	8	01730	8	03499
9	000451	9	00593	9	01760	9	03540
1.0020	000500	1.0070	00610	1.0120	01789	1.0170	03582
1	00055	1	00628	1	01819	1	03624
2	00060	2	00646	2	01849	2	03666
3	00066	3	00664	3	01880	3	03709
4	00072	4	00682	4	01910	4	03752
5	00078	5	00700	5	01941	5	03795
6	00084	6	00719	6	01972	6	03838
7	00091	7	00738	7	02003	7	03882
8	00098	8	00758	8	02035	8	03926
9	00105	9	00777	9	02067	9	03970
1.0030	00112	1.0080	00797	1.0130	02099	1.0180	04014
1	00120	1	00817	1	02131	1	04058
2	00128	2	00837	2	02164	2	04103
3	00136	3	00858	3	02197	3	04148
4	00144	4	00878	4	02230	4	04193
5	00153	5	00899	5	02263	5	04239
6	00162	6	00921	6	02296	6	04285
7	00171	7	00942	7	02330	7	04331
8	00180	8	00964	8	02364	8	04377
9	00190	9	00986	9	02398	9	04423
1.0040	00200	1.0090	01008	1.0140	02433	1.0190	04470
1	00210	1	01030	1	02468	1	04517
2	00220	2	01053	2	02503	2	04564
3	00231	3	01076	3	02538	3	04612
4	00241	4	01099	4	02573	4	04659
5	00253	5	01123	5	02609	5	04707
6	00264	6	01146	6	02645	6	04755
7	00275	7	01170	7	02681	7	04804
8	00287	8	01195	8	02718	8	04852
9	00299	9	01219	9	02755	9	04901
1.0050	00312	1.0100	01244	1.0150	02792	1.0200	04950

Tafel IV.

α	n	α	n	α	n	α	n
	0.000		0.000		0.000		0.000
1.0200	04950	1.0250	07716	1.0300	1108	1.0350	1505
1	05000	1	07778	1	1116	1	1513
2	05050	2	07839	2	1123	2	1522
3	05099	3	07901	3	1130	3	1531
4	05149	4	07963	4	1138	4	1539
5	05200	5	08026	5	1145	5	1548
6	05250	6	08088	6	1153	6	1556
7	05301	7	08151	7	1160	7	1565
8	05352	8	08215	8	1168	8	1574
9	05404	9	08278	9	1175	9	1583
1.0210	05455	1.0260	08342	1.0310	1183	1.0360	1591
1	05507	1	08405	1	1190	1	1600
2	05559	2	08470	2	1198	2	1609
3	05611	3	08534	3	1206	3	1618
4	05664	4	08598	4	1213	4	1627
5	05717	5	08663	5	1221	5	1635
6	05770	6	08728	6	1229	6	1644
7	05823	7	08794	7	1237	7	1653
8	05876	8	08859	8	1244	8	1662
9	05930	9	08925	9	1252	9	1671
1.0220	05984	1.0270	08991	1.0320	1260	1.0370	1680
1	06038	1	09057	1	1268	1	1689
2	06093	2	09124	2	1276	2	1698
3	06148	3	09191	3	1283	3	1707
4	06203	4	09258	4	1291	4	1716
5	06258	5	09325	5	1299	5	1725
6	06313	6	09392	6	1307	6	1735
7	06369	7	09460	7	1315	7	1744
8	06425	8	09528	8	1323	8	1753
9	06481	9	09596	9	1331	9	1762
1.0230	06537	1.0280	09665	1.0330	1339	1.0380	1771
1	06594	1	09733	1	1347	1	1781
2	06651	2	09802	2	1355	2	1790
3	06708	3	09871	3	1363	3	1799
4	06765	4	09941	4	1372	4	1808
5	06823	5	10010	5	1380	5	1818
6	06881	6	10080	6	1388	6	1827
7	06939	7	10150	7	1396	7	1837
8	06997	8	10221	8	1404	8	1846
9	07056	9	10291	9	1413	9	1855
1.0240	07115	1.0290	10362	1.0340	1421	1.0390	1865
1	07174	1	10433	1	1429	1	1874
2	07233	2	10505	2	1437	2	1884
3	07293	3	10576	3	1446	3	1893
4	07352	4	10648	4	1454	4	1903
5	07412	5	10720	5	1463	5	1913
6	07473	6	10792	6	1471	6	1922
7	07533	7	10865	7	1479	7	1932
8	07594	8	10938	8	1488	8	1941
9	07655	9	11011	9	1496	9	1951
1.0250	07716	1.0300	11084	1.0350	1505	1.0400	1961

Tafel IV.

α	n	α	n	α	n	α	n
	0.000		0.000		0.000		0.000
1.0400	1961	1.0450	2476	1.0500	3049	1.0550	3680
1	1970	1	2486	1	3061	1	3693
2	1980	2	2497	2	3073	2	3707
3	1990	3	2508	3	3085	3	3720
4	2000	4	2519	4	3097	4	3733
5	2010	5	2530	5	3109	5	3746
6	2019	6	2541	6	3121	6	3760
7	2029	7	2552	7	3134	7	3773
8	2039	8	2563	8	3146	8	3786
9	2049	9	2574	9	3158	9	3800
1.0410	2059	1.0460	2586	1.0510	3170	1.0560	3813
1	2069	1	2597	1	3183	1	3827
2	2079	2	2608	2	3195	2	3840
3	2089	3	2619	3	3207	3	3854
4	2099	4	2630	4	3220	4	3867
5	2109	5	2641	5	3232	5	3881
6	2119	6	2653	6	3244	6	3894
7	2129	7	2664	7	3257	7	3908
8	2139	8	2675	8	3269	8	3921
9	2149	9	2687	9	3282	9	3935
1.0420	2160	1.0470	2698	1.0520	3294	1.0570	3949
1	2170	1	2709	1	3307	1	3962
2	2180	2	2721	2	3319	2	3976
3	2190	3	2732	3	3332	3	3990
4	2201	4	2743	4	3345	4	4004
5	2211	5	2755	5	3357	5	4017
6	2221	6	2766	6	3370	6	4031
7	2231	7	2778	7	3382	7	4045
8	2242	8	2789	8	3395	8	4059
9	2252	9	2801	9	3408	9	4073
1.0430	2263	1.0480	2812	1.0530	3421	1.0580	4086
1	2273	1	2824	1	3433	1	4100
2	2283	2	2836	2	3446	2	4114
3	2294	3	2847	3	3459	3	4128
4	2304	4	2859	4	3472	4	4142
5	2315	5	2871	5	3485	5	4156
6	2326	6	2882	6	3497	6	4170
7	2336	7	2894	7	3510	7	4184
8	2347	8	2906	8	3523	8	4198
9	2357	9	2918	9	3536	9	4212
1.0440	2368	1.0490	2929	1.0540	3549	1.0590	4227
1	2379	1	2941	1	3562	1	4241
2	2389	2	2953	2	3575	2	4255
3	2400	3	2965	3	3588	3	4269
4	2411	4	2977	4	3601	4	4283
5	2421	5	2989	5	3614	5	4297
6	2432	6	3001	6	3627	6	4312
7	2443	7	3013	7	3641	7	4326
8	2454	8	3025	8	3654	8	4340
9	2465	9	3037	9	3667	9	4355
1.0450	2476	1.0500	3049	1.0550	3680	1.0600	4369

Tafel IV.

α	n	α	n	α	n	α	n
	0.000		0.000		0.000		0.000
1.0600	4369	1.0650	5115	1.0700	5918	1.0750	6777
1	4383	1	5131	1	5934	1	6795
2	4398	2	5146	2	5951	2	6813
3	4412	3	5162	3	5968	3	6830
4	4427	4	5177	4	5985	4	6848
5	4441	5	5193	5	6001	5	6866
6	4455	6	5208	6	6018	6	6884
7	4470	7	5224	7	6035	7	6902
8	4484	8	5240	8	6052	8	6920
9	4499	9	5255	9	6068	9	6938
1.0610	4514	1.0660	5271	1.0710	6085	1.0760	6956
1	4528	1	5287	1	6102	1	6974
2	4543	2	5303	2	6119	2	6992
3	4557	3	5318	3	6136	3	7010
4	4572	4	5334	4	6153	4	7028
5	4587	5	5350	5	6170	5	7046
6	4601	6	5366	6	6187	6	7064
7	4616	7	5382	7	6204	7	7082
8	4631	8	5398	8	6221	8	7100
9	4646	9	5413	9	6238	9	7118
1.0620	4661	1.0670	5429	1.0720	6255	1.0770	7136
1	4675	1	5445	1	6272	1	7155
2	4690	2	5461	2	6289	2	7173
3	4705	3	5477	3	6306	3	7191
4	4720	4	5493	4	6323	4	7209
5	4735	5	5509	5	6340	5	7228
6	4750	6	5525	6	6358	6	7246
7	4765	7	5542	7	6375	7	7264
8	4780	8	5558	8	6392	8	7283
9	4795	9	5574	9	6409	9	7301
1.0630	4810	1.0680	5590	1.0730	6427	1.0780	7320
1	4825	1	5606	1	6444	1	7338
2	4840	2	5622	2	6461	2	7356
3	4855	3	5639	3	6479	3	7375
4	4870	4	5655	4	6496	4	7393
5	4885	5	5671	5	6513	5	7412
6	4900	6	5687	6	6531	6	7430
7	4916	7	5704	7	6548	7	7449
8	4931	8	5720	8	6566	8	7468
9	4946	9	5736	9	6583	9	7486
1.0640	4961	1.0690	5753	1.0740	6601	1.0790	7505
1	4977	1	5769	1	6618	1	7523
2	4992	2	5786	2	6636	2	7542
3	5007	3	5802	3	6653	3	7561
4	5022	4	5819	4	6671	4	7580
5	5038	5	5835	5	6689	5	7598
6	5053	6	5852	6	6706	6	7617
7	5069	7	5868	7	6724	7	7636
8	5084	8	5885	8	6742	8	7655
9	5100	9	5901	9	6759	9	7673
1.0650	5115	1.0700	5918	1.0750	6777	1.0800	7692

Tafel IV.

α	n	α	n	α	n	α	n
	0.000		0.000		0.000		0.001
1.0800	7692	1.0850	8663	1.0900	9689	1.0950	0770
1	7711	1	8683	1	9710	1	0792
2	7730	2	8703	2	9731	2	0814
3	7749	3	8723	3	9752	3	0836
4	7768	4	8743	4	9773	4	0858
5	7787	5	8763	5	9795	5	0881
6	7806	6	8783	6	9816	6	0903
7	7825	7	8803	7	9837	7	0925
8	7844	8	8824	8	9858	8	0948
9	7863	9	8844	9	9879	9	0970
1.0810	7882	1.0860	8864	1.0910	9901	1.0960	0992
1	7901	1	8884	1	9922	1	1015
2	7920	2	8904	2	9943	2	1037
3	7939	3	8925	3	9965	3	1060
4	7959	4	8945	4	9986	4	1082
5	7978	5	8965	5	*0007	5	1105
6	7997	6	8985	6	0029	6	1127
7	8016	7	9006	7	0050	7	1150
8	8035	8	9026	8	0072	8	1172
9	8055	9	9046	9	0093	9	1195
1.0820	8074	1.0870	9067	1.0920	0115	1.0970	1217
1	8093	1	9087	1	0136	1	1240
2	8113	2	9108	2	0158	2	1262
3	8132	3	9128	3	0179	3	1285
4	8151	4	9149	4	0201	4	1308
5	8171	5	9169	5	0223	5	1330
6	8190	6	9190	6	0244	6	1353
7	8210	7	9210	7	0266	7	1376
8	8229	8	9231	8	0287	8	1399
9	8249	9	9251	9	0309	9	1421
1.0830	8268	1.0880	9272	1.0930	0331	1.0980	1444
1	8288	1	9293	1	0353	1	1467
2	8307	2	9313	2	0374	2	1490
3	8327	3	9334	3	0396	3	1513
4	8346	4	9355	4	0418	4	1536
5	8366	5	9375	5	0440	5	1559
6	8386	6	9396	6	0462	6	1581
7	8405	7	9417	7	0483	7	1604
8	8425	8	9438	8	0505	8	1627
9	8445	9	9459	9	0527	9	1650
1.0840	8464	1.0890	9479	1.0940	0549	1.0990	1673
1	8484	1	9500	1	0571	1	1696
2	8504	2	9521	2	0593	2	1720
3	8524	3	9542	3	0615	3	1743
4	8544	4	9563	4	0637	4	1766
5	8564	5	9584	5	0659	5	1789
6	8583	6	9605	6	0681	6	1812
7	8603	7	9626	7	0703	7	1835
8	8623	8	9647	8	0725	8	1858
9	8643	9	9668	9	0748	9	1882
1.0850	8663	1.0900	9689	1.0950	0770	1.1000	1905

Tafel IV.

α	n	α	n	α	n	α	n
	0.001		0.001		0.001		0.001
1.1000	1905	1.1050	3094	1.1100	4336	1.1150	5632
1	1928	1	3118	1	4362	1	5659
2	1951	2	3142	2	4387	2	5685
3	1975	3	3167	3	4413	3	5712
4	1998	4	3191	4	4438	4	5738
5	2021	5	3216	5	4464	5	5765
6	2045	6	3240	6	4489	6	5791
7	2068	7	3265	7	4515	7	5818
8	2091	8	3289	8	4540	8	5845
9	2115	9	3314	9	4566	9	5871
1.1010	2138	1.1060	3338	1.1110	4591	1.1160	5898
1	2162	1	3363	1	4617	1	5925
2	2185	2	3387	2	4643	2	5951
3	2209	3	3412	3	4668	3	5978
4	2232	4	3436	4	4694	4	6005
5	2256	5	3461	5	4720	5	6031
6	2279	6	3486	6	4745	6	6058
7	2303	7	3510	7	4771	7	6085
8	2327	8	3535	8	4797	8	6112
9	2350	9	3560	9	4823	9	6139
1.1020	2374	1.1070	3584	1.1120	4848	1.1170	6166
1	2398	1	3609	1	4874	1	6192
2	2421	2	3634	2	4900	2	6219
3	2445	3	3659	3	4926	3	6246
4	2469	4	3684	4	4952	4	6273
5	2493	5	3708	5	4978	5	6300
6	2516	6	3733	6	5004	6	6327
7	2540	7	3758	7	5030	7	6354
8	2564	8	3783	8	5056	8	6381
9	2588	9	3808	9	5082	9	6408
1.1030	2612	1.1080	3833	1.1130	5108	1.1180	6435
1	2636	1	3858	1	5134	1	6462
2	2660	2	3883	2	5160	2	6490
3	2684	3	3908	3	5186	3	6517
4	2707	4	3933	4	5212	4	6544
5	2731	5	3958	5	5238	5	6571
6	2755	6	3983	6	5264	6	6598
7	2779	7	4008	7	5290	7	6625
8	2804	8	4033	8	5317	8	6653
9	2828	9	4059	9	5343	9	6680
1.1040	2852	1.1090	4084	1.1140	5369	1.1190	6707
1	2876	1	4109	1	5395	1	6734
2	2900	2	4134	2	5421	2	6762
3	2924	3	4159	3	5448	3	6789
4	2948	4	4185	4	5474	4	6816
5	2972	5	4210	5	5500	5	6844
6	2997	6	4235	6	5527	6	6871
7	3021	7	4260	7	5553	7	6899
8	3045	8	4286	8	5580	8	6926
9	3070	9	4311	9	5606	9	6954
1.1050	3094	1.1100	4336	1.1150	5632	1.1200	6981

Tafel IV.

α	n	α	n	α	n	α	n
	0.001		0.001		0.001		0.002
1.1200	6981	1.1250	8382	1.1300	9836	1.1350	1341
1	7009	1	8411	1	9865	1	1371
2	7036	2	8439	2	9895	2	1402
3	7064	3	8468	3	9925	3	1433
4	7091	4	8497	4	9954	4	1463
5	7119	5	8525	5	9984	5	1494
6	7147	6	8554	6	*0014	6	1525
7	7174	7	8583	7	0043	7	1556
8	7202	8	8611	8	0073	8	1586
9	7229	9	8640	9	0103	9	1617
1.1210	7257	1.1260	8669	1.1310	0133	1.1360	1648
1	7285	1	8698	1	0162	1	1679
2	7313	2	8726	2	0192	2	1710
3	7340	3	8755	3	0222	3	1740
4	7368	4	8784	4	0252	4	1771
5	7396	5	8813	5	0282	5	1802
6	7424	6	8842	6	0312	6	1833
7	7452	7	8871	7	0342	7	1864
8	7480	8	8900	8	0372	8	1895
9	7507	9	8928	9	0402	9	1926
1.1220	7535	1.1270	8957	1.1320	0432	1.1370	1957
1	7563	1	8986	1	0462	1	1988
2	7591	2	9015	2	0492	2	2019
3	7619	3	9044	3	0522	3	2050
4	7647	4	9073	4	0552	4	2081
5	7675	5	9103	5	0582	5	2113
6	7703	6	9132	6	0612	6	2144
7	7731	7	9161	7	0642	7	2175
8	7759	8	9190	8	0672	8	2206
9	7787	9	9219	9	0702	9	2237
1.1230	7816	1.1280	9248	1.1330	0733	1.1380	2268
1	7844	1	9277	1	0763	1	2300
2	7872	2	9306	2	0793	2	2331
3	7900	3	9336	3	0823	3	2362
4	7928	4	9365	4	0854	4	2394
5	7956	5	9394	5	0884	5	2425
6	7985	6	9424	6	0914	6	2456
7	8013	7	9453	7	0944	7	2488
8	8041	8	9482	8	0975	8	2519
9	8070	9	9512	9	1005	9	2550
1.1240	8098	1.1290	9541	1.1340	1036	1.1390	2582
1	8126	1	9570	1	1066	1	2613
2	8155	2	9600	2	1096	2	2645
3	8183	3	9629	3	1127	3	2676
4	8211	4	9659	4	1157	4	2708
5	8240	5	9688	5	1188	5	2739
6	8268	6	9718	6	1218	6	2771
7	8297	7	9747	7	1249	7	2802
8	8325	8	9777	8	1280	8	2834
9	8354	9	9806	9	1310	9	2866
1.1250	8382	1.1300	9836	1.1350	1341	1.1400	2897

Tafel IV.

α	n	α	n	α	n	α	n
	0.002		0.002		0.002		0.002
1.1400	2897	1.1450	4505	1.1500	6163	1.1550	7871
1	2929	1	4537	1	6196	1	7906
2	2961	2	4570	2	6230	2	7941
3	2992	3	4603	3	6264	3	7975
4	3024	4	4635	4	6298	4	8010
5	3056	5	4668	5	6331	5	8045
6	3087	6	4701	6	6365	6	8080
7	3119	7	4734	7	6399	7	8114
8	3151	8	4767	8	6433	8	8149
9	3183	9	4799	9	6467	9	8184
1.1410	3215	1.1460	4832	1.1510	6500	1.1560	8219
1	3246	1	4865	1	6534	1	8254
2	3278	2	4898	2	6568	2	8289
3	3310	3	4931	3	6602	3	8324
4	3342	4	4964	4	6636	4	8359
5	3374	5	4997	5	6670	5	8394
6	3406	6	5030	6	6704	6	8428
7	3438	7	5063	7	6738	7	8463
8	3470	8	5096	8	6772	8	8499
9	3502	9	5129	9	6806	9	8534
1.1420	3534	1.1470	5162	1.1520	6840	1.1570	8569
1	3566	1	5195	1	6874	1	8604
2	3598	2	5228	2	6908	2	8639
3	3630	3	5261	3	6942	3	8674
4	3662	4	5294	4	6977	4	8709
5	3695	5	5327	5	7011	5	8744
6	3727	6	5361	6	7045	6	8779
7	3759	7	5394	7	7079	7	8815
8	3791	8	5427	8	7113	8	8850
9	3823	9	5460	9	7148	9	8885
1.1430	3856	1.1480	5493	1.1530	7182	1.1580	8920
1	3888	1	5527	1	7216	1	8956
2	3920	2	5560	2	7250	2	8991
3	3952	3	5593	3	7285	3	9026
4	3985	4	5627	4	7319	4	9062
5	4017	5	5660	5	7353	5	9097
6	4049	6	5693	6	7388	6	9132
7	4082	7	5727	7	7422	7	9168
8	4114	8	5760	8	7457	8	9203
9	4147	9	5794	9	7491	9	9239
1.1440	4179	1.1490	5827	1.1540	7526	1.1590	9274
1	4212	1	5861	1	7560	1	9309
2	4244	2	5894	2	7595	2	9345
3	4277	3	5928	3	7629	3	9380
4	4309	4	5961	4	7664	4	9416
5	4342	5	5995	5	7698	5	9452
6	4374	6	6028	6	7733	6	9487
7	4407	7	6062	7	7767	7	9523
8	4439	8	6096	8	7802	8	9558
9	4472	9	6129	9	7837	9	9594
1.1450	4505	1.1500	6163	1.1550	7871	1.1600	9630

Tafel IV.

α	n	α	n	α	n	α	n
1.1600	0.002	1.1650	0.003	1.1700	0.003	1.1750	0.003
1	9630	1	1438	1	3295	1	5201
2	9665	2	1474	2	3333	2	5240
3	9701	3	1511	3	3370	3	5278
	9737		1548		3408		5317
4	9772	4	1584	4	3446	4	5356
5	9808	5	1621	5	3483	5	5394
6	9844	6	1658	6	3521	6	5433
7	9880	7	1695	7	3559	7	5472
8	9916	8	1732	8	3597	8	5511
9	9951	9	1768	9	3634	9	5549
1.1610	9987	1.1660	1805	1.1710	3672	1.1760	5588
1	*0023	1	1842	1	3710	1	5627
2	0059	2	1879	2	3748	2	5666
3	0095	3	1916	3	3786	3	5705
4	0131	4	1953	4	3824	4	5744
5	0167	5	1990	5	3862	5	5783
6	0203	6	2027	6	3900	6	5821
7	0239	7	2064	7	3938	7	5860
8	0275	8	2101	8	3976	8	5899
9	0311	9	2138	9	4014	9	5938
1.1620	0347	1.1670	2175	1.1720	4052	1.1770	5977
1	0383	1	2212	1	4090	1	6016
2	0419	2	2249	2	4128	2	6055
3	0455	3	2286	3	4166	3	6094
4	0491	4	2323	4	4204	4	6133
5	0527	5	2360	5	4242	5	6172
6	0564	6	2397	6	4280	6	6212
7	0600	7	2434	7	4318	7	6251
8	0636	8	2472	8	4356	8	6290
9	0672	9	2509	9	4395	9	6329
1.1630	0709	1.1680	2546	1.1730	4433	1.1780	6368
1	0745	1	2583	1	4471	1	6407
2	0781	2	2621	2	4509	2	6447
3	0817	3	2658	3	4548	3	6486
4	0854	4	2695	4	4586	4	6525
5	0890	5	2733	5	4624	5	6564
6	0926	6	2770	6	4662	6	6604
7	0963	7	2807	7	4701	7	6643
8	0999	8	2845	8	4739	8	6682
9	1036	9	2882	9	4778	9	6722
1.1640	1072	1.1690	2920	1.1740	4816	1.1790	6761
1	1109	1	2957	1	4854	1	6801
2	1145	2	2994	2	4893	2	6840
3	1182	3	3032	3	4931	3	6879
4	1218	4	3069	4	4970	4	6919
5	1255	5	3107	5	5008	5	6958
6	1291	6	3145	6	5047	6	6998
7	1328	7	3182	7	5085	7	7037
8	1364	8	3220	8	5124	8	7077
9	1401	9	3257	9	5163	9	7116
1.1650	1438	1.1700	3295	1.1750	5201	1.1800	7156

Tafel IV.

α	n	α	n	α	n	α	n
	0.003		0.003		0.004		0.004
1.1800	7156	1.1850	9159	1.1900	1210	1.1950	3309
1	7196	1	9200	1	1252	1	3351
2	7235	2	9240	2	1293	2	3394
3	7275	3	9281	3	1335	3	3436
4	7314	4	9321	4	1376	4	3479
5	7354	5	9362	5	1418	5	3521
6	7394	6	9403	6	1459	6	3564
7	7434	7	9443	7	1501	7	3606
8	7473	8	9484	8	1543	8	3649
9	7513	9	9525	9	1584	9	3691
1.1810	7553	1.1860	9565	1.1910	1626	1.1960	3734
1	7593	1	9606	1	1668	1	3777
2	7632	2	9647	2	1709	2	3819
3	7672	3	9688	3	1751	3	3862
4	7712	4	9729	4	1793	4	3905
5	7752	5	9769	5	1835	5	3947
6	7792	6	9810	6	1876	6	3990
7	7832	7	9851	7	1918	7	4033
8	7872	8	9892	8	1960	8	4076
9	7911	9	9933	9	2002	9	4119
1.1820	7951	1.1870	9974	1.1920	2044	1.1970	4161
1	7991	1	*0015	1	2086	1	4204
2	8031	2	0056	2	2128	2	4247
3	8071	3	0097	3	2170	3	4290
4	8111	4	0138	4	2211	4	4333
5	8151	5	0179	5	2253	5	4376
6	8192	6	0220	6	2295	6	4419
7	8232	7	0261	7	2337	7	4462
8	8272	8	0302	8	2379	8	4505
9	8312	9	0343	9	2421	9	4548
1.1830	8352	1.1880	0384	1.1930	2464	1.1980	4591
1	8392	1	0425	1	2506	1	4634
2	8432	2	0466	2	2548	2	4677
3	8473	3	0507	3	2590	3	4720
4	8513	4	0549	4	2632	4	4763
5	8553	5	0590	5	2674	5	4806
6	8593	6	0631	6	2716	6	4849
7	8634	7	0672	7	2758	7	4892
8	8674	8	0713	8	2801	8	4935
9	8714	9	0755	9	2843	9	4978
1.1840	8755	1.1890	0796	1.1940	2885	1.1990	5022
1	8795	1	0837	1	2927	1	5065
2	8835	2	0879	2	2970	2	5108
3	8876	3	0920	3	3012	3	5151
4	8916	4	0961	4	3054	4	5195
5	8957	5	1003	5	3097	5	5238
6	8997	6	1044	6	3139	6	5281
7	9038	7	1086	7	3181	7	5324
8	9078	8	1127	8	3224	8	5368
9	9118	9	1169	9	3266	9	5411
1.1850	9159	1.1900	1210	1.1950	3309	1.2000	5455

Tafel IV.

α	n	α	n	α	n	α	n
	0.004		0.004		0.004		0.005
1.2000	5455	1.2050	7647	1.2100	9887	1.2150	2173
1	5498	1	7692	1	9932	1	2219
2	5541	2	7736	2	9977	2	2265
3	5585	3	7780	3	*0023	3	2311
4	5628	4	7825	4	0068	4	2358
5	5672	5	7869	5	0113	5	2404
6	5715	6	7914	6	0159	6	2450
7	5759	7	7958	7	0204	7	2496
8	5802	8	8003	8	0250	8	2543
9	5846	9	8047	9	0295	9	2589
1.2010	5889	1.2060	8092	1.2110	0340	1.2160	2635
1	5933	1	8136	1	0386	1	2682
2	5977	2	8181	2	0431	2	2728
3	6020	3	8225	3	0477	3	2775
4	6064	4	8270	4	0522	4	2821
5	6107	5	8314	5	0568	5	2867
6	6151	6	8359	6	0613	6	2914
7	6195	7	8404	7	0659	7	2960
8	6239	8	8448	8	0704	8	3007
9	6282	9	8493	9	0750	9	3053
1.2020	6326	1.2070	8538	1.2120	0796	1.2170	3100
1	6370	1	8582	1	0841	1	3146
2	6414	2	8627	2	0887	2	3193
3	6457	3	8672	3	0933	3	3240
4	6501	4	8717	4	0978	4	3286
5	6545	5	8761	5	1024	5	3333
6	6589	6	8806	6	1070	6	3380
7	6633	7	8851	7	1115	7	3426
8	6677	8	8896	8	1161	8	3473
9	6721	9	8941	9	1207	9	3520
1.2030	6765	1.2080	8986	1.2130	1253	1.2180	3566
1	6809	1	9030	1	1299	1	3613
2	6853	2	9075	2	1344	2	3660
3	6897	3	9120	3	1390	3	3707
4	6941	4	9165	4	1436	4	3753
5	6985	5	9210	5	1482	5	3800
6	7029	6	9255	6	1528	6	3847
7	7073	7	9300	7	1574	7	3894
8	7117	8	9345	8	1620	8	3941
9	7161	9	9390	9	1666	9	3988
1.2040	7205	1.2090	9435	1.2140	1712	1.2190	4034
1	7249	1	9480	1	1758	1	4081
2	7293	2	9525	2	1804	2	4128
3	7338	3	9571	3	1850	3	4175
4	7382	4	9616	4	1896	4	4222
5	7426	5	9661	5	1942	5	4269
6	7470	6	9706	6	1988	6	4316
7	7514	7	9751	7	2034	7	4363
8	7559	8	9796	8	2080	8	4410
9	7603	9	9842	9	2127	9	4457
1.2050	7647	1.2100	9887	1.2150	2173	1.2200	4504

Tafel IV.

α	n	α	n	α	n	α	n
	0.005		0.005		0.005		0.006
1.2200	4504	1.2250	6882	1.2300	9305	1.2350	1773
1	4552	1	6930	1	9354	1	1823
2	4599	2	6978	2	9403	2	1873
3	4646	3	7026	3	9452	3	1922
4	4693	4	7074	4	9501	4	1972
5	4740	5	7122	5	9550	5	2022
6	4787	6	7170	6	9599	6	2072
7	4835	7	7218	7	9648	7	2122
8	4882	8	7267	8	9697	8	2172
9	4929	9	7315	9	9746	9	2222
1.2210	4976	1.2260	7363	1.2310	9795	1.2360	2272
1	5024	1	7411	1	9844	1	2322
2	5071	2	7459	2	9893	2	2372
3	5118	3	7508	3	9942	3	2422
4	5166	4	7556	4	9991	4	2472
5	5213	5	7604	5	*0041	5	2522
6	5260	6	7652	6	0090	6	2572
7	5308	7	7701	7	0139	7	2622
8	5355	8	7749	8	0188	8	2672
9	5403	9	7797	9	0237	9	2723
1.2220	5450	1.2270	7846	1.2320	0287	1.2370	2773
1	5498	1	7894	1	0336	1	2823
2	5545	2	7943	2	0385	2	2873
3	5593	3	7991	3	0435	3	2923
4	5640	4	8039	4	0484	4	2974
5	5688	5	8088	5	0533	5	3024
6	5735	6	8136	6	0583	6	3074
7	5783	7	8185	7	0632	7	3124
8	5830	8	8233	8	0681	8	3175
9	5878	9	8282	9	0731	9	3225
1.2230	5926	1.2280	8330	1.2330	0780	1.2380	3275
1	5973	1	8379	1	0830	1	3326
2	6021	2	8427	2	0879	2	3376
3	6069	3	8476	3	0929	3	3426
4	6116	4	8525	4	0978	4	3477
5	6164	5	8573	5	1028	5	3527
6	6212	6	8622	6	1077	6	3578
7	6259	7	8671	7	1127	7	3628
8	6307	8	8719	8	1177	8	3679
9	6355	9	8768	9	1226	9	3729
1.2240	6403	1.2290	8817	1.2340	1276	1.2390	3780
1	6451	1	8865	1	1325	1	3830
2	6499	2	8914	2	1375	2	3881
3	6546	3	8963	3	1425	3	3931
4	6594	4	9012	4	1474	4	3982
5	6642	5	9061	5	1524	5	4032
6	6690	6	9109	6	1574	6	4083
7	6738	7	9158	7	1624	7	4134
8	6786	8	9207	8	1673	8	4184
9	6834	9	9256	9	1723	9	4235
1.2250	6882	1.2300	9305	1.2350	1773	1.2400	4286

Tafel IV.

α	n	α	n	α	n	α	n
	0.006		0.006		0.006		0.007
1.2400	4286	1.2450	6843	1.2500	9444	1.2550	2090
1	4336	1	6895	1	9497	1	2143
2	4387	2	6946	2	9549	2	2197
3	4438	3	6998	3	9602	3	2250
4	4489	4	7049	4	9654	4	2303
5	4539	5	7101	5	9707	5	2357
6	4590	6	7153	6	9760	6	2410
7	4641	7	7205	7	9812	7	2464
8	4692	8	7256	8	9865	8	2517
9	4743	9	7308	9	9917	9	2571
1.2410	4794	1.2460	7360	1.2510	9970	1.2560	2624
1	4845	1	7412	1	*0023	1	2678
2	4895	2	7463	2	0075	2	2731
3	4946	3	7515	3	0128	3	2785
4	4997	4	7567	4	0181	4	2838
5	5048	5	7619	5	0233	5	2892
6	5099	6	7671	6	0286	6	2946
7	5150	7	7723	7	0339	7	2999
8	5201	8	7774	8	0392	8	3053
9	5252	9	7826	9	0445	9	3106
1.2420	5303	1.2470	7878	1.2520	0497	1.2570	3160
1	5354	1	7930	1	0550	1	3214
2	5405	2	7982	2	0603	2	3268
3	5457	3	8034	3	0656	3	3321
4	5508	4	8086	4	0709	4	3375
5	5559	5	8138	5	0762	5	3429
6	5610	6	8190	6	0815	6	3483
7	5661	7	8242	7	0868	7	3536
8	5712	8	8294	8	0920	8	3590
9	5764	9	8346	9	0973	9	3644
1.2430	5815	1.2480	8399	1.2530	1026	1.2580	3698
1	5866	1	8451	1	1079	1	3752
2	5917	2	8503	2	1132	2	3806
3	5969	3	8555	3	1185	3	3860
4	6020	4	8607	4	1239	4	3914
5	6071	5	8659	5	1292	5	3968
6	6122	6	8712	6	1345	6	4021
7	6174	7	8764	7	1398	7	4075
8	6225	8	8816	8	1451	8	4129
9	6277	9	8868	9	1504	9	4183
1.2440	6328	1.2490	8921	1.2540	1557	1.2590	4237
1	6379	1	8973	1	1610	1	4292
2	6431	2	9025	2	1664	2	4346
3	6482	3	9078	3	1717	3	4400
4	6534	4	9130	4	1770	4	4454
5	6585	5	9182	5	1823	5	4508
6	6637	6	9235	6	1877	6	4562
7	6688	7	9287	7	1930	7	4616
8	6740	8	9340	8	1983	8	4670
9	6791	9	9392	9	2036	9	4725
1.2450	6843	1.2500	9444	1.2550	2090	1.2600	4779

Tafel IV.

α	n	α	n	α	n	α	n
	0.007		0.007		0.008		0.008
1.2600	4779	1.2650	7511	1.2700	0286	1.2750	3104
1	4833	1	7566	1	0342	1	3161
2	4887	2	7621	2	0398	2	3218
3	4941	3	7676	3	0454	3	3275
4	4996	4	7731	4	0510	4	3332
5	5050	5	7787	5	0566	5	3389
6	5104	6	7842	6	0622	6	3445
7	5159	7	7897	7	0678	7	3502
8	5213	8	7952	8	0734	8	3559
9	5267	9	8007	9	0790	9	3616
1.2610	5322	1.2660	8063	1.2710	0847	1.2760	3673
1	5376	1	8118	1	0903	1	3730
2	5431	2	8173	2	0959	2	3787
3	5485	3	8228	3	1015	3	3844
4	5539	4	8284	4	1071	4	3901
5	5594	5	8339	5	1127	5	3958
6	5648	6	8394	6	1183	6	4015
7	5703	7	8450	7	1240	7	4072
8	5757	8	8505	8	1296	8	4129
9	5812	9	8561	9	1352	9	4186
1.2620	5866	1.2670	8616	1.2720	1408	1.2770	4244
1	5921	1	8671	1	1465	1	4301
2	5976	2	8727	2	1521	2	4358
3	6030	3	8782	3	1577	3	4415
4	6085	4	8838	4	1634	4	4472
5	6140	5	8893	5	1690	5	4529
6	6194	6	8949	6	1746	6	4587
7	6249	7	9004	7	1803	7	4644
8	6304	8	9060	8	1859	8	4701
9	6358	9	9115	9	1916	9	4758
1.2630	6413	1.2680	9171	1.2730	1972	1.2780	4816
1	6468	1	9227	1	2029	1	4873
2	6522	2	9282	2	2085	2	4930
3	6577	3	9338	3	2141	3	4988
4	6632	4	9394	4	2198	4	5045
5	6687	5	9449	5	2255	5	5102
6	6742	6	9505	6	2311	6	5160
7	6796	7	9561	7	2368	7	5217
8	6851	8	9616	8	2424	8	5275
9	6906	9	9672	9	2481	9	5332
1.2640	6961	1.2690	9728	1.2740	2537	1.2790	5389
1	7016	1	9784	1	2594	1	5447
2	7071	2	9839	2	2651	2	5504
3	7126	3	9895	3	2707	3	5562
4	7181	4	9951	4	2764	4	5619
5	7236	5	*0007	5	2821	5	5677
6	7291	6	0063	6	2877	6	5735
7	7346	7	0119	7	2934	7	5792
8	7401	8	0174	8	2991	8	5850
9	7456	9	0230	9	3048	9	5907
1.2650	7511	1.2700	0286	1.2750	3104	1.2800	5965

Tafel IV.

α	n	α	n	α	n	α	n
	0.008		0.008		0.009		0.009
1.2800	5965	1.2850	8868	1.2900	1812	1.2950	4798
1	6023	1	8926	1	1872	1	4859
2	6080	2	8985	2	1931	2	4919
3	6138	3	9043	3	1990	3	4979
4	6196	4	9102	4	2050	4	5039
5	6253	5	9160	5	2109	5	5099
6	6311	6	9219	6	2168	6	5160
7	6369	7	9277	7	2228	7	5220
8	6427	8	9336	8	2287	8	5280
9	6484	9	9395	9	2347	9	5340
1.2810	6542	1.2860	9453	1.2910	2406	1.2960	5401
1	6600	1	9512	1	2466	1	5461
2	6658	2	9571	2	2525	2	5521
3	6716	3	9629	3	2585	3	5582
4	6773	4	9688	4	2644	4	5642
5	6831	5	9747	5	2704	5	5702
6	6889	6	9805	6	2763	6	5763
7	6947	7	9864	7	2823	7	5823
8	7005	8	9923	8	2882	8	5884
9	7063	9	9982	9	2942	9	5944
1.2820	7121	1.2870	*0040	1.2920	3002	1.2970	6005
1	7179	1	0099	1	3061	1	6065
2	7237	2	0158	2	3121	2	6126
3	7295	3	0217	3	3181	3	6186
4	7353	4	0276	4	3240	4	6247
5	7411	5	0335	5	3300	5	6307
6	7469	6	0394	6	3360	6	6368
7	7527	7	0453	7	3420	7	6428
8	7585	8	0511	8	3479	8	6489
9	7643	9	0570	9	3539	9	6549
1.2830	7701	1.2880	0629	1.2930	3599	1.2980	6610
1	7760	1	0688	1	3659	1	6671
2	7818	2	0747	2	3719	2	6731
3	7876	3	0806	3	3778	3	6792
4	7934	4	0865	4	3838	4	6853
5	7992	5	0924	5	3898	5	6913
6	8051	6	0984	6	3958	6	6974
7	8109	7	1043	7	4018	7	7035
8	8167	8	1102	8	4078	8	7096
9	8225	9	1161	9	4138	9	7156
1.2840	8284	1.2890	1220	1.2940	4198	1.2990	7217
1	8342	1	1279	1	4258	1	7278
2	8400	2	1338	2	4318	2	7339
3	8459	3	1397	3	4378	3	7400
4	8517	4	1457	4	4438	4	7461
5	8575	5	1516	5	4498	5	7521
6	8634	6	1575	6	4558	6	7582
7	8692	7	1634	7	4618	7	7643
8	8751	8	1694	8	4678	8	7704
9	8809	9	1753	9	4738	9	7765
1.2850	8868	1.2900	1812	1.2950	4798	1.3000	7826

Tafel IV.

α	n	α	n	α	n	α	n
	0.00		0.01		0.01		0.02
1.300	9783	1.350	3032	1.400	6667	1.450	0663
1	9844	1	3101	1	6743	1	0747
2	9905	2	3170	2	6820	2	0830
3	9966	3	3239	3	6896	3	0914
4	*0028	4	3309	4	6973	4	0998
5	0089	5	3378	5	7050	5	1082
6	0151	6	3448	6	7128	6	1166
7	0213	7	3518	7	7205	7	1250
8	0276	8	3588	8	7282	8	1335
9	0338	9	3658	9	7360	9	1419
1.310	0400	1.360	3729	1.410	7438	1.460	1504
1	0463	1	3799	1	7516	1	1589
2	0526	2	3870	2	7594	2	1674
3	0589	3	3941	3	7672	3	1759
4	0652	4	4012	4	7750	4	1844
5	0715	5	4083	5	7829	5	1930
6	0779	6	4154	6	7907	6	2015
7	0843	7	4226	7	7986	7	2101
8	0906	8	4297	8	8065	8	2186
9	0970	9	4369	9	8144	9	2272
1.320	1034	1.370	4441	1.420	8223	1.470	2358
1	1099	1	4513	1	8302	1	2444
2	1163	2	4585	2	8382	2	2531
3	1228	3	4658	3	8462	3	2617
4	1293	4	4730	4	8541	4	2704
5	1358	5	4803	5	8621	5	2790
6	1423	6	4875	6	8701	6	2877
7	1488	7	4948	7	8781	7	2964
8	1553	8	5021	8	8862	8	3051
9	1619	9	5095	9	8942	9	3138
1.330	1685	1.380	5168	1.430	9023	1.480	3226
1	1750	1	5242	1	9103	1	3313
2	1816	2	5315	2	9184	2	3401
3	1883	3	5389	3	9265	3	3489
4	1949	4	5463	4	9346	4	3576
5	2016	5	5537	5	9428	5	3664
6	2082	6	5611	6	9509	6	3753
7	2149	7	5686	7	9591	7	3841
8	2216	8	5760	8	9672	8	3929
9	2283	9	5835	9	9754	9	4018
1.340	2350	1.390	5910	1.440	9836	1.490	4106
1	2418	1	5985	1	9918	1	4195
2	2485	2	6060	2	*0000	2	4284
3	2553	3	6136	3	0083	3	4373
4	2621	4	6211	4	0165	4	4462
5	2689	5	6287	5	0248	5	4552
6	2757	6	6362	6	0331	6	4641
7	2826	7	6438	7	0414	7	4731
8	2894	8	6514	8	0497	8	4820
9	2963	9	6590	9	0580	9	4910
1.350	3032	1.400	6667	1.450	0663	1.500	5000

Tafel IV.

α	n	α	n	α	n	α	n
	0.02		0.02		0.03		0.03
1.500	5000	1.550	9657	1.600	4615	1.650	9858
1	5090	1	9753	1	4718	1	9966
2	5180	2	9850	2	4820	2	*0074
3	5271	3	9946	3	4922	3	0182
4	5361	4	*0043	4	5025	4	0290
5	5452	5	0139	5	5127	5	0398
6	5542	6	0236	6	5230	6	0506
7	5633	7	0333	7	5333	7	0614
8	5724	8	0430	8	5436	8	0723
9	5815	9	0528	9	5539	9	0831
1.510	5906	1.560	0625	1.610	5642	1.660	0940
1	5998	1	0722	1	5745	1	1049
2	6089	2	0820	2	5848	2	1157
3	6181	3	0918	3	5952	3	1266
4	6272	4	1016	4	6055	4	1375
5	6364	5	1114	5	6159	5	1485
6	6456	6	1212	6	6263	6	1594
7	6548	7	1310	7	6367	7	1703
8	6641	8	1408	8	6471	8	1813
9	6733	9	1507	9	6575	9	1922
1.520	6825	1.570	1605	1.620	6679	1.670	2032
1	6918	1	1704	1	6784	1	2142
2	7011	2	1802	2	6888	2	2252
3	7104	3	1901	3	6993	3	2361
4	7197	4	2000	4	7098	4	2472
5	7290	5	2100	5	7202	5	2582
6	7383	6	2199	6	7307	6	2692
7	7476	7	2298	7	7412	7	2802
8	7570	8	2398	8	7518	8	2913
9	7663	9	2497	9	7623	9	3024
1.530	7757	1.580	2597	1.630	7728	1.680	3134
1	7851	1	2697	1	7834	1	3245
2	7945	2	2797	2	7939	2	3356
3	8039	3	2897	3	8045	3	3467
4	8133	4	2997	4	8151	4	3578
5	8227	5	3097	5	8257	5	3689
6	8322	6	3198	6	8363	6	3801
7	8416	7	3298	7	8469	7	3912
8	8511	8	3399	8	8575	8	4024
9	8606	9	3500	9	8681	9	4135
1.540	8701	1.590	3600	1.640	8788	1.690	4247
1	8796	1	3701	1	8894	1	4359
2	8891	2	3802	2	9001	2	4471
3	8986	3	3904	3	9108	3	4583
4	9082	4	4005	4	9215	4	4695
5	9177	5	4106	5	9322	5	4808
6	9273	6	4208	6	9429	6	4920
7	9369	7	4310	7	9536	7	5032
8	9465	8	4411	8	9644	8	5145
9	9561	9	4513	9	9751	9	5258
1.550	9657	1.600	4615	1.650	9858	1.700	5370

Tafel IV.

α	n	α	n	α	n	α	n
	0.04		0.05		0.05		0.06
1.700	5370	1.750	1136	1.800	7143	1.850	3377
1	5483	1	1254	1	7265	1	3504
2	5596	2	1372	2	7388	2	3631
3	5709	3	1490	3	7511	3	3758
4	5822	4	1608	4	7633	4	3885
5	5936	5	1726	5	7756	5	4013
6	6049	6	1845	6	7879	6	4140
7	6163	7	1963	7	8002	7	4268
8	6276	8	2082	8	8125	8	4395
9	6390	9	2200	9	8249	9	4523
1.710	6504	1.760	2319	1.810	8372	1.860	4650
1	6618	1	2438	1	8495	1	4778
2	6732	2	2556	2	8619	2	4906
3	6846	3	2675	3	8742	3	5034
4	6960	4	2794	4	8866	4	5162
5	7074	5	2914	5	8990	5	5290
6	7189	6	3033	6	9114	6	5418
7	7303	7	3152	7	9238	7	5547
8	7418	8	3272	8	9362	8	5675
9	7532	9	3391	9	9486	9	5804
1.720	7647	1.770	3511	1.820	9610	1.870	5932
1	7762	1	3631	1	9734	1	6061
2	7877	2	3750	2	9859	2	6189
3	7992	3	3870	3	9983	3	6318
4	8107	4	3990	4	*0108	4	6447
5	8222	5	4110	5	0232	5	6576
6	8338	6	4231	6	0357	6	6705
7	8453	7	4351	7	0482	7	6834
8	8569	8	4471	8	0607	8	6964
9	8685	9	4592	9	0732	9	7093
1.730	8800	1.780	4712	1.830	0857	1.880	7222
1	8916	1	4833	1	0982	1	7352
2	9032	2	4954	2	1107	2	7481
3	9148	3	5074	3	1233	3	7611
4	9264	4	5195	4	1358	4	7741
5	9381	5	5316	5	1484	5	7870
6	9497	6	5438	6	1609	6	8000
7	9614	7	5559	7	1735	7	8130
8	9730	8	5680	8	1861	8	8260
9	9847	9	5801	9	1987	9	8391
1.740	9964	1.790	5923	1.840	2113	1.890	8521
1	*0080	1	6045	1	2239	1	8651
2	0197	2	6166	2	2365	2	8781
3	0314	3	6288	3	2491	3	8912
4	0431	4	6410	4	2617	4	9042
5	0549	5	6532	5	2744	5	9173
6	0666	6	6654	6	2870	6	9304
7	0783	7	6776	7	2997	7	9435
8	0901	8	6898	8	3124	8	9566
9	1019	9	7020	9	3250	9	9697
1.750	1136	1.800	7143	1.850	3377	1.900	9828

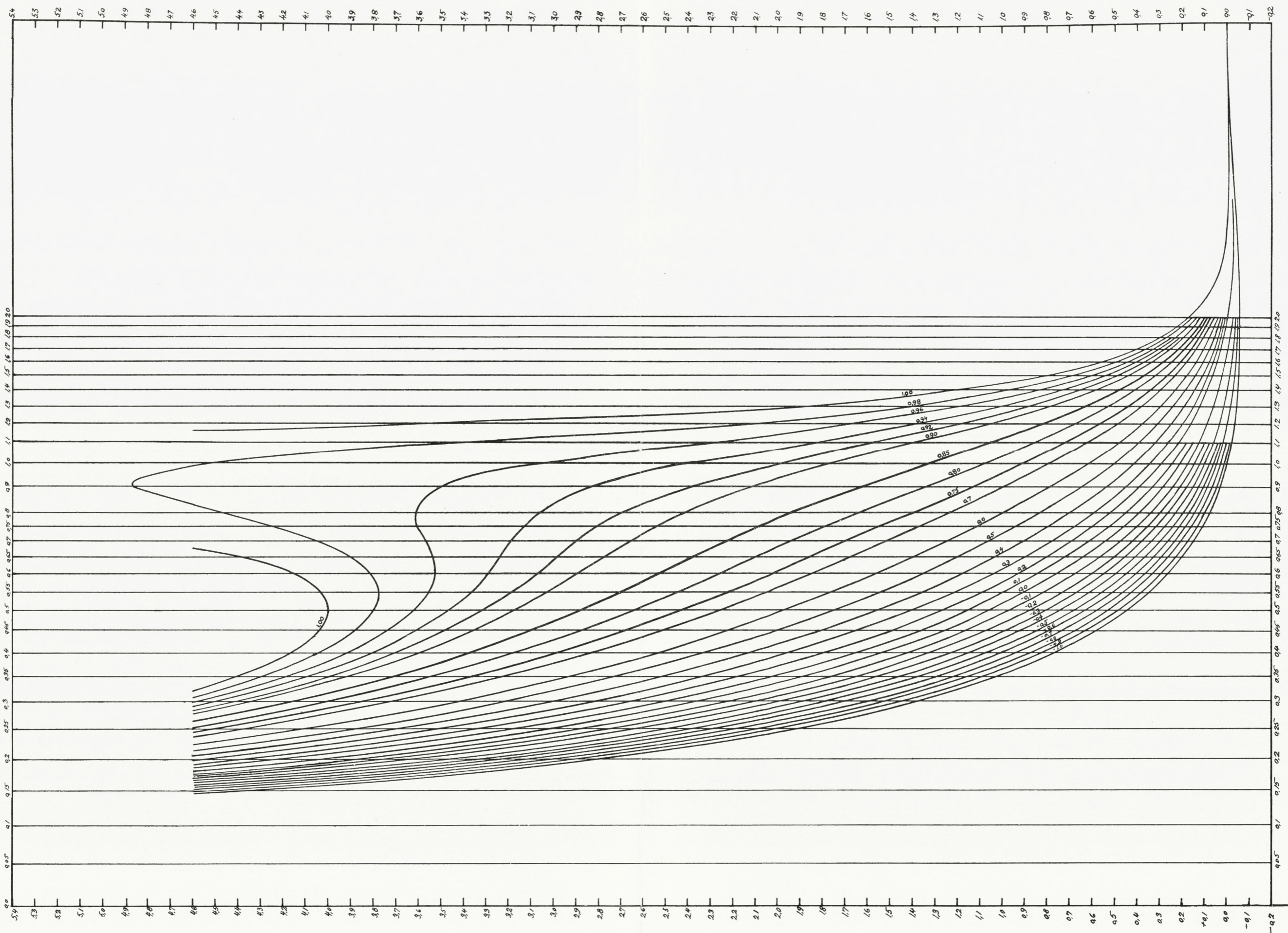
Tafel IV.

α	n	α	n
	0.06		0.07
1.900	9828	1.950	6483
1	9959	1	6618
2	*0090	2	6753
3	0221	3	6889
4	0353	4	7024
5	0484	5	7159
6	0616	6	7295
7	0747	7	7431
8	0879	8	7566
9	1011	9	7702
1.910	1143	1.960	7838
1	1275	1	7974
2	1407	2	8110
3	1539	3	8246
4	1671	4	8382
5	1803	5	8518
6	1936	6	8654
7	2068	7	8791
8	2200	8	8927
9	2333	9	9064
1.920	2466	1.970	9200
1	2599	1	9337
2	2731	2	9474
3	2864	3	9611
4	2997	4	9747
5	3130	5	9884
6	3264	6	*0022
7	3397	7	0159
8	3530	8	0296
9	3663	9	0433
1.930	3797	1.980	0570
1	3930	1	0708
2	4064	2	0845
3	4198	3	0983
4	4332	4	1121
5	4466	5	1258
6	4599	6	1396
7	4733	7	1534
8	4868	8	1672
9	5002	9	1810
1.940	5136	1.990	1948
1	5270	1	2086
2	5405	2	2225
3	5539	3	2363
4	5674	4	2501
5	5809	5	2640
6	5943	6	2778
7	6078	7	2917
8	6213	8	3056
9	6348	9	3194
1.950	6483	2.000	3333

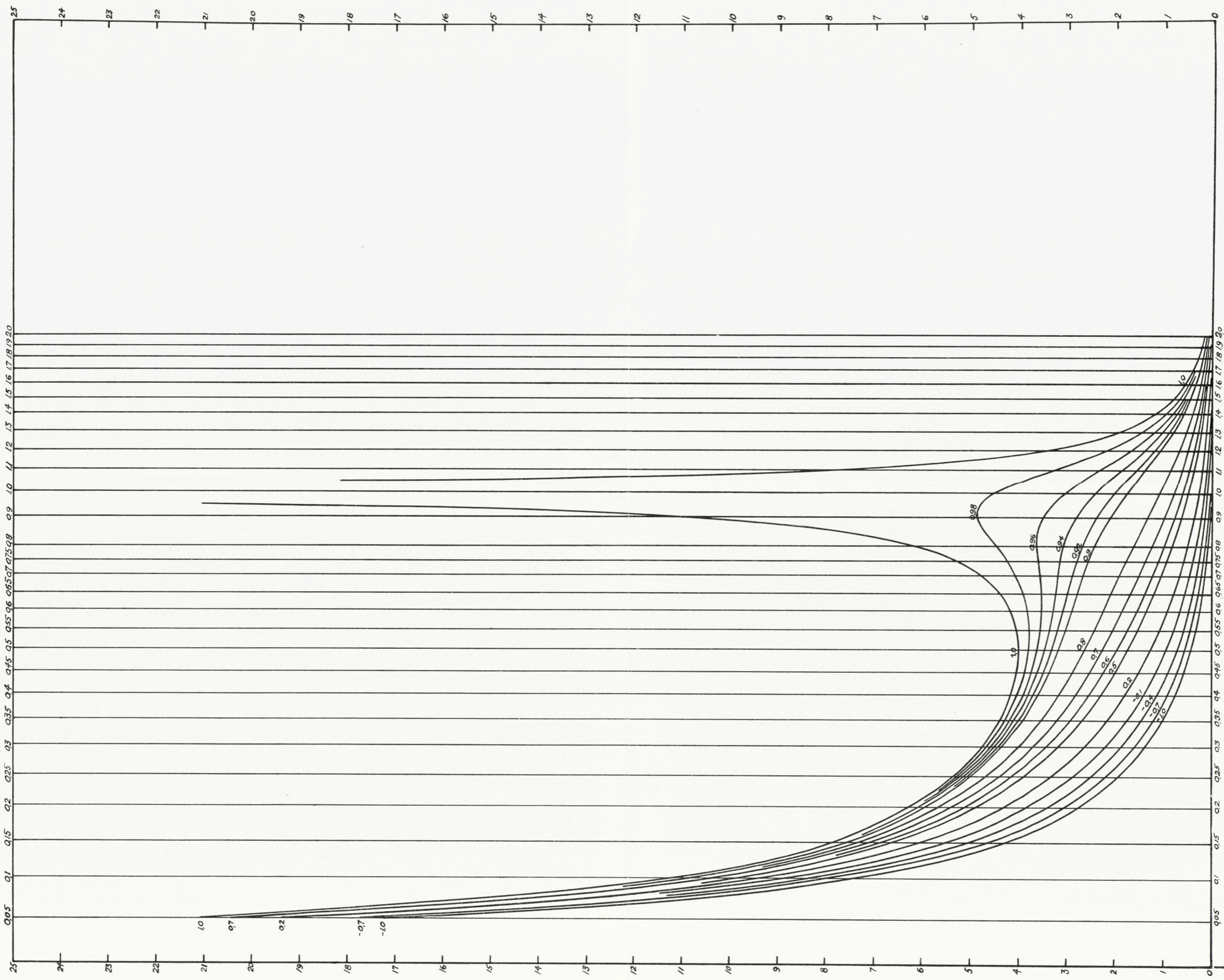
Tafel V.

β^2	$R =$ 0.00	$R =$ 0.01	$R =$ 0.02	$R =$ 0.03	$R =$ 0.04	$R =$ 0.05	$R =$ 0.06	$R =$ 0.07	$R =$ 0.08
	1.0	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9
0.00	0000	9000	8000	7000	6000	5000	4000	3000	2000
1	0000	8997	7995	6992	5990	4987	3984	2981	1978
2	0000	8995	7990	6984	5979	4974	3968	2962	1956
3	0000	8992	7985	6977	5968	4960	3952	2943	1934
4	0000	8990	7979	6969	5958	4947	3935	2924	1912
5	0000	8987	7974	6961	5947	4933	3919	2904	1890
6	0000	8985	7969	6953	5936	4920	3903	2885	1867
7	0000	8982	7964	6945	5926	4906	3886	2866	1845
8	0000	8979	7958	6937	5915	4892	3869	2846	1822
9	0000	8977	7953	6928	5904	4878	3852	2826	1799
0.10	0000	8974	7947	6920	5893	4864	3836	2806	1776
1	0000	8971	7942	6912	5882	4850	3819	2786	1753
2	0000	8968	7936	6904	5870	4836	3801	2766	1730
3	0000	8966	7931	6895	5859	4822	3784	2746	1706
4	0000	8963	7925	6887	5848	4808	3767	2725	1683
5	0000	8960	7920	6878	5836	4793	3749	2705	1659
6	0000	8958	7914	6870	5825	4779	3732	2684	1635
7	0000	8955	7908	6861	5813	4764	3714	2663	1611
8	0000	8952	7903	6853	5802	4750	3696	2642	1587
9	0000	8949	7897	6844	5790	4735	3678	2621	1562
0.20	0000	8946	7891	6835	5778	4720	3660	2600	1538
1	0000	8943	7885	6826	5766	4705	3642	2578	1513
2	0000	8940	7879	6817	5754	4690	3624	2556	1488
3	0000	8937	7873	6808	5742	4674	3605	2535	1463
4	0000	8934	7867	6799	5730	4659	3586	2513	1437
5	0000	8931	7861	6790	5717	4643	3568	2490	1412
6	0000	8928	7855	6781	5705	4628	3549	2468	1386
7	0000	8925	7849	6772	5693	4612	3530	2446	1360
8	0000	8922	7843	6762	5680	4596	3510	2423	1334
9	0000	8919	7837	6753	5667	4580	3491	2400	1307
0.30	0000	8916	7831	6743	5654	4564	3472	2377	1281
1	0000	8913	7824	6734	5642	4548	3452	2354	1254
2	0000	8910	7818	6724	5629	4531	3432	2330	1227
3	0000	8906	7811	6714	5615	4515	3412	2307	1200
4	0000	8903	7805	6704	5602	4498	3392	2283	1172
5	0000	8900	7798	6694	5589	4481	3371	2259	1144
6	0000	8897	7792	6684	5575	4464	3350	2235	1116
7	0000	8894	7785	6674	5562	4447	3330	2210	1088
8	0000	8890	7778	6664	5548	4429	3308	2185	1059
9	0000	8887	7771	6654	5534	4412	3287	2160	1030
0.40	0000	8883	7764	6643	5520	4394	3266	2135	1001
1	0000	8880	7758	6633	5506	4376	3244	2109	0972
2	0000	8876	7750	6622	5492	4358	3222	2084	0942
3	0000	8873	7743	6612	5477	4340	3200	2057	0912
4	0000	8869	7736	6601	5462	4322	3178	2031	0881
5	0000	8866	7729	6590	5448	4303	3155	2004	0851
6	0000	8862	7722	6578	5433	4284	3132	1978	0820
7	0000	8858	7714	6567	5418	4265	3109	1950	0788
8	0000	8855	7707	6556	5402	4246	3086	1923	0756
9	0000	8851	7699	6544	5387	4226	3062	1895	0724
0.50	0000	8847	7692	6533	5371	4206	3038	1866	0691

Die Tafel gibt die Grösse $\left(\frac{\beta}{\beta}\right)^2$ mit den Argumenten β^2 und R .



Nomogramm zur genäherten Bestimmung von ζ_1 (grosser Massstab).



Nomogramm zur genäherten Bestimmung von q_1 (kleiner Masstab).

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.

Mathematisk-fysiske Meddelelser. **X**, 4.

MODUS OPERANDI OF THE AIR-JET PULSATOR

BY

JUL. HARTMANN AND BIRGIT TROLLE

WITH 6 PLATES



KØBENHAVN

HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL

BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI A/S

1930

Introduction.

The air-jet generator for acoustic waves has been described in several papers^{1-4*} together with experiments carried out with a view to throwing a light on the general properties of the said generator. The object of the present paper is to record a series of investigations on the *modus operandi* of the generator. A main member of the same is, as will be known from the papers referred to, an air-jet with a velocity exceeding that of sound. The jet is directed towards the aperture of a cylindrical oscillator or the mouth of a so-called pulsator. There is some reason for believing that the *modus operandi* is in the main — though possibly not exactly — the same with the two devices. As, however, the period of the oscillations, or pulsations, with the pulsator can be made as long as desired while it is generally exceedingly short with the oscillator, it seemed much easier to study the oscillatory process with the former than with the latter device. The pulsator was therefore chosen as the object of observation in the present investigation.

The pulsation phenomenon, as explained in the papers alluded to above, consists in the pulsator alternately filling with and discharging air when the mouth is adjusted in one of the so-called intervals of instability of the jet. The latter intervals in the main coincide with those parts of

* See List of References pag. 60.

the jet in which the pressure read on a pitot-apparatus increases when the pitot-tube or sound is moved along the axis of the jet in the direction of the latter. As the modus operandi of the generator of course depends on the special properties of the particular air-jet employed, we have found it appropriate, or rather necessary, to review the said properties in the first part of our paper.

I

On an Air-Jet with a Velocity exceeding that of Sound.

1. Production of an Air-Jet with a Velocity exceeding that of Sound.

The main properties of the jet in question have proved to be derivable from the laws of a steady, adiabatic and irrotational flow of a frictionless gas^{5,6,7}. From these laws it follows that the characteristics of the flow, that is to say, the pressure p , the density ρ , the temperature θ , the velocity φ , and the area of the cross-section f of the stream-line tube, are determined solely 1: by one of the said quantities, 2: by the mass of air G transmitted per second through the tube, and 3: by the initial condition i. e. the values p_0 , ρ_0 and θ_0 of p , ρ and θ corresponding to $\varphi = 0$. For the said laws may be written:

$$(1)-(3) \quad \frac{\theta}{\theta_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\alpha-1} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} = 1 - \frac{\alpha-1}{2} \cdot \frac{\varphi^2}{\alpha R \theta_0}$$

$$(4) \quad f = \frac{G}{\rho \varphi}.$$

α being the ratio $\frac{c_p}{c_v}$ of the specific heats at constant pressure and constant volume and R the constant of Boyle's law.

A discussion of the equations (1)–(4) shows that if the velocity increases in the direction of the flow, then the pressure, the density, and the temperature will decrease in the same direction. The area f of the cross-section of the

stream-line tube will decrease until the velocity has reached a value equal to the velocity of sound characteristic of the state at the corresponding point of the jet. Hereafter f will increase together with the velocity, which now becomes greater than the velocity of sound corresponding to the state at the point considered.

Applying this to a jet of an ideal gas emitted from a container in which the state is given by p_0 , q_0 , θ_0 and $\varphi = 0$, into the free atmosphere, in which the pressure may be p_e , we may easily see what will be the condition for the production of a jet with a velocity higher than that of sound. The condition is that the jet considered as a bundle of stream-line tubes assumes in one place or other a minimum of cross-section. If it does, the velocity is here determined by

$$(5) \quad \varphi_k^2 = \frac{dp}{dq} = \kappa R \theta_k$$

where θ_k is the temperature in the said cross-section. Inserting this in (1)—(3), the other characteristics of the jet at the least cross-section are found. They are seen to be determined by

$$(6) \text{—}(7) \quad \frac{\theta_k}{\theta_0} = \left(\frac{q_k}{q_0}\right)^{\kappa-1} = \left(\frac{P_k}{P_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = \frac{2}{\kappa+1}.$$

With atmospheric air $\kappa = 1.404$ from which $\frac{P_k}{P_0} = 0.527$ or nearly $\frac{1}{1.9}$ while $\frac{\theta_k}{\theta_0} = \frac{1}{1.202}$. From the pressure relation it follows that an air-jet with a velocity higher than that of sound can only be obtained if the critical pressure p_k is higher than the pressure p_e in the atmosphere into which the jet is emitted. Thus with efflux into the free atmosphere the pressure in the container must be higher

than 1.9 atmospheres or the excess-pressure must be greater than 0.9 atmosphere.

It has been found that if the orifice is given the shape of a Laval-Nozzle, fig. 1, the position of the least cross-section of the jet (or of its several stream-line tubes) does not depend on the ratio $\frac{P_0}{P_e}$, while with an obtuse conical bore, fig. 2, the position, which is always close to the least cross-section of the nozzle, depends in some degree on the said ratio⁸.

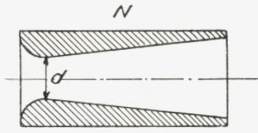


Fig. 1. Laval-Nozzle.

2. Structure of an Air-Jet with a Velocity exceeding that of Sound.

Leaving the nozzle, the jet with the velocity exceeding that of sound will commence by expanding, provided its static pressure is higher than the pressure in the atmosphere into which the jet is emitted. This means that the various particles, in addition to their forward velocity, acquire a radial velocity owing to the difference between the pressure in the jet and the surroundings. The outward motion of the particles will reduce the pressure in the jet, but even after the said pressure has been brought down to the value of the external pressure, the radial motion of the particles will prevail for a while, thereby causing the pressure in the jet to go down below that of the surroundings. The under-pressure in the jet will finally bring the outward motion to an end, and then reverse the direction of the motion so that the particles now move inwards, thereby causing the pressure in the jet to rise again to a value above the external pressure. Now the direction of the motion is again reversed, and the phenomenon described is repeated over and over again. Obviously we must ex-

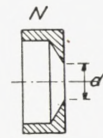


Fig. 2. Obtuse conical Nozzle.

pect the jet to exhibit alternate expansions and contractions of stationary positions with regard to the nozzle.

The structure of a flat jet with a velocity exceeding that of sound discharged through a slit has been investigated theoretically and experimentally by L. Prandtl^{9,10} and his co-workers^{11, 12, 13}

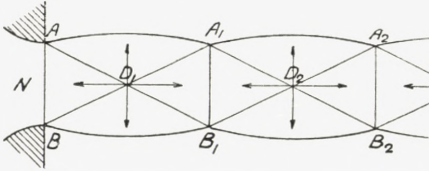


Fig. 3. Structure of Jet with Super Sound-Velocity.

Prandtl's explanation of the structure is based on the simple laws for a homogeneous flow of air with a velocity exceeding that of sound beyond an edge, in the

case in question the edge of the slit through which the jet is discharged. Qualitatively Prandtl's results also apply to the circular jet, the structure of which has been made the subject of several investigations^{14, 15, 16}. The structure to be anticipated on the basis of Prandtl's investigation is indicated in fig. 3. The jet is assumed to be discharged from AB , with a velocity just equal to that of sound. It is divided up in sections, the boundaries of which are A_1B_1 , A_2B_2 , The way in which the sections are formed are, according to Prandtl, as follows. From a point A of the edge of the orifice a rarefaction-wave BAB_1 is emitted. In the wave the pressure increases towards the boundary AB of the wave as indicated by the arrow. The wave is reflected from the surface BB_1 of the jet as the wave BA_1B_1 . The latter is again reflected from the opposite surface as $B_1A_1B_2$ and so on. Obviously waves like that considered are emitted from all points of the edge of the orifice, thus for instance from B , producing in interaction a structure like that shown in fig. 3. The corresponding distribution

of pressure is indicated by the arrows. The pressure rises from a minimum in the centre D of the jet-section towards the surface of the jet, where it becomes equal to the external pressure, and furthermore towards the boundary lines of the sections A_1B_1 , A_2B_2 where the pressure of the orifice or nearly that prevails. In the case considered, the latter pressure is the critical pressure p_k defined in paragraph 1.

A series of photographs of an actual jet are given in fig. 4. Pl. 1. The pictures are produced by means of the method of striæ. They originate from the nozzle ZI , see Tab. II, and correspond to the following values of the ratio $\frac{p_0}{p_e}$ of the absolute pressure p_0 in the container and the exterior pressure p_e .

Tab. I.

Fig.	$\frac{p_0}{p_e}$
4 a	2.95
4 b	3.45
4 c	4.02
4 d	4.47
4 e	5.01
4 f	5.43
4 g	5.90
4 h	6.38

The pictures agree fairly well with the diagram fig. 3. The discrepancies will be considered below.

3. The stationary Compression-Wave.

In the present introduction we have still to consider a phenomenon of paramount importance for the modus ope-

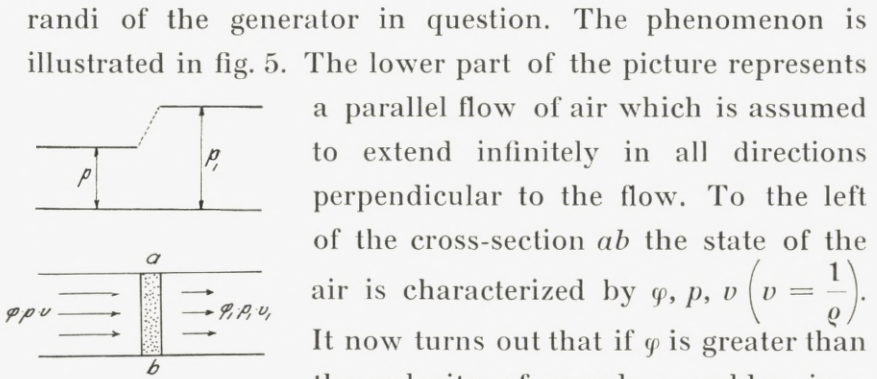


Fig. 5. Perpendicular Compression-Wave.

a parallel flow of air which is assumed to extend infinitely in all directions perpendicular to the flow. To the left of the cross-section ab the state of the air is characterized by ϕ, p, v ($v = \frac{1}{\rho}$). It now turns out that if ϕ is greater than the velocity of sound, a sudden irreversible change in the state of the flow may take place within an extremely thin layer ab . The pressure and density increase while the velocity and the kinetic energy of the flow decrease. The layer may be identified with a stationary compression-wave of finite amplitude. In German papers it is referred to as a "Verdichtungsstoss". It is well known from several phenomena. Thus the conical wave accompanying a projectile flying with a velocity greater than that of sound, the Mach-wave, is of this description, although the greater part of the said wave is not a perpendicular "Verdichtungsstoss" but an oblique one, fig. 6. In the latter the component of the velocity parallel to the "stoss" passes the same without any change, while in the component perpendicular to the wave a change takes place as in the case shown in fig. 5.

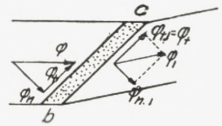


Fig. 6. Oblique Compression-Wave.

While the structure of the compression-wave proper is still to some extent a riddle, it is easy to derive formulae expressing the state behind the compression by that in front of the same^{17,18,19}. The theory is based on the suppositions that the cross-section of a stream-line tube is

constant and that no energy or momentum is transmitted to the tube from the adjacent tubes inside the layer of the irreversible process. These assumptions are expressed in the following equations in which the notations of fig. 5 are used

$$(1) \quad \varrho \varphi = \varrho_1 \varphi_1$$

$$(2) \quad \frac{1}{2} \varphi^2 + \frac{\alpha}{\alpha - 1} R\theta = \frac{1}{2} \varphi_1^2 + \frac{\alpha}{\alpha - 1} R\theta_1$$

$$(3) \quad p + \varrho \varphi^2 = p_1 + \varrho_1 \varphi_1^2.$$

From (1)—(3) in connection with

$$(4) \quad p = \varrho R\theta \quad \text{and}$$

$$(5) \quad p_1 = \varrho_1 R\theta_1$$

the relations

$$(6) \quad \frac{\varphi_1}{\varphi} = \frac{2}{\alpha + 1} \left[\frac{\alpha - 1}{2} + \alpha \frac{R\theta}{\varphi^2} \right]$$

$$(7) \quad \frac{\varrho_1}{\varrho} = \frac{\alpha + 1}{2} \left[\frac{\alpha - 1}{2} + \alpha \frac{R\theta}{\varphi^2} \right]^{-1}$$

$$(8) \quad \frac{p_1}{p} = \frac{2}{\alpha + 1} \left[\frac{\varphi^2}{R\theta} - \frac{\alpha - 1}{2} \right]$$

are derived for the perpendicular compression-wave. As φ is greater than the velocity of sound, that is to say φ^2 greater than $\alpha R\theta$, it is seen that density and pressure are always raised while the velocity is reduced in the wave. As shown by Prandtl, the velocities φ and φ_1 are connected by the simple formula

$$(9) \quad \varphi \varphi_1 = \varphi_k^2$$

where φ_k is the critical velocity — equal to the velocity of sound at the smallest jet-section — indicated in equation (5) paragraph 1. That is to say

$$(10) \quad \varphi_k^2 = \alpha R \theta_k = \frac{2\alpha}{\alpha + 1} \cdot \frac{p_0}{\rho_0}$$

p_0 and ρ_0 being the pressure and density at the outset of the flow where the velocity is zero. As φ is greater than the velocity of sound, it may be concluded from equation (9) that the velocity is reduced by the wave to a value smaller than the velocity of sound.

In case of an oblique compression-wave, fig. 6, (9) is, as shown by Th. Meyer,^{11, 19} replaced by

$$(11) \quad \varphi_n \varphi_{n-1} + \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \varphi_t^2 = \varphi_k^2$$

while $\varphi_t = \varphi_{t-1}$.

With a view to illustrating the subject of the present paragraph, attention may again be drawn to the photographs of fig. 4, Pl. 1, in connection with the diagram of fig. 3. It will be noted that the section $D_1A_1B_1$, in which the pressure increases and the velocity decreases from D_1 to A_1B_1 , gradually becomes a smaller fraction of the whole section ABA_1B_1 when $\frac{p_0}{p_e}$ increases. At the same time each of the boundary lines D_1A_1 and D_1B_1 becomes sharper and undoubtedly develops into an oblique compression-wave. At a value of ab. 3.5 of $\frac{p_0}{p_e}$ the wave is distinct. From ab. $\frac{p_0}{p_e} = 4.8$ the two waves D_1A_1 and D_1B_1 are united by a wave perpendicular to the axis of the jet, that is to say, by a perpendicular compression-wave in which the velocity of the jet is brought down below the velocity of sound. At this stage, therefore, the regular

periodic structure of the jet vanishes because the said structure is dependent on super sound-velocity.

4. Stoppage of an Air-Jet with a Velocity exceeding that of Sound.

The theory of the perpendicular compression-wave in the main accounts for what happens when an air-jet with a velocity greater than that of sound impinges on a wall perpendicular to the jet. In fig. 7, *J* is the jet discharged from the container *C*. *B* is the wall in which we may assume a fine hole to be drilled connecting the front of the wall with a space *P* beyond, in which the pressure may be measured by means of

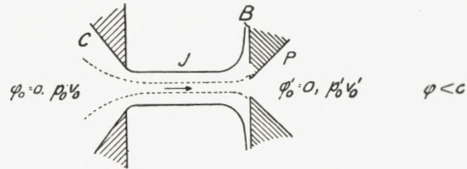


Fig. 7 a. Stoppage of Jet with a Velocity smaller than that of Sound.

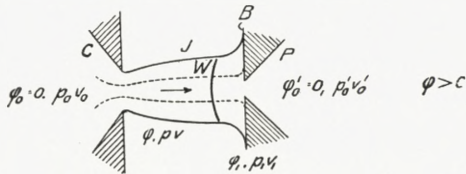


Fig. 7 b. Stoppage of Jet with a Velocity exceeding that of Sound. Compression-Wave *W* in Front of Wall.

a manometer. If, as in fig. 7 a, the velocity of the jet is below that of sound, the pressure in the central stream-line tube at the point in which it hits the wall and is stopped by the same should be very nearly that of the container. That is to say, the pressure p'_0 , read on the manometer referred to, should be p_0 . As a matter of fact it is found to assume that value, showing that the process of efflux and stoppage in this case takes place adiabatically according to the equations (1)—(4) of paragraph 1. Otherwise in the case of fig. 7 b, in which a velocity exceeding that of sound obtains. Here the process of stoppage takes place by two steps. The first step is taken in a compression-

wave W somewhat in front of the wall. Inside the central stream-line tube, W may as a rule be considered as a perpendicular compression-wave, in which the pressure is raised by an irreversible process from the value p just in front of the wave to the value p_1 just beyond the same, while at the same time the kinetic energy of the flow is diminished and the velocity reduced to a value smaller than the velocity of sound. The connection between p_1 and p is expressed by (8) in the preceding paragraph. The second step of the process consists in an adiabatic compression which takes place in the space between W and the wall, and is determined by the equations (1)—(4) of paragraph 1. Applying the said equations and those of the perpendicular compression-wave, an expression for the pressure p'_0 may be derived. With the notations of fig. 7 b we find

$$(1) \quad p'_0 = 2K\varrho\varphi^2 \cdot \left[z - \frac{z-1}{2} \cdot \frac{c^2}{\varphi^2} \right]^{-\frac{1}{z-1}}$$

where $K = \frac{1}{z} \left(\frac{z+1}{2} \right)^{\frac{z+1}{z-1}}$ and $c^2 = zR\theta$.

In (1) the „stoppage-pressure” p'_0 is expressed by the state just in front of the compression-wave. Now, however, the flow from the container down to the front of the compression-wave takes place adiabatically according to the equations (1)—(4) of paragraph 1. This means that the state in front of the wave may be expressed by the characteristics $\varphi_0, p_0, \varrho_0, \theta_0$ of the air in the container in connection with one of the quantities $\varphi, p, \varrho, \theta$. And so the same must be true for the stoppage-pressure p'_0 . Thus for instance p'_0 , may be expressed in the following way

$$(2) \quad \frac{p'_0}{p_0} = \left(\frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} \right)^{\frac{\alpha + 1}{\alpha - 1}} \frac{\left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{\alpha - 1}{\alpha}} - 1}{\frac{p_0}{p} \left[\frac{4\alpha}{(\alpha - 1)^2} - \frac{1}{\left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{\alpha - 1}{\alpha}} - 1} \right]^{\frac{1}{\alpha - 1}}}$$

The validity of equation (2) has been put to the test by Stanton⁸.

5. The Pitot-Curve.

The air-jet generator for acoustic waves was invented in connection with a study of the structure of the jet by means of a simple pitot-apparatus. Its operational qualities may in a natural way be put in relation to that characteristic of the jet, the pitot-curve, which may be found by means of the said apparatus.

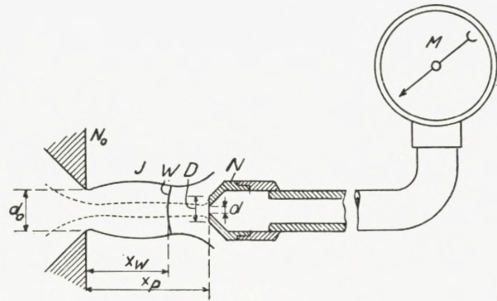


Fig. 8 a. Pitot-Apparatus with Bore.

With a view to understanding the generator a good deal of work has therefore been done on the study of the pitot-curve.

In fig. 8 a a simple pitot-apparatus is shown. It consists of a nozzle *N* with a fine bore. The nozzle is directed towards the jet *J*. It is connected to a manometer *M*. The apparatus in fig. 8 a is of a special kind. Generally the bore in *N* is replaced by a thin tube, the pitot-sound, fig. 8 b. In a good many cases a steel-tube with an interior diameter of 0.38 mm and a length of about 8 mm has been employed, but curves have also been determined by means of heavier sounds or by nozzles like that in fig. 8 a.

The general aspect of the pitot-curve in the case of a jet with super sound-velocity produced by a not too high excess-pressure is shown in fig. 9.

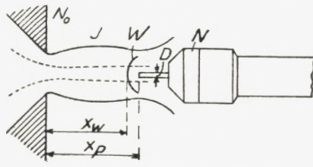


Fig. 8 b. Pitot-Apparatus with Sound.

The pitot-pressure close to the jet-hole is equal to the static pressure p_0 in the container. If the pitot-sound is gradually moved out along the axis of the jet, the reading of

the pitot-manometer is seen to fall to a minimum, the position of which very nearly coincides with the point D_1 of fig. 3. Then again the reading increases to a maximum value of about p_0 close to the border-line A_1B_1 , fig. 3, of

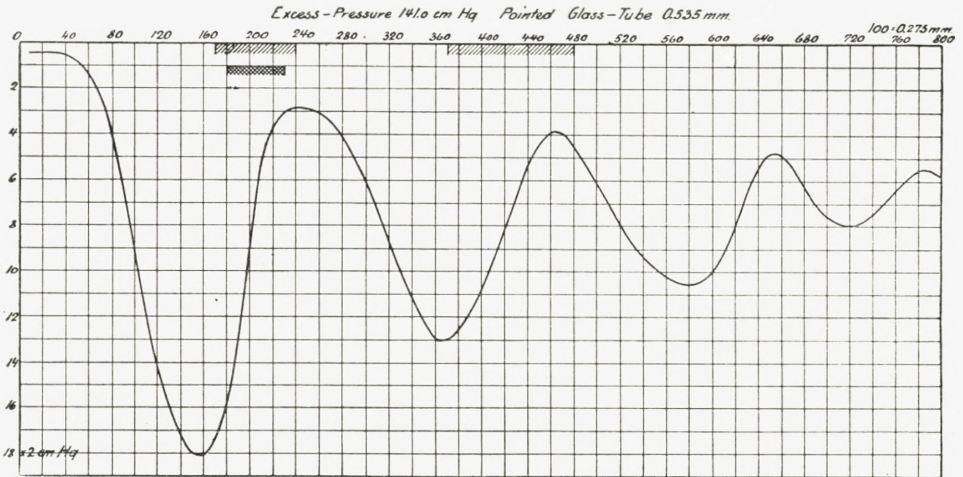


Fig. 9. Pitot-Curve. Ordinate: Difference between Pressure in Container p_0 and Pitot-Pressure p'_0 .

the first jet-section, then falls off to a new minimum in the centre D_2 of the second section, rises to ab. p_0 in A_2B_2 , and so on. In fig. 9 the abscissa represents the distance from the jet-orifice to the front of the pitot-sound indicated above. Later investigations carried out with pitot-sounds and nozzles of various dimensions revealed a general pro-

perty of the pitot-curve which throws a clear light on the nature of the same.

In photographs of the jet with the pitot-sound or the pitot-nozzle a compression-wave is seen, as might be expected from what has been stated in the preceding paragraph. The aspect and position of the wave varies with the character of the sound or nozzle about as indicated by S in fig. 8 a and b. With a nozzle the distance from the wave to the mouth of the pitot-apparatus is greater than with a thin sound. Generally the distance is the greater, the greater the dimension D . If now the pitot-curves were plotted with the distance x_p , fig. 10, to the front of the sound or nozzle as abscissa, the several pitot-apparatus used gave curves varying in position as indicated in fig. 10 by a, b .

If, however, instead of x_p the distance x_w to the central point of the compression-wave was taken as abscissa, all sounds and nozzles gave the same pitot-curve, say u in fig. 10. This is just what might be expected from the theory of the stoppage of the jet. At a given point of the central streamline tube of the jet, say the point at the distance x from the jet-orifice, a given state of flow obtains. If a compression-wave perpendicular to the tube is in one way or other produced at this point, and the flow after having passed the wave is brought to a stand-still, then the pressure p'_0 at the point where the velocity is reduced to zero is solely determined by the state just in front of the wave, see equation 1, paragraph 4. Furthermore we have seen that

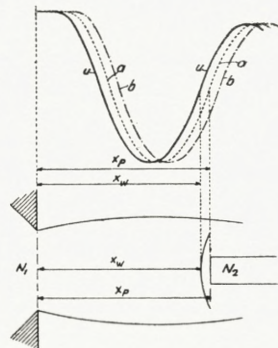


Fig.10. Pitot-Curves a, b , obtained with different Nozzles N_2 , all give the same reduced Curve u when the Position of the Compression-Wave is used as Abscissa.

$\frac{p'_0}{p_0}$ could be expressed as a function of the ratio $\frac{P}{p_0}$ of the pressure p in front of the wave and the pressure p_0 in the container from which the jet is emitted. Obviously, then, a definite value of p'_0 corresponds to each point of the jet with its definite value of p . The said p'_0 -value may be termed the stoppage-pressure of the said point, and what the pitot apparatus indicates is just the stoppage-pressure at that point of the central fibre of the jet where the compression-wave to which the pitot-apparatus gives rise is formed. The distance from the wave to the sound or nozzle of the pitot-apparatus is of no consequence. It is determined by the condition that there must be sufficient space for the air stopped by the sound or nozzle to escape laterally. Therefore, with a greater value of D , fig. 8 a and b, the distance must be greater than with a smaller value, as more air should be removed. From what has been said it will be understood that the pitot-curve should always be plotted with the distance to the compression-wave as abscissa, otherwise it will depend on the special pitot-apparatus used in the determination of the curve. The curve thus plotted may be termed the normal pitot-curve.

6. Investigations on the Pitot-Curve.

The determination of the pitot-curve with the position of the compression-wave as abscissa must generally include photographing of the jet by the method of striæ in order to find the position corresponding to the reading of the pitot-manometer. In fig. 11 a—d, Pl. 2, a series of photographs from the determination of a pitot-curve are reproduced. The screen-edge of the apparatus of striæ, see fig. 20, was in these pictures perpendicular to the axis of the

jet. In fig. 12 a—b, Pl. 2, a similar series is seen. The screen-edge is again perpendicular to the axis, but it has been turned with regard to the direction of the flow. A pressure-gradient which appears dark in fig. 11 is therefore bright in fig. 12. The compression-wave in front of the pitot-sound is clearly seen, and it will be noted that the pressure-gradient behind the wave has, as should be expected, the opposite sign of the gradient just outside the nozzle from which the jet is emitted. In fig. 13 a—b, Pl. 3, the screen-edge was parallel to the axis of the jet. Finally in fig. 14 a—d, Pl. 3, a series of photographs from a determination of the pitot-curve by means of a nozzle like that of fig. 8 a is reproduced. The screen-edge is now again perpendicular to the axis of the jet. It will be noted that the compression-wave is found at a greater distance from the orifice of the pitot-apparatus, to the right, than in the case of an apparatus with a steel sound.

The experimental evidence of the fact stated above and preliminarily illustrated in fig. 10 is given in fig. 15. In the figure a series of pitot-curves are drawn, corresponding to various sounds and pitot-nozzles, see fig. 19. The abscissa is the position of the said sounds and nozzles. In connection with the pitot-readings photographs like those reproduced above were taken, after which each reading of the pitot-manometer was plotted against the distance from the jet-orifice to the compression-wave determined from the corresponding photograph. In this way the points to the left were found, clustering round a common curve, the normal pitot-curve.

Between the ordinates p'_0 of the normal pitot-curve and the static pressure p in the corresponding point of the jet the relation (2) in paragraph 4 obtains. It thus would seem

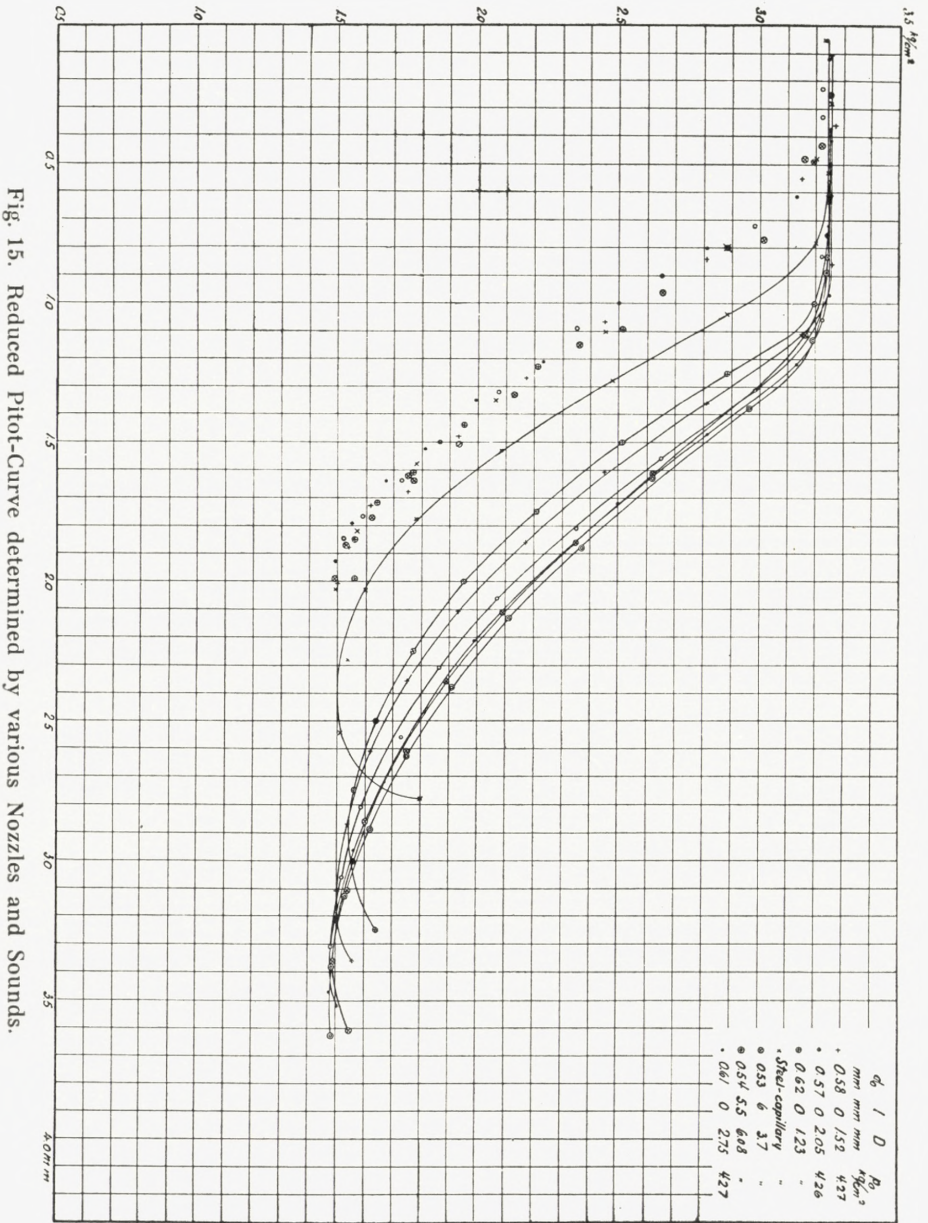


Fig. 15. Reduced Pitot-Curve determined by various Nozzles and Sounds.

possible to derive the static pressure curve from the pitot-curve for points along the axis of the jet. In fig. 16 the uppermost curve is a normal pitot-curve, while the lower represents the static curve calculated by means of the re-

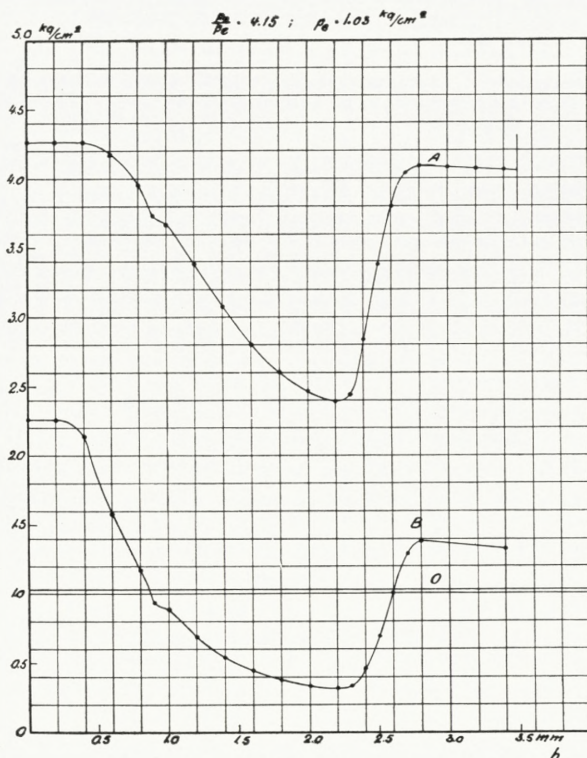


Fig. 16. Pitot-Curve A and corresponding Static Pressure-Curve B.

lation (2) referred to. It would have been interesting to check the calculated static curve by direct observation. Owing to the small dimensions of the jets it was, however, judged hopeless to try to obtain reliable observations by means of a static pressure gauge introduced into the axis of the jet.

Some investigations have been made on the distance $c = x_p - x_w$, fig. 10, from the compression-wave to the

pitot-sound or -nozzle. Results are given in fig. 17. The curve N was found with two nozzles of the type in fig. 8 a, while S originates from a tiny steel sound. The distance is, as indicated above, greater with the nozzle than with the sound. Furthermore it will be noted that the distance varies considerably along the axis. It is not even the same at two points of the same jet-section, for instance ABA_1B_1 , fig. 3, with the same values of pressure and ve-

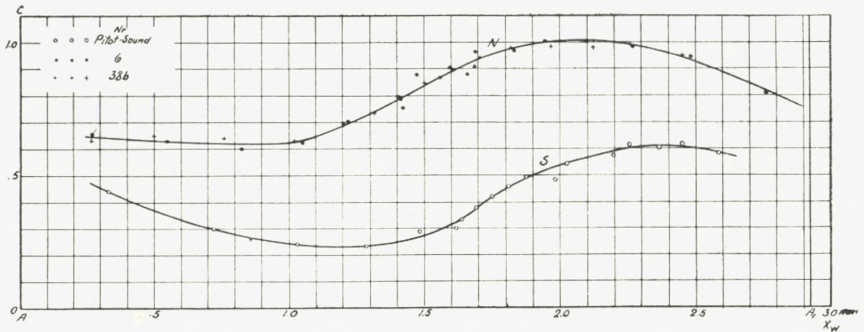


Fig. 17. Distance c between Compression-Wave and Pitot-Nozzle or Sound. N with Nozzle, S with Sound, Abscissa: Distance from Jet-Orifice to Compression-Wave x_w .

locity. Such points are generally found on either side of the point of minimum pressure, D_1 , placed nearly symmetrically with regard to the latter point. With two symmetric points the distance c is smallest for the point nearest to the jet-orifice. The explanation is undoubtedly to be found in the circumstance that the velocity in the point nearest to the jet-orifice has an outward component, while in the symmetric point it has a component directed towards the axis of the jet. The radial component will pass unaltered through the compression-wave. For the point nearest to the jet-orifice the outward directed velocity-component will promote the escaping of the air behind the compression-wave, i. e. between the same and the pitot sound or

-nozzle. For the symmetric point the inwardly directed velocity will hamper the escape of the air. We should therefore anticipate just the variation of c shown in fig. 17, which figure covers the first jet-section ABA_1B_1 . It may be noted that the radial velocity component φ_r is nearly maximum at distances from the jet-orifice equal to $1/4$ and $3/4$ of the length of the jet-section. As will be seen, the curves in fig. 17 exhibit the smallest and greatest values close to these points.

II

Investigations on the Modus Operandi
of the Pulsator.

1. Experimental Arrangements.

In the investigations here described the air was supplied by a compressor operated by a 5 h. p. d. c. motor. The plant was furnished with an air-chamber of ab. 0.5 m^3 capacity. In the latter the excess-pressure was generally kept at 7—8 Atm. In fig. 18 a L indicates the main pipe from the compressor. To the outlet-stud with the valve V_1 the chamber C_1 (40 l) was attached with a view to roughly smoothing out variations in the pressure. From C_1 the air flowed through the reduction-valve R_1 to the nozzle N_J of the acoustic generator A , a second air-chamber, C_2 , with a manometer M_1 being attached to the connecting pipe. The nozzle N_p of the pulsator was, through a flexible tube, connected to the pulsator proper, P , consisting of a steel-bottle of varying size. To the pulsator a manometer M_p was attached. Furthermore, in many experiments, the arrangement ab was used. By means of the latter a constant pressure could be kept in the pulsator during the filling, and so an arbitrary stage of the filling-process could be maintained for closer examination. The arrangement consists of two parallel branches through which the pulsator could be put in connection with the atmosphere. In one branch

a valve V_5 of large aperture in the other a screw-valve V_6 for fine adjustment of the flow was furnished. Furthermore a valve V_4 was provided for direct connection between P and the atmosphere.

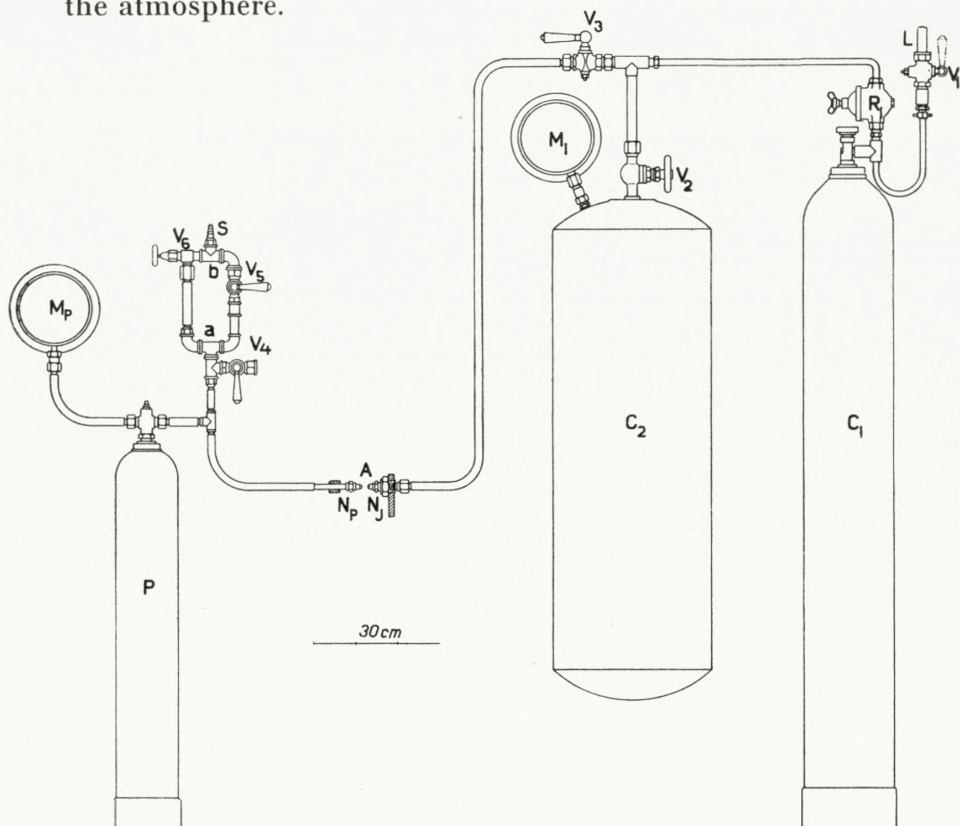


Fig. 18 a. Experimental Arrangement.

In certain experiments the flow of air to the pulsator was to be measured at an arbitrary stage of the filling-process. The arrangements for this are shown to the right in fig. 18 b. In a pipe L' connected to the stud S , fig. 18 a, a bore N was inserted between the two extensions B_1 and B_2 . By means of the water-gauge M_3 the pressure-drop in N , to which the flow from the pulsator gave rise, was measured. A thermometer T was inserted in the lower

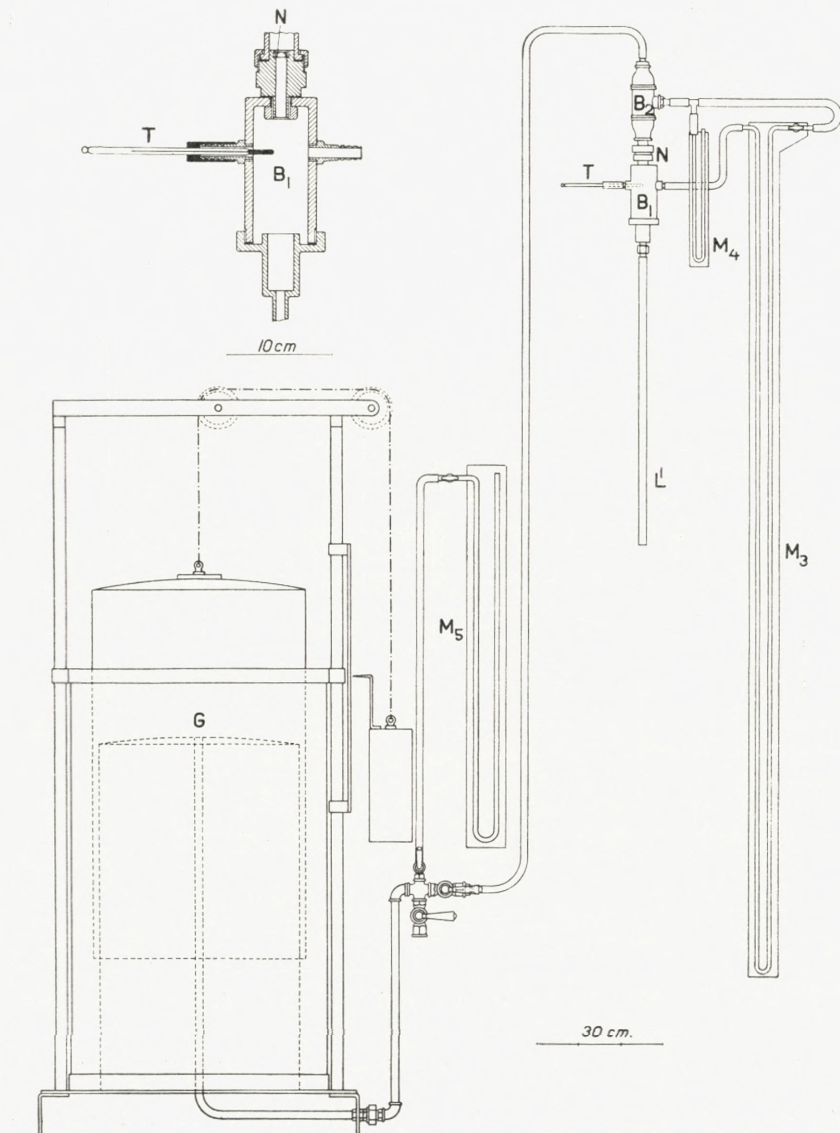


Fig. 18 b. Experimental Arrangement.

extension B_1 and a small water-gauge M_4 was connected to the uppermost extension B_2 in order to give the absolute pressure in B_2 . From B_2 a pipe was carried to the gasometer G which was used either for direct determin-

ation of the flow or for testing the gauge M_3 as a flow-meter in connection with the arrangement B_1NB_2 . The gasometer had a capacity of ab. 140 l.

A photograph of the acoustic generator is given in fig. 21, Pl. 4. The pulsator-nozzle is mounted on a triple slide

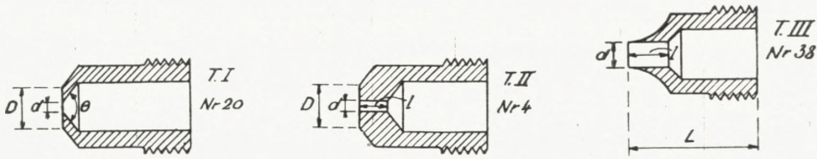


Fig. 19 a.

Fig. 19 b.

Fig. 19 c.

Fig. 19. Acoustic Generator. Nozzles.

arrangement. Various types of jet-orifices and pulsator-nozzles have been employed. Diagrams are shown in fig. 19 a—c and a list of all the orifices and nozzles is found under tab. II.

An indispensable means for the investigation was the optical apparatus used for the production of photographs

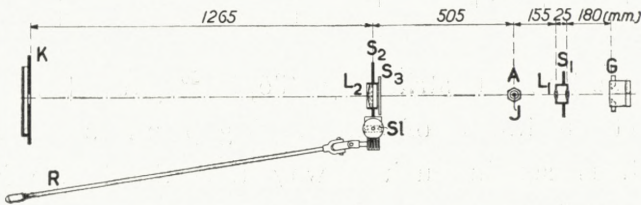


Fig. 20. Optical Arrangement.

according to the method of striæ. Fig. 20 shows the general arrangement. G indicates the spark apparatus, L_1 a lens mounted in a screen S_1 , A the air-jet generator and J the jet proper. L_2 is a lens in a screen S_2 , while S_3 is another screen in front of the lens and covering nearly half of it. Finally K is a holder for the photographic plate. As will be known from the description

Tab. II. List of Nozzles and Jet-Orifices

Type I, Fig. 19 a Obtuse conical.			Type II, Fig. 19 b Flat, cylindrical.				Type III, Fig. 19 c Pointed, cylindrical.		
No.	<i>d</i>	<i>D</i>	No.	<i>d</i>	<i>D</i>	<i>l</i>	No.	<i>d</i>	<i>l</i>
	mm	mm		mm	mm	mm		mm	mm
1.....	1.47	5.8	2....	1.47	6.4	2.0	36 b..	1.38	5
3.....	2.14	6.5	4....	2.11	6.7	3.0	38 a..	2.07	5
5.....	2.32	5.8	6....	0.54	6.4	3.5	38 c..	2.00	5
13.....	0.58	1.0	7....	0.56	3.7	2.0	39....	1.50	5
14.....	0.76	3.8	8....	1.04	7.5	6.5	41....	0.37	5
15.....	0.77	1.0	9....	1.50	7.0	7.0	42....	0.70	5
19 (Z I)..	2.04	7.2	10....	2.02	7.0	6.0	43....	2.43	5
20 (Z II)..	2.05	8.0	12....	0.54	3.7	6.0	38 b..	2.20	5
21 (Z III)	2.04	8.1	23....	2.03	6.4	1.5			
22 (Z IV)	2.03	8.0	24....	2.03	6.2	2.0			
29.....	0.61	2.7	25....	2.03	6.5	1.5			
30.....	0.57	2.0							
31.....	0.58	1.5							
32.....	0.62	1.2							
33.....	0.52	5.5							
34.....	0.76	5.5							
35.....	1.05	5.5							
36 a.....	1.49	5.7							
37.....	2.02	5.4							

of the method of striæ by Töpler²⁰, the lens L_1 is to project an image of the spark-gap on to the screen S_3 which is set in such a way that the image is just screened off from the lens L_2 . By the latter lens an image of the object to be photographed, i. e. in our case the air jet J , is formed on the photographic plate. The plate could be displaced in the holder K so that a series of pictures could be taken on the same plate. All parts of the arrangement are mounted on an optical bench in order to facilitate the various adjustments. It is essential that the edge of the screen S_3 can be set very accurately with regard to the image of the spark, and that the setting can be varied

from the position of the observer behind the frosted glass of the camera *K*. Hence a slide arrangement *Sl* to be moved by means of the rod *R* was furnished.

The electrodes of the spark-apparatus consisted of two strips of sheet-zink between two rectangular pieces of fused quartz. The thickness of the strips was ab. 0.5 mm, the length of the spark-gap 5—8 mm. The sparks were produced by means of an inductor of ab. 25 cm spark-length. In parallel to the gap 6 Leyden-jars of medium size were inserted. The front edges of the quartz pieces were covered with black enamel to make them intransparent. In this way a regular rectilinear light-source of great brightness was produced. In series with the spark-gap another variable gap was inserted so as to ensure that only one single spark was produced at each interruption of the inductor-current.

In fig. 21, Pl. 4, a photograph of the main parts of the optical arrangement, except the camera, is reproduced. The aggregate $L_2 S_2 S_3$, fig. 3, appears in the front-part of the picture. Behind, the acoustic generator is seen, the nozzle of the pulsator having been displaced by a cylindrical oscillator with its holder. In the rear of the generator is the lens L_1 with its screen and in the background of the picture the spark-gap apparatus is discerned. The quartz plates of the latter have, however, been temporarily removed. To the left are the Leyden-jars. The inductor may be dimly seen behind the latter.

2. Anticipations with Regard to the Explanation of the Pulsation-Process.

Before the investigations, described below, were commenced we had formed an idea of the modus operandi of the pulsator which may be illustrated by means of fig. 22.

Here N_1 indicates the jet-orifice and N_2 the mouth-piece of the pulsator. From N_1 an air-jet J is emitted, the pitot-curve of which is P_1 . In the figure the mouth of the pulsator is placed inside the first interval of instability. Obviously the pulsator must fill with air, and it would seem reasonable to assume that it will charge to a pressure equal to the pitot-pressure i. e. the pressure indicated by

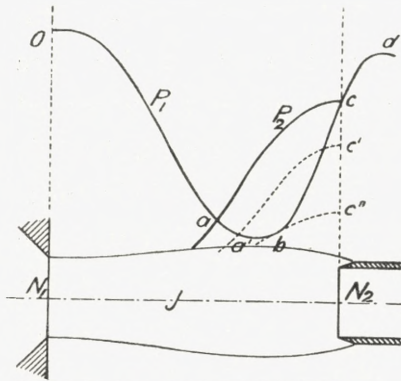


Fig. 22. Conception of Pulsation-Process. P_1 Pitot-Curve of Main-Jet, P_2 Pitot-Curve of Jet penetrating from Pulsator.

the point c of the pitot-curve P_1 (especially if this curve were found by means of a pitot-sound identical with the nozzle of the pulsator). Now, it is easy to see that the state of the pulsator when charged to the said pressure cannot be a stable one. For any disturbance causing air to escape from the pulsator will undoubtedly set up a jet which at the outset

will generally have a velocity higher than that of sound, thus a pitot curve P_2 of the same type as that of the main jet. As the curve P_2 will be above the curve P_1 out to the point a , the main jet will not be able to check the jet bursting forth from the pulsator within this distance from N_2 . So it may be anticipated that the pulsator-jet will penetrate to a . As now the pulsator gradually empties, the pitot-curve falls, as indicated in the figure, while at the same time the front of the pulsator-jet retreats. It was thought likely that the discharge would continue down to the pressure at which the pitot-curve of the pulsator just touched the curve of the main jet. Then, at any rate, the state is again instable as the curve-

branch bc is at any point higher than bc'' . So undoubtedly the main jet will burst forth to N_2 and recharge the pulsator.

It was the main object of this investigation to put the anticipations just indicated to the test and, if possible, to

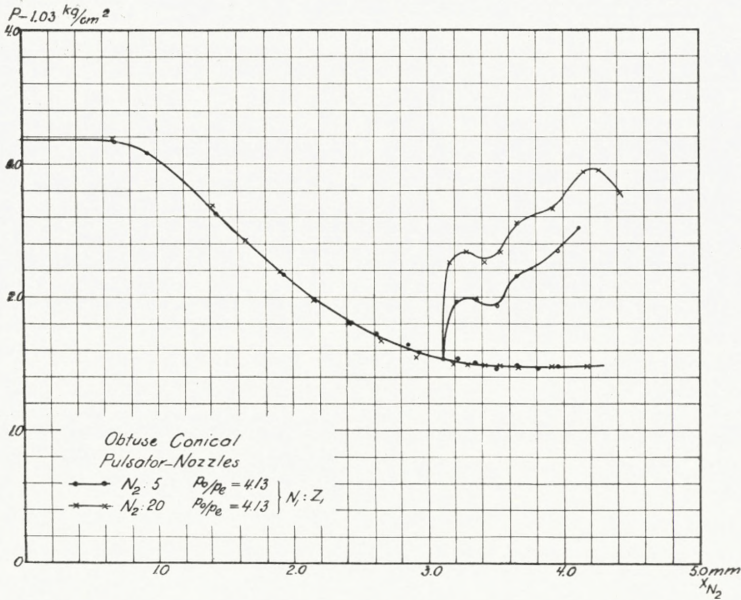


Fig. 23. Limits of Pulsator-Pressure during Pulsations with obtuse conical Pulsator-Nozzles. Abscissa: Distance x_{N_2} from Jet-Orifice to Pulsator-Nozzle. Ordinate: Excess-Pressure in Pulsator.

reveal the mechanism of the various parts of the pulsation-process.

3. Pulsator-Diagrams.

As a first step in the research-work it was found wise to investigate the limits between which the pressure in the pulsator P varies during the process of pulsation. With sufficiently slow pulsations the limits may simply be observed on a manometer M_p , fig. 18 a, applied to the pulsator.

If such observations are made, corresponding to a series of positions of the pulsator-nozzle, a diagram may be drawn from which an idea may be formed with regard to the effectiveness of the pulsator as a means of setting up pulsations. In order to find out the shape of pulsator-nozzle best suited for the purpose, a fairly large number of diagrams of the type indicated were produced. Some of them are shown in figs. 23—

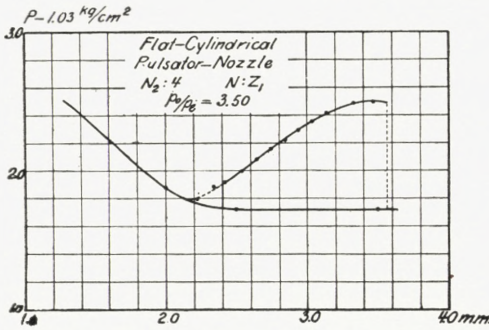


Fig. 24. Limits of Pulsator-Pressure during Pulsation with flat cylindrical Pulsator-Nozzle (Comp. Fig. 23).

drawn from which an idea may be formed with regard to the effectiveness of the pulsator as a means of setting up pulsations. In order to find out the shape of pulsator-nozzle best suited for the purpose, a fairly large number of diagrams of the type indicated were produced. Some of them are shown in figs. 23—

25. In the figures the distance x_{N_2} from the jet-orifice N_1 to the pulsator nozzle N_2 is taken as abscissa. The said holes

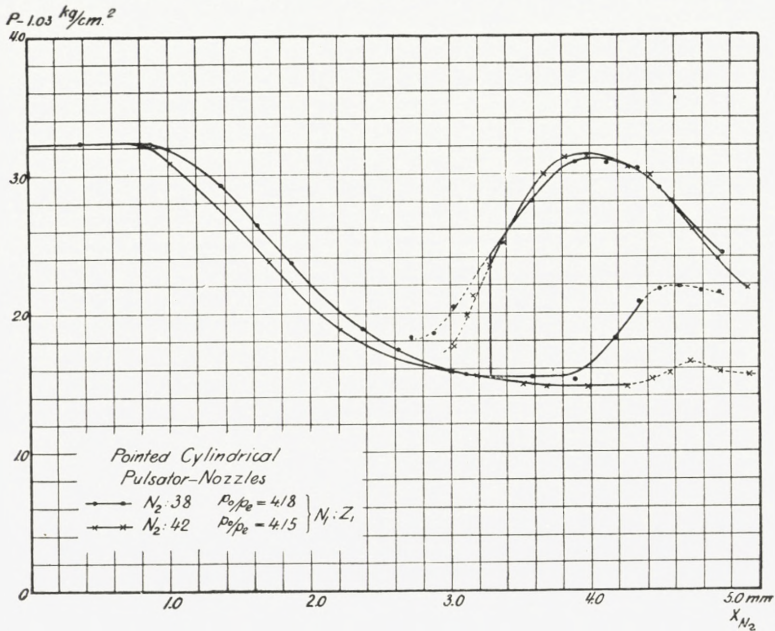


Fig. 25. Limits of Pulsator-Pressure during Pulsation with pointed cylindrical Pulsator-Nozzles. (Comp. Fig. 23).

and nozzles are characterized by the indications in tab. II. It is seen that the lower branch of the curves, representing the lower limit of the pressure in the pulsator, does not as a rule depend so much on the type of the pulsator-nozzle as the upper branch representing the upper limit of the pulsator-pressure. The lower limit of the pressure exhibits a tendency to keep constant throughout the interval of instability. The pointed pulsator nozzles seem, however, to form an exception from this rule in that the lower branch curves upwards, fig. 25. The upper branch is, as indicated, highly dependent on the type of the nozzle. It seems that pulsator-nozzles of the types *T II* and *T III*, fig. 19, with a cylindrical bore, furnish the most effective means for the production of vigorous pulsations. For not only is the upper limit high over the greater part of the interval of instability (fig. 24—25), but the limiting pressure also exhibits a high degree of definiteness. As a matter of fact this pressure repeated itself with an exactness practically equal to the certainty with which the manometer could be read, i. e. ab. 0.02 kg/cm^2 ,

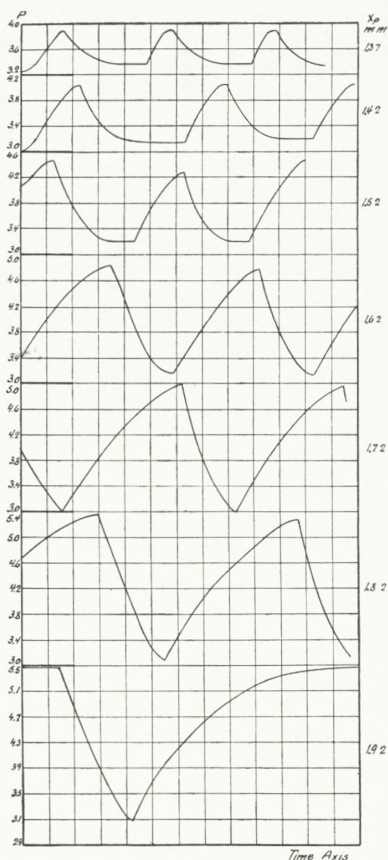


Fig. 26. Pulsator Oscillograms. Ordinate: Pressure in Pulsator. Abscissa: Time. Figures to the right: Distance x_p from Jet-Orifice to Pulsator.

while with flat conical nozzles, fig. 23, the uncertainty of the maximum pressure was as high as 0.1 kg/cm^2 or above.

In fig. 25 parts of the curves are drawn with a dotted line. Within the interval thus indicated the pulsations do

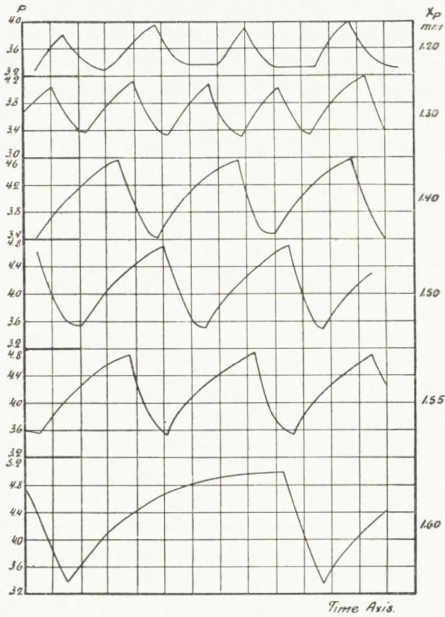


Fig. 27. Pulsator Oscillograms.
(Comp. Fig. 26).

not start automatically but could be started in a way explained in paragraph 5 below.

Complete "pressure-oscillograms" for the pulsator were taken in addition to the diagrams described above. With very slow pulsations the oscillograms were obtained by direct observation of the pressure at a number of instants of the period. With more rapid pulsations the oscillograms were produced by means of a Watt-indicator. In figs. 26 and 27

oscillograms of the latter descriptions are reproduced. The two parts of the pulsation-process, the filling and the exhaustion, are clearly distinguished. In the pictures the distance of the pulsator-nozzle from the entrance to the interval of instability is gradually increased. It is seen that with the pulsator-nozzle in the foremost part of the interval, the pulsations are comparatively small. The exhaustion is protracted and the time of exhaustion is in some degree lacking in definiteness, indicating that the instability at the end of the exhaustion is less pronounced. Farther

back in the interval the pulsations become more vigorous. The time of filling is generally longer than that of exhaustion, and the change from one part of the pulsation-process to the other takes place with great regularity. Finally, close to the exit of the interval the process of filling is protracted, and the setting in of the discharge becomes less definite in time. In the following the two parts of the pulsation-process are considered separately.

4. The Process of Discharge. Investigations by the Method of Striæ.

The most direct method of investigating the modus operandi of the pulsator is certainly that of the striæ. It was applied to the process of discharge. During the said process a series of instantaneous photographs were taken by means of the optical arrangement in fig. 20. Samples of such series are given in figs. 28—30, Pl. 4—5. In fig. 28 the lens-screen is perpendicular to the axis of the jet and so it is in fig. 29, but the direction of the jet relatively to the screen-edge has been changed. In fig. 30 the jet is parallel to the said edge. It is found that the pulsator-jet, at the start of the discharge, is quite suddenly shot out from the orifice of the pulsator. The jet is of the same character as that of the main jet, thus a jet with a velocity exceeding that of sound. In the collision between the two jets two compression waves, one in each of the jets, are formed. Between the two waves is a layer from which the air from the two jets escapes laterally. By following the progress of the process of discharge in the row of pictures, which corresponds to nearly equidistant moments, it is seen that the layer of collision remains for a good while

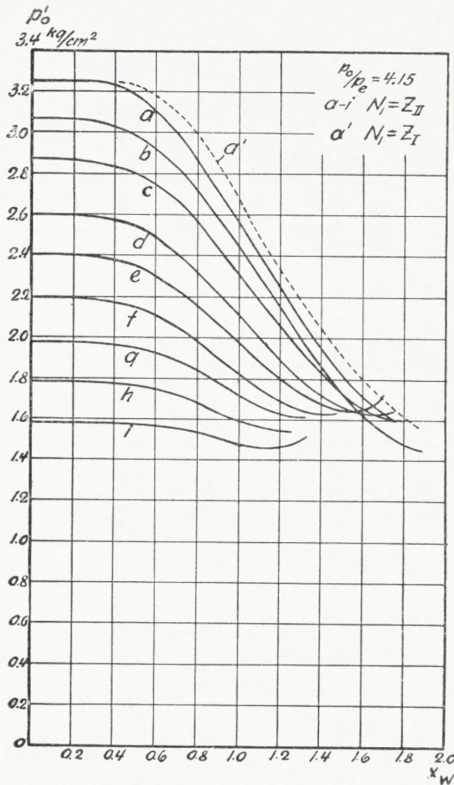


Fig. 31. Series of Pitot-Curves.

in almost the same spot. Later on during the process it is, however, forced back towards the pulsator-nozzle, to the left, by the main jet, owing of course to the decrease

of the pressure in the pulsator. Finally the compression-wave in the pulsator-jet seems to disappear into the pulsator-nozzle. Notably it is always found apparently to do so with the nozzle in the foremost part of the interval of instability. Shortly after, the process of discharge is brought to an end by the sudden setting in of the process of charging.

From the pictures it is seen how far the pulsator jet penetrates towards the jet-orifice. We should thus be able to test the anticipation in fig. 22 provided

the pitot-curves for the main jet and the pulsator-jet were known with the pressures which obtain in the container and the pulsator.

In order to be able to carry out the test, series of pitot-curves corresponding to a considerable number of values of the ratio $\frac{p_0}{p_e}$ of the pressure in the container and the external pressure were determined for a number of nozzles used as jet-orifices and mouth-pieces for the pulsator. In the determination the pitot-apparatus was furnished

with a nozzle with a plane front-side of such an extension that it could be considered as a wall stopping the air-jet. A sample of a series of curves is given in fig. 31. Instantaneous pictures were taken along with the readings of the pitot-manometer so that the distance τ from the compression-wave to the pitot-nozzle could be measured. After this the material necessary for investigating the question of the position of the collision-layer and of the character of the said layer was at hand, and the very simple state of things illustrated in fig. 32 was disclosed.

Here P_1 and P_2 indicate the two pitot-curves corresponding to the pressures which obtain in the container and the pulsator at the moment considered.

As explained in part I, an ordinate of the curves $p'_{0,1}$ resp. $p'_{0,2}$ represents the stoppage-pressure of the central stream-line tube when the flow of the latter is stopped through a perpendicular compression-wave at the corresponding distance (x_1 resp. x_2) from the nozzle in question. Now in fig. 32 two other curves W_1 and W_2 are drawn. They indicate the position of walls of infinite extension perpendicularly to the jets which in stopping the same would give rise to compression-waves at distances from the walls equal to the horizontal distances between the curves W_1 and P_1 respectively W_2 and P_2 . The two curves W_1 and W_2 intersect each other at the point a and

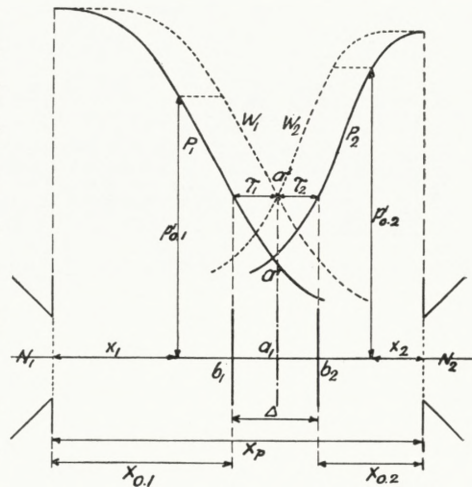


Fig. 32. Collision between two Jets with Velocities exceeding that of Sound.

in the corresponding point a_1 of the jet is the point of collision between the two jets, that is to say, the point where the two central stream-line flows meet and are brought to a stand-still. The two compression-waves are at the same time found at the points b_1 and b_2 . The collision between the two jets thus takes place as if an infinitely thin wall were inserted between the two jets.

The statement given above implies that the width A of the layer between the two compression-waves of the collision is found equal to the sum of the two distances τ_1 and τ_2 at the points b_1 and b_2 . In tab. III a comparison between A and $\tau_1 + \tau_2$ is undertaken. The agreement is practically perfect.

The statement illustrated in fig. 32 furthermore involves that the two compression-waves are found at points corresponding to the same pitot-pressure in the two jets. How exactly equal the two pressures are appears from the comparisons in tab. IV a—c in which P indicates the pressure in the pulsator and $p'_{0.1}$, $p'_{0.2}$ the pitot-pressures at the positions of the two compression-waves.

Tab. III.

τ_1	τ_2	$\tau_1 + \tau_2$	A
mm	mm	mm	mm
0.92	0.73	1.65	1.71
1.01	0.70	1.71	1.76
1.13	0.73	1.86	1.78
0.92	0.60	1.52	1.60
0.87	0.63	1.50	1.50
0.91	0.70	1.61	1.62
0.90	0.71	1.61	1.62
0.95	0.70	1.65	1.62
1.01	0.73	1.74	1.68
1.05	0.69	1.74	1.73
0.89	0.60	1.49	1.60

Tab. IV a.

$$\frac{P_0}{P_e} = 4.15, x_p = 3.27 \text{ mm.}$$

P	$x_{0.1}$	$x_{0.2}$	$P'_{0.1}$	$P'_{0.2}$
kg/cm ²	mm	mm	kg/cm ²	kg/cm ²
3.20	1.32	0.32	3.25	3.19
3.10	1.40	0.32	3.12	3.09
3.00	1.48	0.19	3.01	3.00
2.90	1.55		2.91	2.90
2.80	1.65	no	2.79	2.80
2.70	1.74	wave	2.69	2.70
2.55	1.84		2.60	2.55

Tab. IV b.

$$\frac{P_0}{P_e} = 4.15, x_p = 3.78 \text{ mm.}$$

P	$x_{0.1}$	$x_{0.2}$	$P'_{0.1}$	$P'_{0.2}$
kg/cm ²	mm	mm	kg/cm ²	kg/cm ²
3.3	1.45	0.83	3.07	3.04
3.2	1.45	0.80	3.06	2.99
3.1	1.48	0.74	3.00	2.95
3.0	1.50	0.66	2.98	2.92
2.9	1.53	0.58	2.93	2.85
2.8	1.65	0.48	2.80	2.79
2.7	1.74	0.27	2.70	2.70

Tab. IV c.

$$\frac{P_0}{P_e} = 4.15, x_p = 4.23 \text{ mm.}$$

P	$x_{0.1}$	$x_{0.2}$	$P'_{0.1}$	$P'_{0.2}$
kg/cm ²	mm	mm	kg/cm ²	kg/cm ²
3.7	1.48	1.13	3.00	3.04
3.5	1.55	1.06	2.91	2.98
3.3	1.57	1.00	2.89	2.91
3.1	1.62	0.93	2.82	2.81
2.9	1.67	0.83	2.77	2.76
2.7	1.77	0.59	2.66	2.68
2.6	1.84		2.60	2.60

When the pulsation-process has nearly come to an end, the compression-wave in front of the pulsator disappears, as already indicated, and now the jet emitted from the pulsator has a velocity smaller than that of sound. Now, with a jet the velocity of which is less than that

Tab. V a.

Jet-Nozzle Z I. Pitot-Nozzle No. 20 (Z II). $\frac{P_0}{P_e} = 4.16.$

x_p	$p'_{0.1}$	P
mm	kg/cm ²	kg/cm ²
2.80	1.90	1.92
—	1.81	1.82
—	1.77	1.74
—	1.68	1.68
—	1.63	1.63
3.00	2.07	2.07
—	1.91	1.92
—	1.81	1.80
—	1.73	1.70
—	1.61	1.61
3.20	2.19	2.15
—	1.99	1.99
—	1.91	1.90
—	1.74	1.73
—	1.56	1.57

of sound, the stoppage-pressure, i. e. the pitot-pressure, is simply that of the container from which the jet is emitted, barring the frictional losses in the bore. Hence, when the compression-wave in front of the pulsator disappears, it may be anticipated that the pitot-pressure at the place of the compression-wave facing the nozzle of the main jet, thus $p'_{0.1}$ above, should simply prove equal to the pressure P which obtains in the pulsator. This is

in fact found to hold good, as will be seen from table V a—c.

In later experiments it was found that any phase of

Tab. V b.

Jet-Nozzle Z I. Pitot-Nozzle No. 5. $\frac{p_0}{p_e} = 4.16$.

x_p	$p'_{0.1}$	P
mm	kg cm ²	kg cm ²
3.84	2.04	2.02
—	1.90	1.90
—	1.78	1.80
—	1.67	1.70
—	1.57	1.58

the process of discharge could be retained simply by supplying as much air to the pulsator as was emitted

Tab. V c.

Jet-Nozzle Z I. Pitot-Nozzle No. 36. $\frac{p_0}{p_e} = 4.15$.

x_p	$p'_{0.1}$	P
mm	kg/cm ²	kg cm ²
3.44	1.66	1.67
—	1.57	1.60
—	1.51	1.53
3.52	1.65	1.65
—	1.56	1.60
—	1.50	1.54
—	1.49	1.53
3.62	1.71	1.70
—	1.60	1.60
—	1.49	1.53

from the same through a pipe with adjustable valve. The arrangement shown in fig. 18 was used with the necessary

alterations. Under these circumstances the accuracy with which the process of discharge could be studied was greatly increased. Certain anomalies were thereby disclosed.

It was thus found that with pulsator-nozzle No. 20 (Z II) there was a tendency to find $p'_{0,2}$ larger than $p'_{0,1}$. The differences would be as great as 0.14 kg/cm^2 , while the certainty with which the manometers could be read was ab. 0.03 kg/cm^2 . On the other hand, with pulsator-nozzle No. 5, $p'_{0,1}$ was found slightly, say 0.06 kg/cm^2 , in excess of $p'_{0,2}$ if the pulsator pressure was high. Finally with the pointed nozzle No. 38 the agreement between $p'_{0,1}$ and $p'_{0,2}$ was practically perfect.

A scrutiny of the corresponding photographic pictures showed that when $p'_{0,2}$ was found larger than $p'_{0,1}$ then the air from the collision-layer was found to bend towards the pulsator-nozzle somewhat in the shape of an umbrella partly covering the said nozzle. In cases where $p'_{0,1}$ was found higher than $p'_{0,2}$, the opposite state of things obtained in that the layer was now driven towards the nozzle of the main jet. With the pointed pulsator-nozzle No. 38 the air from the collision layer escaped laterally, leaving the free atmosphere access to the two jets. It was concluded that the discrepancies observed were due to the covering of the one or the other jet by the air from the collision-layer, because, when such covering takes place, the jet is not emitted into the free atmosphere. This means that the observed value $\frac{p_0}{p_e}$ of the internal and external pressures is too high and, again, that the values of $p'_{0,1}$ or $p'_{0,2}$ derived from the pitot-curves corresponding to the observed value of $\frac{p_0}{p_e}$ are too high.

5. The lower Reversion-Point.

The process of discharge generally comes to an end quite abruptly without any warning and while a considerable flow of air is still emitted from the pulsator. The question is what causes this sudden reversal from a discharge to a charging of the pulsator. It was thought

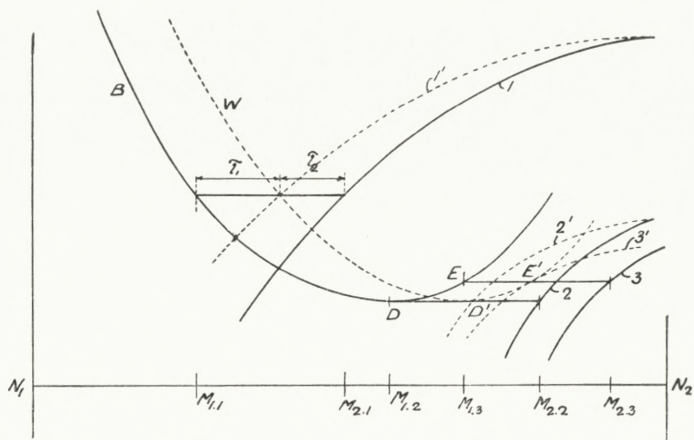


Fig. 33. Explanation of Reversion from Discharge to Filling.

likely that the phenomenon could be explained by the facts revealed in the preceding paragraph.

We may follow the process of discharge from its beginning by means of a diagram like that in fig. 32. At the start the layer of collision is formed between the two compression-waves $M_{1,1}$ and $M_{2,1}$, fig. 33. We shall now assume that during the following fall of the pressure in the pulsator the positions of the said layer may at any stage be determined in just the same way as at the first moment. That is to say, we shall assume the process of collision to be a quasi-stationary process, and we are undoubtedly justified in doing so because the said layer travels with a

velocity which, with a pulsator, is generally extremely small compared to the velocity of the two jets involved. (Conditions are undoubtedly different with the very rapid oscillations which may be set up by means of a small cylindrical oscillator. We are, therefore, not justified in applying the results of the investigations here recorded to the said oscillations without a special test, although it seems likely that the oscillations and the pulsations are related). During the process of discharge the compression-wave of the main jet will finally reach the lowest point D of the pitot-curve of this jet, for it is not to be seen what should stop the process of discharge before the said position is reached. The question is what will now happen. At the said stage the pitot-curve of the pulsator jet is 2, and the corresponding dotted curve 2', representing the position of a fixed wall stopping the jet as described above, is just cutting the dotted curve W of the main jet at its minimum point D' . The pitot-curve of the pulsator-jet proceeds to fall, but still for some time the corresponding dotted curve will cut W , and it may therefore be anticipated that the compression-wave of the main jet may proceed beyond D and probably to the point E . The latter point is determined by the dotted curve 3' of the pulsator-jet just touching W . What now happens with a further fall of the pressure in the pulsator is undoubtedly a little obscure. Most likely the discharge is practically checked at the moment E is reached. At any rate it cannot be long before the pulsator-jet is no longer able to produce a pressure large enough to resist the pressure of the main jet. Thus in a case like that in fig. 33, that is to say, in a case in which the pulsator-jet exhibits super-sound velocity during the whole process of discharge, E is probably very

nearly the point at which the compression-wave of the main jet stands at the last moment of the process of discharge.

Simpler relations obtain if the pulsator-jet, during the last phase of the said process, has become a jet with a velocity smaller than that of sound. In this case the compression-wave of the main jet will in all probability proceed to the point D and not beyond the same. It will be there at the moment the pressure in the pulsator has sunk to the pitot-pressure given by the ordinate of D . At that moment there will be equilibrium between the said pressure and the stoppage-pressure of the pulsator-jet, which pressure is just the pressure in the pulsator. Any further small discharge of the pulsator will now lower the stoppage-pressure of the pulsator-jet. But this means that the latter can no longer resist the main jet, as the stoppage-pressure of this jet can never sink below the minimum ordinate at D . The process of charging must therefore undoubtedly set in when the compression-wave of the main jet has reached D .

In addition to the discussion stated above certain anticipations with regard to the front of the interval of instability were formed.

If the nozzle of the pulsator is carried forward so that the compression-wave in front of this nozzle is formed inside that part of the main jet for which the pitot-curve falls, then we must undoubtedly expect the pulsator to charge to a pressure identical with the ordinate of the pitot-curve at the place of the compression-wave. Or rather, we know from the experiments recorded in part I that it is so. A discharge of the pulsator is out of the question. For if such a discharge were started, the compression-wave would be driven backwards towards the

nozzle of the main jet, that is to say, towards higher ordinates of the pitot-curve. So higher pressures would be created, opposing the outflow from the pulsator. And the outflow would therefore at once be checked. If now the nozzle of the pulsator is carried backwards away from the jet-orifice, the compression-wave will follow till it has reached the minimum-point of the pitot-curve. If the distance from the jet-orifice to the pulsator is made still greater than corresponding to this position of the compression-wave, the latter should come on the rising branch of the pitot-curve, provided a stable charging of the pulsator were possible. But, as already explained, it is not. So we must in all probability expect the front of the interval of instability to be that position of the pulsator which causes the compression-wave to fall in the minimum point of the pitot-curve.

A test on the anticipations stated above is now described. It included observations on the position of the compression-wave in the main jet at the last moment of the discharge. At the same time observations of the lowest pressure in the pulsator were taken with a view to comparing this pressure with the pitot-pressure corresponding to the said position of the compression-wave in cases where the two pressures were likely to coincide.

Attempts were made to find the final position of the compression-wave in question by making the process of discharge steady — at the last moment of the discharge — in the way indicated above. The scheme was, however, found difficult to carry out because just at the said moment a slight change in the pulsator-pressure gives rise to a comparatively great displacement of the compression-wave considered. So it was decided to try to find

the position by means of a photograph of the jet taken during the last part of the process of discharge in the illumination of a series of sparks of comparatively large frequency, say 20—30 per sec. The problem was to take the picture in such a way that the front of the wave in its last position could be discerned. This was no easy matter for the said front is partly covered by the pictures of the preceding waves. The movable screen S_3 of the optical arrangement, fig. 20, was therefore set so as to take away most of the light, leaving practically only a picture of the wave proper. This can be done because the refraction in the wave is so much larger than in the remainder of the jet. At the same time the photographing was started as late as possible. From the picture the position of the front of the last wave was found by adding to the distance x_0 , fig. 34, from the nozzle of the main jet to the nearest wave the width Δ of the band of wave pictures, the said width being measured at the edge of the band where the waves appear practically without any extension in the direction of the jet,

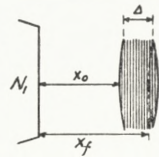


Fig. 34. Determination of the Wave-Front at the last Moment of the Process of Discharge.

We now pass on to consider the results. With an obtuse conical pulsator-nozzle of the type I (No. 20) it was found that the pressure P of the air in the pulsator at the last moment of the process of discharge, i. e. the lower reversion-point, was equal to the pitot-pressure in the main jet at the entrance to the interval of instability. This is true with all positions of the pulsator-nozzle inside the interval of instability, barring positions quite close to the exit-boundary of the interval where the pulsator-pressure grew rapidly with the distance from the jet-orifice.

Furthermore it was found that the point to which the compression-wave nearest to the jet-orifice advanced during the process of discharge was just the position of the wave in the main jet when the pulsator-nozzle was placed at the foremost limit of the interval of instability. This applies to all positions of the pulsator-nozzle N_2 for which the lower pulsator-pressure P_l was constant, compare fig. 23—25 and

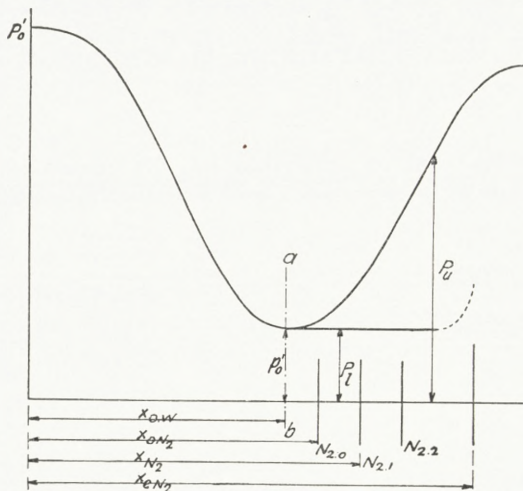


Fig. 35. Results of Investigation of the lower Reversion-Point.

fig. 35, thus over the greater part of the interval of instability. In the rear of the latter, where the pulsator-pressure increases, it was observed that the compression-wave did not stop at the position corresponding to the entrance to the interval of instability but proceeded beyond the said position at a great rate.

The velocity of the motion was, as a matter of fact, so large that the consecutive positions of the wave were distinctly separated in the photograph, produced, as indicated, by means of a series of sparks with a frequency of 20—30 per sec. The results are illustrated in the diagram fig. 35, where ab is the position of the compression-wave in front of the pulsator-nozzle N_2 when the latter is placed just in front of the interval of instability at $N_{2,0}$. It will be seen that the main results agree with the anticipations stated above, provided the position ab coincides with the minimum of the pitot-curve. It very nearly does, as will

appear from fig. 36 in which the position, ab , has been marked. But otherwise it proved very difficult to locate the entrance to the interval of instability characterized by ab exactly in relation to the minimum-point because the determination of the latter point is very uncertain. This is due to the fact that the pitot-pressure just at the minimum-point varies extremely rapidly over the cross-section with a very pronounced minimum in the axis.

In the tables VI a—b samples of observations are given confirming the preceding statement with regard to the position of the compression-wave W_1 of the main jet in the lower reversion-point. In the tables VII a—b the constancy of P_l , i. e. the lower pressure in the pulsator, is illustrated.

All that has so far been stated in the present paragraph has, as will be noted, exclusive reference to the relations with an obtuse conical pulsator nozzle. With a cylindrical nozzle of types II or III certain anomalies are observed. In the first instance the interval of instability has no definite foremost boundary. Thus with a nozzle of type II, that is to say, a nozzle with a cylindrical bore and a flat front side, the compression-wave appeared less sharply within a certain region in front of the interval of instability. At the same time a slight movement of the pointer of the pulsator-manometer was observed, indicating a lack of stability in the state of the system. With a nozzle like that of type III, i. e. pointed with a cylindrical bore, the position of the compression-wave within a similar region in front of the interval of instability was very unstable. By means of a Kundt-tube it was found that acoustic oscillations were emitted from the nozzle

Tab. VI a—b.

$N_1 = Z_1, N_2 = \text{No. 20}$ $\frac{p_0}{p_e} = 3.50$		$N_1 = Z_1, N_2 = \text{No. 20}$ $\frac{p_0}{p_e} = 3.95$	
$x_{0,W} = 1.58 \text{ mm}$ (Fig. 35)	—	$x_{0,W} = 1.83 \text{ mm}$ (Fig. 35)	—
$x_{0,N_2} = 2.48 \text{ mm}$	—	$x_{0,N_2} = 2.84 \text{ mm}$	—
$x_{e,N_2} = 3.80 \text{ mm}$	—	$x_{e,N_2} = 4.20 \text{ mm}$	—
x_{N_2}	x_W	x_{N_2}	x_W
mm	mm	mm	mm
2.52	1.62	2.92	1.87
2.62	1.67	3.07	1.91
2.72	1.69	3.22	1.87
2.77	1.64	3.37	1.89
2.87	1.70	3.52	1.89
2.97	1.68	3.67	1.81
3.07	1.72	3.82	1.81
3.17	1.65	3.97	1.81
3.27	1.58	4.17	1.87
3.37	1.58		
3.47	1.60		
3.57	1.58		
3.67	1.56		
3.77	1.60		

$x_{0,W}$ Position of Wave W_1 with Pulsator at the Entrance-Boundary of Interval of Instability.

x_{0,N_2} Position of Pulsator-Nozzle when in Entrance-Boundary of Interval of Instability.

x_{e,N_2} Position of Pulsator-Nozzle when in Exit-Boundary of Interval of Instability.

x_{N_2} Arbitrary Position of Pulsator-Nozzle.

x_W Corresponding Position of Wave W_1 in the Reversion-Point.

with a frequency corresponding to the natural period of the cylindrical bore acting as an open organ-pipe. In addition irregularities in the motion of the compression-wave could be directly discerned. Finally it was found that with nozzles of type III the pulsations only started when already of a comparatively large amplitude. If, how-

Tab. VII a—b.

$N_1 = Z_1, N_2 = \text{No. 20}$				$N_1 = Z_1, N_2 = \text{No. 1}$			
$\frac{p_0}{p_e} = 3.50$				$\frac{p_0}{p_e} = 3.50$			
$x_{0.N_2} = 2.48 \text{ mm}, x_{e.N_2} = 3.79 \text{ mm}$				$x_{0.N_2} = 2.50 \text{ mm}, x_{e.N_2} = 3.74 \text{ mm}$			
x_{N_2}	x_W	P_l	P_u	x_{N_2}	x_W	P_l	P_u
mm	mm	kg/cm ²	kg/cm ²	mm	mm	kg/cm ²	kg/cm ²
				2.50	1.61	1.72	
2.48	1.59	1.70		2.54	1.61	1.72	1.74
2.49	1.59	1.70	1.88	2.64	1.61	1.72	1.79
3.24	1.53	1.70	2.47	2.89	1.65	1.72	2.02
3.79		2.48		3.14	1.57	1.74	2.29
				3.39	1.65	1.74	2.47
				3.74	2.98	2.47	

ever, the aperture of the pulsator was for a moment partly shielded against the main jet, the pulsations would start with a position of the pulsator-nozzle closer to the jet-hole and with a correspondingly smaller amplitude. (Compare paragraph 3 and fig. 25).

Now in spite of the lack of definiteness indicated above and of the fact that the pulsator-pressure does not generally exhibit any definite final value before the pulsations set in, there is, as a rule, a rather definite and constant minimum value P_l of the pressure in the pulsator throughout the greater part of the interval of instability just as with the pulsator-nozzle of type I. And it should be noted that the said value does not seem to depend on the pulsator-nozzle, it being the same for all nozzles in combination with the same jet. Likewise it was found that the position of the compression-wave facing the jet-orifice in the lower reversion-point was also constant throughout most of the interval of instability, depending only on the jet and not on the pulsator nozzle. The tables VIII a—e are to illus-

trate the behaviour of cylindrical nozzles. In the tables (and in the tables VII a—b) P_u means the pulsator-pressure at the uppermost reversion point of the pulsation-process, comp. fig. 35. In the x_w column (—) indicates that no definite final position of the compression-wave W_1 could be

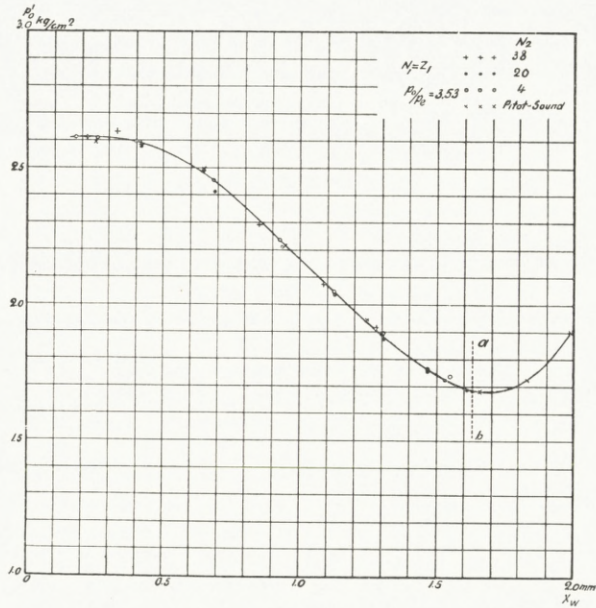


Fig. 36. Pitot-Curve with the Front of the Interval of Instability, ab , marked.

observed. The first value of x_{N_2} in each table represents the first position of the pulsator nozzle with which pulsations were obtained, thus the entrance to the actual interval of instability, while the last value indicates the exit-boundary of the said interval.

6. The Process of Filling.

While the shape of the pulsator-nozzle does not play any great part in the process of discharge and especially

Tab. VIII a—e.

$N_1 = Z_1, \frac{P_0}{p_e} = 3.50$					$N_1 = Z_1, \frac{P_0}{p_e} = 3.49$				
N_2	x_{N_2}	x_W	P_l	P_u	N_2	x_{N_2}	x_W	P_l	P_u
	mm	mm	kg/cm ²	kg/cm ²		mm	mm	kg/cm ²	kg/cm ²
No. 4 Tab. VIII a	2.42	1.65	1.72	1.91	No. 4 Tab. VIII c	2.34	1.56	1.73	1.87
	2.72	1.65	1.72	2.11		2.54	1.58	1.73	1.99
	3.02	1.61	1.72	2.34		2.74	1.62	1.73	2.15
	3.32	1.69	1.75	2.48		2.94	1.60	1.73	2.29
	3.47	(—)	2.32	2.49		3.14	1.60	1.75	2.41
	3.57	2.86	2.48			3.49	(—)	2.19	2.47
No. 2 Tab. VIII b	2.53	1.61	1.70	1.77	No. 38 c Tab. VIII d	2.55	1.60	1.72	1.91
	2.88	1.61	1.72	2.04		2.70	1.58	1.71	1.98
	3.18	(—)	1.85	2.37		2.85	1.58	1.71	2.10
	3.48	(—)	2.24	2.47		3.00	1.58	1.71	2.21
	3.58	(—)	2.47			3.15	1.58	1.71	2.31
						3.30	1.56	1.71	2.39
No. 40 Tab. VIII e					No. 40 Tab. VIII e	3.40	(—)	1.87	2.46
						3.50	(—)	1.94	2.49
						3.60	(—)		2.48
						2.61	1.60	1.70	1.84
						2.76	1.60	1.70	1.93
						2.91	1.62	1.70	2.07
				3.21	1.58	1.70	2.35		
				3.36	1.60	1.70	2.46		
				3.46	1.62	1.70	2.47		
				3.51	2.61	1.70	2.46		

is without influence on the final pressure in the pulsator during the said process, it turns out that the character of the nozzle is quite predominant with regard to the value to which the pressure rises in the pulsator during the filling and also with respect to the regularity with which the process of filling repeats itself. It was found that, as already stated in paragraph 3, nozzles with cylindrical bores, whether flat or pointed, produce by far the most

vigorous pulsations and that the definiteness of the upper limit of the pulsator-pressure is with such nozzles astonishingly high. On the other hand, it turned out that obtuse conical nozzles, which exhibited well defined relations at

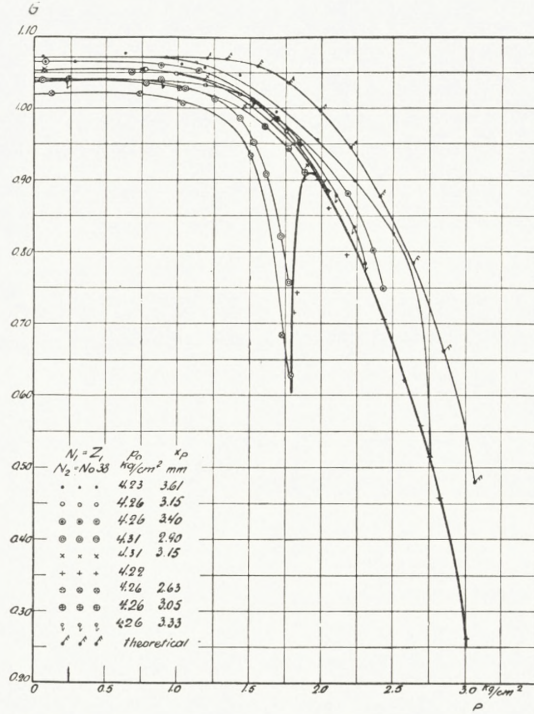


Fig. 37. Process of Filling. Abscissa: Pressure in Pulsator.
Ordinate: Rate of Filling.

the lower reversion-point, give rise, at the upper reversion-point, to great irregularities in the completion of the process of filling.

In the study of the process of filling the rate of filling was first examined. Records hereof were already obtained in the pulsator oscillograms figs. 26 and 27. It is seen that the rate with which the pressure rises during the filling decreases as the counter-pressure in the pulsator increases. As, however, the temperature of the air in the pulsator

rises during the filling, the oscillograms are not suited for a determination of the mass of air G which flows into the pulsator per second.

With a view to measuring G directly, the pressure in the pulsator was kept constant by tapping off air at the rate of the filling. The air was collected in a gasometer, fig. 18 b, and so measured. In this way curves representing the variation of G during the process of filling were obtained. Samples corresponding to a series of positions of the pulsator-nozzle are given in fig. 37 where the abscissa is the counter-pressure P in the pulsator. It is seen that with small values of the pressure in the pulsator, G is independent of the said pressure just as is the rate of flow from one container into another through a bore when the ratio of the pressures is above the critical value, i. e. the value at which the velocity in the bore has become that of sound. With a view to comparison the curve, the uppermost, representing the flow determined by St. Venant's formula

$$G = S \cdot \sqrt{\frac{2z}{z-1} p_0 \rho_0 \left(\frac{P}{p_0}\right)^{\frac{2}{z}} \left(1 - \left(\frac{P}{p_0}\right)^{\frac{z-1}{z}}\right)}$$

is drawn. The latter formula is known to hold good for the flow of an ideal gas between the two pressures p_0 and P through a hole of aperture S provided $\frac{P}{p_0} > 0.527$ and subject to the condition that S is and remains the smallest cross-section of the flow. With the pulsator-nozzle at greater distances from the entrance to the interval of instability the filling of the pulsator obviously takes place approximately as if the pulsator was connected with the air-container through a simple obtuse conical bore.

The curve drawn with a heavy line connecting the ends

of the G — P -curves represents, as will be understood, the rate of flow and the pulsator-pressure at the upper reversion-point. Or rather, it represents G corresponding to a pulsator-pressure ab. 0.01 kg/cm^2 below the pressure at the said point. So close to the reversion-point the flow could be made steady, and G measured with a cylindrical pulsator-nozzle.

7. The upper Reversion-Point.

The process of filling generally changes into the process of discharge as abruptly as the latter process is replaced by the former. In order to throw light on the process of filling and on the upper reversion-point, series of instantaneous photographs were taken. In fig. 38 a—c, Pl. 6, a sample is given. Fig. 38 a shows the jet at the beginning of the filling, fig. 38 c at the end, and fig. 38 b at an intermediate point of the process. At the first stage the jet seems to penetrate without hindrance into the pulsator-nozzle to the right. Later on a compression-wave appears in front of the same. The distance from the nozzle to the wave gradually increases till the upper point of reversal is reached. On the basis of the insight thus obtained the following conception of the cause of the sudden start of the discharge was formed.

As during the filling the pressure in the pulsator is increased beyond the critical value disclosed in fig. 37, the air in the pulsator acts more and more as a hindrance to the main jet and accordingly sets up a compression-wave in front of the pulsator nozzle. The said wave develops gradually as the static pressure in the pulsator and in front of the nozzle increases. At the same time more and more air escapes laterally. In this state of affairs no essential

change can take place before the static pressure in the pulsator has risen to the least stoppage-pressure occurring in any of the stream-line tubes of which the main jet consists. Generally the stoppage-pressure will be least for the central stream-line tube. It is therefore to be anticipated that the flow of the latter is stopped while the surrounding

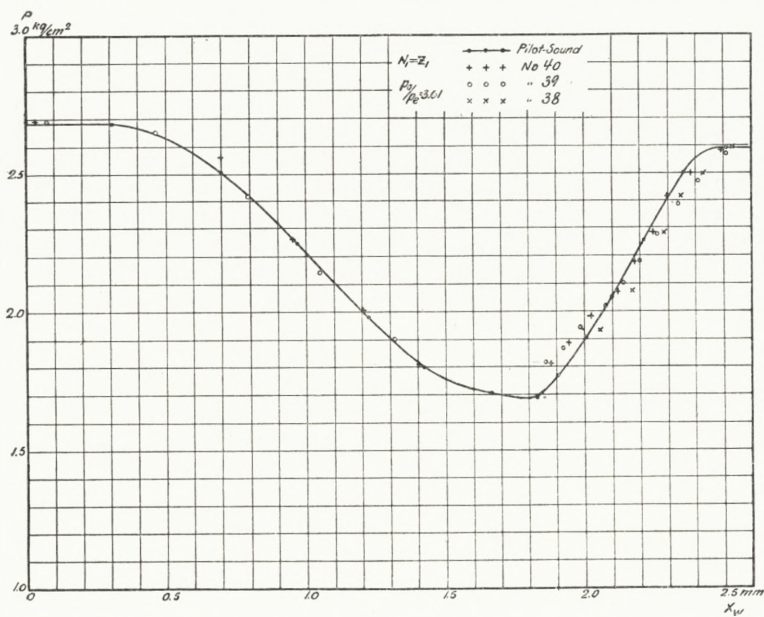


Fig. 40. Experimental Test of Conception with Regard to upper Reversion-Point.

tubes, owing to their larger stoppage-pressures, are not yet brought to a stand-still and so will continue to charge the pulsator. This state, however, can only last for quite a short moment, for owing to the said charging, the increase of the pressure in the pulsator will naturally cause a discharge from the pulsator along the central stream-line tube which cannot stand a larger pressure than its own stoppage-pressure.

With a view to testing the conception now indicated simultaneous observations of the pulsator-pressure and the

position of the compression-wave were undertaken at the upper point of reversal. From pitot-curves for the main jet the pitot-pressure corresponding to the said position of the wave could hereupon be found and compared with the pulsator-pressure. The final position of the wave was found by photographing the jet in the illumination of a series

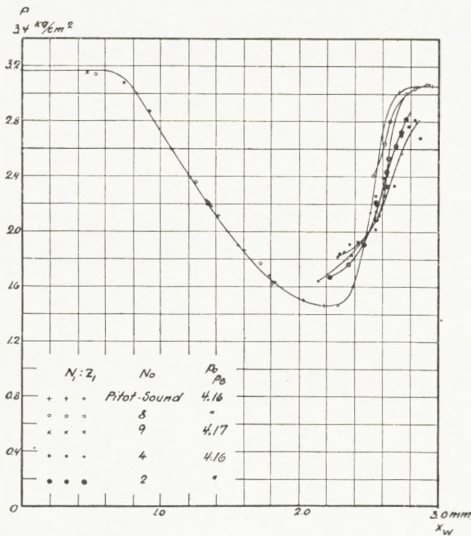


Fig. 41. Experimental Test of Conception with Regard to upper Reversion-Point.

of sparks just as with the corresponding determination with the lower reversion-point. Now, however, the difficulties met with in the latter case were no longer present as the front of the wave is now also the front of the motion. Samples of the pictures are given in fig. 39 a—b, Pl. 6. It should be noted that the wave nearest to the jet-hole has nothing to do with the phenomenon

here considered as it represents the wave which stops the jet from the pulsator at the first moment of the discharge.

Results of the comparison according to the method indicated are represented in figs. 40—41. In the figures the pitot-curve of the main-jet is reproduced. The points around or near the rising branch of the curves show the final pressures in the pulsator plotted against the final position of the wave in front of the pulsator-nozzle. The less the diameter of the cylindrical pulsator-nozzle, the closer to the pitot-curve are the points of observation as a rule.

With nozzles of about the same diameter as the jet, marked discrepancies occur. The latter are, however, much less pronounced with nozzles of types II and III than with such of type I.

In connection with the investigations of the upper point of reversal, determinations of the rear boundary of the interval of instability were made. It turned out that the said boundary was by far not as well-defined as the front of the interval. It seems, however, that the pulsations are apt to cease when the compression-wave which stands in front of the nozzle at the upper reversion-point has reached the boundary of the jet section.

In conclusion we desire to express our obligation to the Trustees of the Carlsberg Foundation for enabling us to carry out the present investigation by furnishing us with the necessary financial aid.

Physical Laboratory II of the Royal Technical College.

Copenhagen, Nov. 1928.

List of References.

1. JUL. HARTMANN. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. math.-fys. Medd. I. 13. (1919).
 2. — Phys. Rev. 20. (1922). pg. 719.
 3. — and BIRGIT TROLLE. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. math.-fys. Medd. VII. 6. (1926).
 4. — — Journal of Scientific Instruments, Vol. IV. No. 4. Jan. 1927.
 5. A. STODOLA. Die Dampfturbinen. IV Auflage. Berlin 1910.
 6. L. PRANDTL. Handwörterbuch d. Naturwissenschaften. Bd. IV, pg. 544.
 7. ST. VENANT & WANTZEL. Journal de l'École Polytechnique, Vol. 16. 1839.
 8. T. E. STANTON. Proc. of the Royal Soc. A. Vol. 111. 1926, p. 306.
 9. L. PRANDTL. Phys. Zeitschrift 1904. 599.
 10. — Phys. Zeitschrift 1907. 23.
 11. TH. MEYER. Inaugural Dissertation 1908.
 12. E. MAGIN. — — 1908.
 13. A. STEICHEN. — — 1909.
 14. E. MACH u. P. SALCHER. Wied Ann. 41. 1890, pg. 144.
 15. R. EMDEN. Wied Ann. 69. 1899, pg. 426.
 16. H. PARENTY. Ann. chim. phys. 12. 1897. 289.
 17. RIEMANN-WEBER. Die partielle Differentialgleichungen. 5 Aufl. Bd. II, pg. 481. Braunschweig 1912.
 18. Lord RAYLEIGH. Scientific Papers Vol. V, p. 573.
 19. Handbuch d. Physik. B. VII, pg. 330. Berlin 1927.
 20. MAX TÖPLER. Ann. d. Physik 27. 1908. 1043.
-

Contents.

	Page
Introduction	3

I

On the Air-Jet with a Velocity exceeding that of Sound.

1. Production of an Air-Jet with a Velocity exceeding that of Sound	5
2. Structure of an Air-Jet with a Velocity exceeding that of Sound	7
3. The Stationary Compression-Wave	9
4. Stoppage of an Air-Jet with a Velocity exceeding that of Sound	13
5. The Pitot-Curve	15
6. Investigations on the Pitot-Curve	18

II

Investigations on the Modus Operandi of the Pulsator.

1. Experimental Arrangements	24
2. Anticipations with Regard to the Explanation of the Pulsation- Process	29
3. Pulsator-Diagrams	31
4. The Process of Discharge. Investigations by the Method of Striae	35
5. The lower Reversion-Point	43
6. The Process of Filling	52
7. The upper Reversion-Point	56

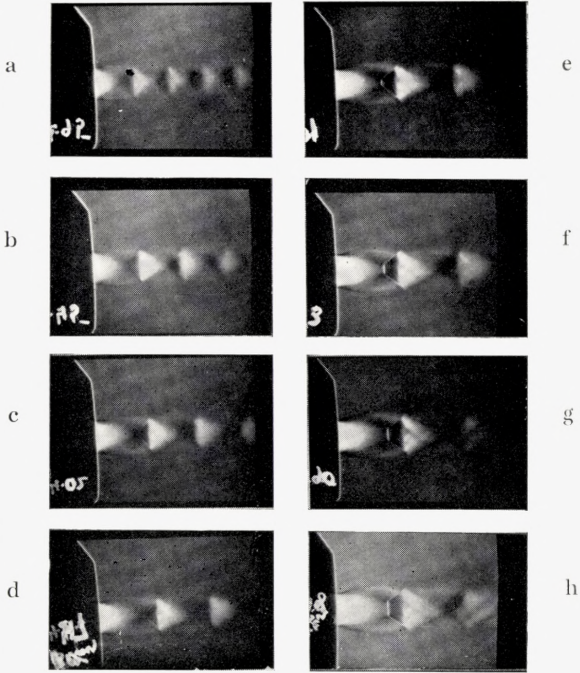


Fig. 4. The Pictures show the gradual Development of a perpendicular Compression-Wave and the breaking down of the regular Structure of the Jet. (See Tab. I).

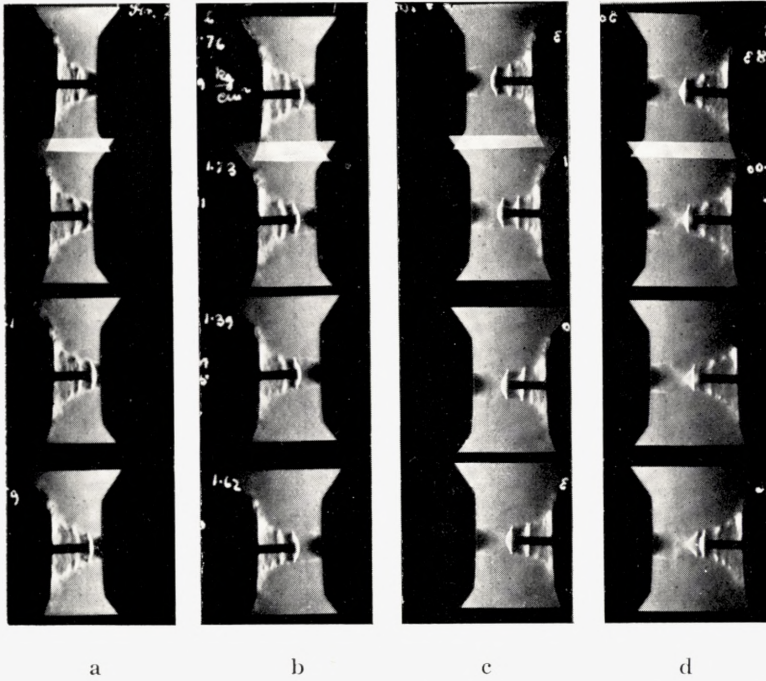


Fig. 11. Photographs used in the Determination of a Pitot-Curve. Jet-Orifice ZI. Pressure in Container 4.26 kg/cm^2 , x_p from 0.11 to 2.86 mm. Optical Screen perpendicular to Axis of Jet. Steel-Sound. (See Tab. II).

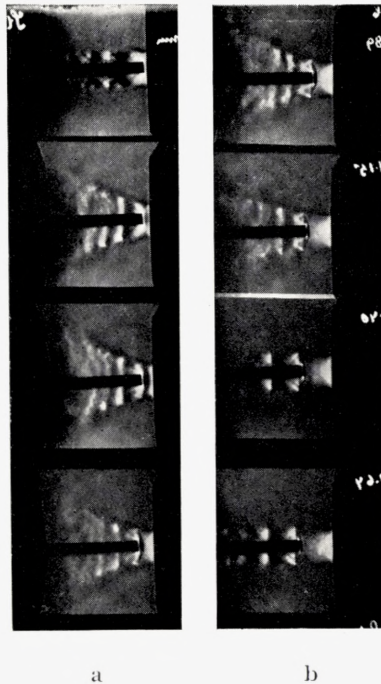


Fig. 12. Photographs used in the Determination of a Pitot-Curve. Jet-Orifice ZI. Pressure in Container 4.28 kg/cm^2 , x_p from 0.13 to 1.88 mm. Optical Screen perpendicular to Axis of Jet. Steel-Sound. (See Tab. II).

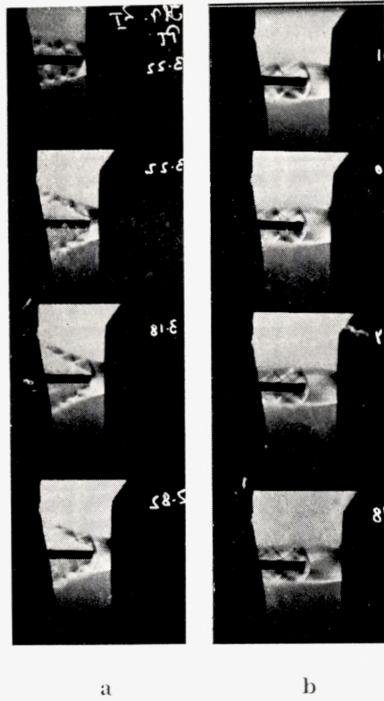


Fig. 13. Photographs used in the Determination of a Pitot-Curve. Jet-Orifice Z1. Pressure in Container 4.21 kg/cm^2 . x_p from 0.14 to 2.24 mm. Optical Screen parallel to Axis of Jet. Steel-Sound. (See Tab. II).

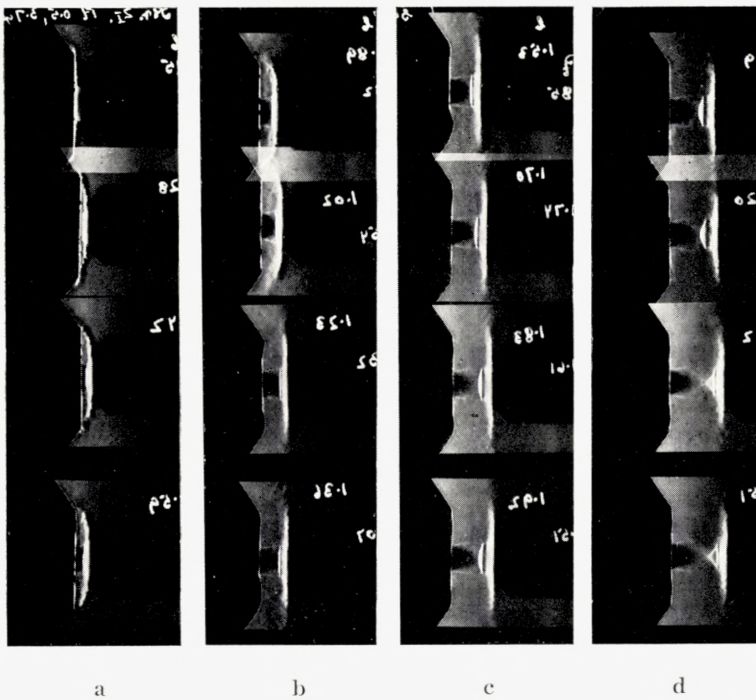


Fig. 14. Determination of Part of a Pitot-Curve by Means of a Nozzle. Jet-Orifice Z1. Pressure in Container 3.23 kg/cm^2 . Optical Screen perpendicular to Axis of Jet. (See Tab. II).

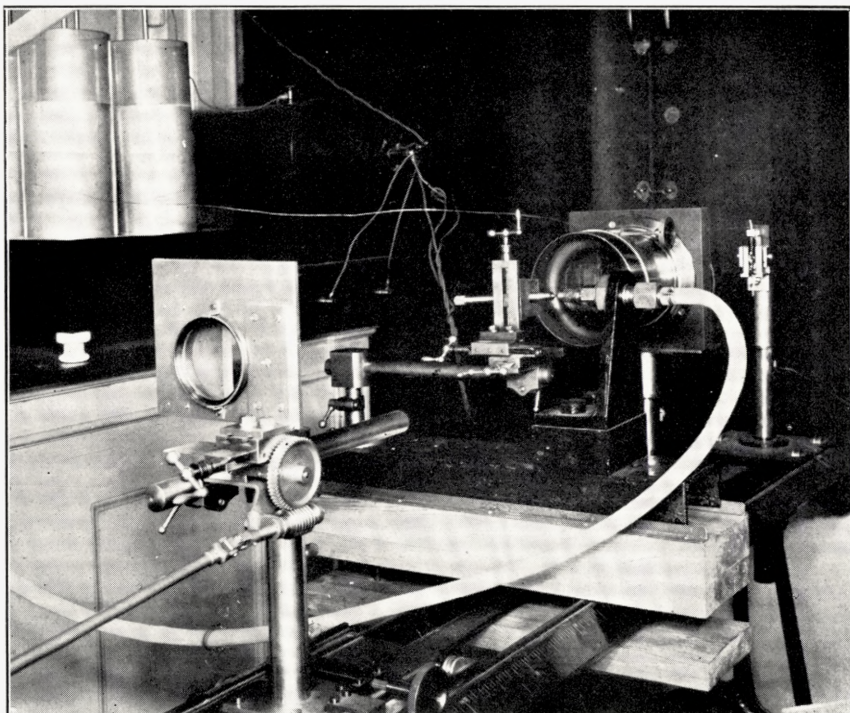


Fig. 21. Optical Arrangement.

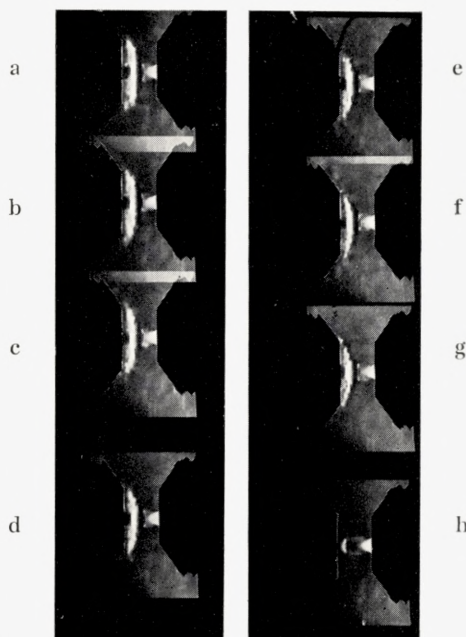


Fig. 28. The Pulsation-Process. Jet-Orifice Z_I . Pulsator Nozzle Z_{II} . $x_p = 4.48$ mm
 $p_0 = 4.26$ kg/cm². Consecutive Values of Pulsator-Pressure P : 2.92, 2.68, 2.48,
 2.28, 2.08, 1.88, 1.68, 1.58 kg/cm² (Excess-Pressures).

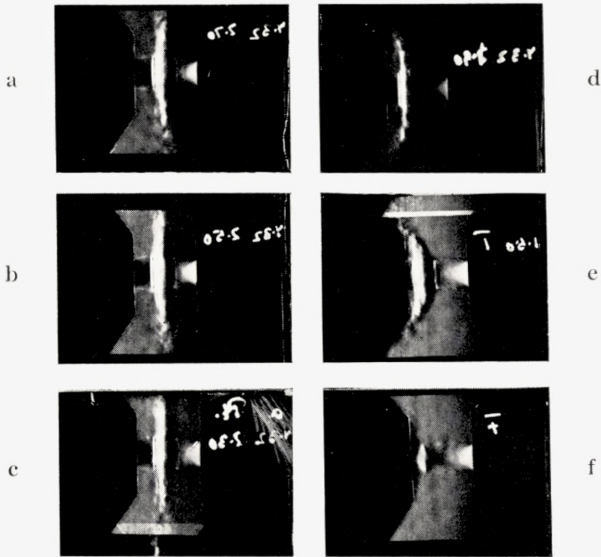


Fig. 29. The Pulsation-Process. Jet-Orifice Z_I . Pulsator-Nozzle No. 5, $x_p = 4.32$ mm, $p_0 = 4.28$ kg/cm². Consecutive Values of Pulsator-Pressure P : 2.70, 2.50, 2.30, 1.90, 1.50, 1.00 kg/cm² (Excess-Pressures).

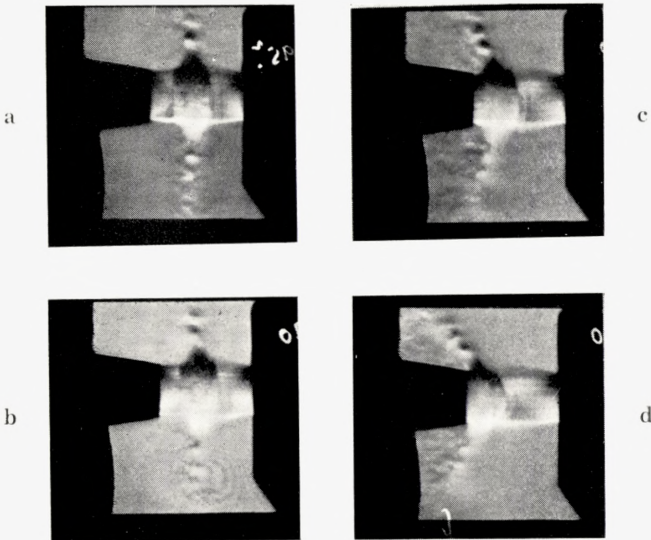


Fig. 30. The Pulsation-Process. Jet-Orifice Z_I . Pulsator-Nozzle No. 38, $x_p = 2.34$ mm, $p_0 = 4.26$ kg/cm². Consecutive Values of Pulsator-Pressure P : 2.95, 2.70, 1.70, 1.50 kg/cm² (Excess-Pressures).

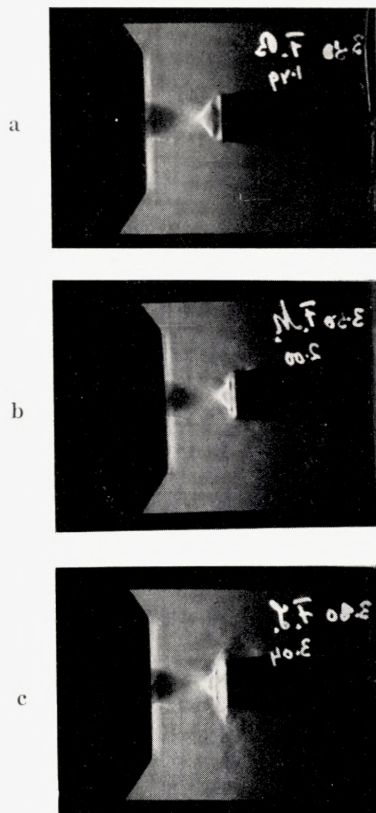


Fig. 38. Process of Filling. The Development and Motion of a Compression-Wave in Front of the Pulsator during the Filling. $N_1 = Z_1$. $N_2 = \text{Nr. 38}$,

$$\frac{p_0}{p_c} = 4.15.$$

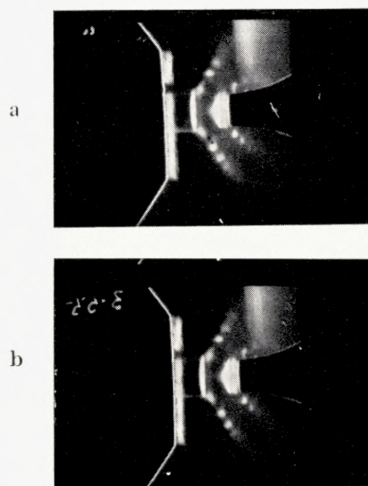


Fig. 39. Motion of the Compression-Wave near the End of the Process of Filling.

$$N_1 = Z_1. N_2 = \text{Nr. 40. } \frac{p_0}{p_c} = 4.15.$$

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.

Mathematisk-fysiske Meddelelser. **X**, 5.

SUR L'INTRODUCTION
DES FONCTIONS SPHÉRIQUES
DANS L'ANALYSE

PAR

NIELS NIELSEN



KØBENHAVN

HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI

1929

On a cru jusqu'ici que les fonctions sphériques de première espèce $P^n(x)$, n étant égal à zero ou à un positif entier, sont introduites dans l'analyse par EULER, puis par LEGENDRE qui ne connaissait pas les développements de son prédécesseur.

EULER part de l'équation différentielle

$$(1) \quad (1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0,$$

et il démontre qu'elle est satisfaite par le polynome entier

$$y = D_x^n [(x^2-1)^n],$$

fait qui a plus tard conduit à la formule importante

$$(2) \quad P^n(x) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} D_x^n [(x^2-1)^n].$$

LEGENDRE a pris pour point de départ la série de puissances

$$(3) \quad (1-2\alpha x+x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} P^n(\alpha) x^n,$$

convergente pourvu que

$$|x| < |\alpha \pm \sqrt{\alpha^2-1}|,$$

et il a démontré la formule intégrale

$$(4) \quad \int_{-1}^{+1} P^m(x) P^n(x) dx = 0, \quad m \gtrless n;$$

c'est-à-dire que les $P^n(x)$ forment, dans l'intervalle de -1 à $+1$, un système de fonctions orthogonales.

On voit, en intégrant par parties, que la formule (4) est une conséquence immédiate de la formule (2), c'est-à-dire du quotient différentiel d'EULER.

Or, notre opinion sur l'introduction des fonctions sphériques dans l'analyse est fautive, parce que le chevalier de LOUVILLE, déjà en 1722, a trouvé les fonctions $P^n(x)$, en indiquant un développement qui n'est au fond autre chose que la formule de LEGENDRE, fait qui m'oblige à donner une correction historique à mon livre sur les fonctions sphériques¹.

LOUVILLE a été conduit à sa formule remarquable par un paradoxe apparent de la mécanique.

GALILÉE avait démontré que des chutes par les cordes quelconques du même cercle vertical sont toutes isocrones; HUYGENS donnait plus tard sa démonstration intéressante de l'isocronisme des chutes par les différents arcs de la même cycloïde verticale et renversée.

SAURIN² a défini clairement le paradoxe apparent susdit, comme il suit:

»A cette démonstration [de HUYGENS] étendue jusqu'au cas de la chute par le dernier arc infiniment petit de la cycloïde, on oppose (et c'est la difficulté) la démonstration

¹ Théorie des fonctions métasphériques. Paris 1911.

² Mémoires de l'Académie des sciences 1722, 70.

de GALILÉE, étendue jusqu'au cas de la chute par la corde infiniment petite du cercle.

Il s'agit donc des arcs infiniment petits issus du point le plus bas de la cycloïde verticale et renversée.

PARENT¹, qui a observé le premier le paradoxe apparent susdit, prétendait que les démonstrations de GALILÉE et de HUYGENS poussées ainsi jusqu'au cas des infiniment petits, se combattent l'une l'autre. Il se déclarait contre la démonstration de HUYGENS et décidait hardiment qu'elle n'était point applicable dans ce cas. De plus, il croyait appuyer solidement sa décision par l'examen de sa démonstration même.

SAURIN² démontrait, l'année suivante, qu'une erreur s'était glissée dans les développements de PARENT.

Le même jour que paraissait cet article de SAURIN, il reçut une lettre de PARENT qui faisait remarquer, qu'ayant été averti par l'HÔPITAL depuis quelques temps que SAURIN s'occupait de cette question, il s'était aperçu lui-même de son erreur.

Le premier article de son livre³, paru en 1703, était consacré à cette question et contenait sa rétraction, mais un extrait que le Journal des savants donnait de cet article offensait PARENT, et SAURIN devint dès lors l'objet de son ressentiment, ce qui se manifestait clairement dans la seconde édition du livre de PARENT⁴.

En avril 1720, LOUVILLE proposait à l'Académie des sciences, le paradoxe susdit, sans savoir évidemment que PARENT l'avait déjà observé, il y avait une vingtaine d'années.

¹ Journal des savants du 23 mai 1701.

² Mémoires de Trévoux pour l'année 1702.

³ Recherches de mathématiques et de physique. I—II, Paris 1703—1705.

⁴ II, 806; cette édition, de 1713, est en trois volumes.

LOUVILLE ne décidait point, ce n'était qu'une difficulté qu'il proposait, et sa modestie lui faisait dire qu'il s'en rapportait à des géomètres plus habiles que lui.

SAURIN¹ démontrait de nouveau que le paradoxe n'était qu'apparent; c'est-à-dire que les théorèmes de GALILÉE et de HUYGENS s'accordent bien.

LOUVILLE² obtenait le même résultat, et c'est dans ce mémoire qu'il donne sa série remarquable, en étudiant la fonction

$$(5) \quad F(x, p, q) = (p^2 - 2qx - x^2)^{-\frac{1}{2}},$$

dont il indique le développement d'après les puissances ascendantes de x , à savoir³

$$\begin{aligned} F(x, p, q) &= \frac{1}{p} + \frac{q}{p^3}x + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{(2q)^2}{p^5} + \frac{1}{2p^3} \right) x^2 + \\ &+ \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{(2q)^3}{p^7} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \cdot \frac{2q}{p^5} \right) x^3 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{(2q)^4}{p^9} + \right. \\ &+ \left. \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4} \cdot \frac{(2q)^2}{p^7} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \cdot \frac{1}{p^5} \right) x^4 + \dots, \end{aligned}$$

formule que nous écrivons sous la forme

$$(6) \quad F(x, p, q) = \sum_{n=0}^{n=\infty} f_n(p, q) x^n.$$

Posons ensuite

$$x = ipy, \quad q = \frac{p\alpha}{i},$$

¹ Mémoires de l'Académie des sciences 1722, 70—95.

² loc. cit. 128—142.

³ Voyez p. 132 bis.

ce qui donnera

$$F(x, p, q) = \frac{1}{p} (1 - \alpha y + y^2)^{-\frac{1}{2}},$$

de sorte qu'il résulte, en vertu de (3),

$$F(x, p, q) = \frac{1}{p} \sum_{n=0}^{n=\infty} P^n(\alpha) y^n,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$F(x, p, q) = \frac{1}{p} \sum_{n=0}^{n=\infty} P^n\left(\frac{iq}{p}\right) \left(\frac{x}{ip}\right)^n;$$

c'est-à-dire que nous aurons finalement

$$(7) \quad f_n(p, q) = \frac{i^{-n}}{p^{n+1}} P^n\left(\frac{iq}{p}\right).$$

Remarquons en passant que FONTENELLE¹, secrétaire de l'Académie des sciences, a donné une démonstration assez philosophique de la coïncidence des théorèmes de GALILÉE et de HUYGENS, en ce qui concerne les arcs infiniment petits. Il remplaçait l'arc infiniment petit de la cycloïde par l'arc correspondant de son cercle osculateur.

Reste encore à donner quelques renseignements sur LOUVILLE, qui n'est pas mentionné par CANTOR et qui est certainement inconnu à la plupart des géomètres.

¹ Histoire de l'Académie des sciences 1722, 82—89.

JACQUES-EUGÈNE d'ALLONVILLE de LOUVILLE naquit au château de Louville¹ (Eure-et-Loire) le 14 juillet 1671 et mourut à Carré, près d'Orléans, le 10 décembre 1732.

Fils cadet il entra dans le service et se retira avec la charge de colonel pour se consacrer exclusivement à ses études scientifiques. Il devint un astronome distingué, et, en 1714, il fut élu membre de l'Académie des sciences.

LOUVILLE exécutait de ses propres mains, dans ses instruments astronomiques, ce qu'il y avait de plus fin et le plus difficile. Il a appliqué le premier le micromètre au quart du cercle et perfectionné d'autres instruments astronomiques. Il a donné des observations exactes du diamètre du soleil, et l'on a de lui une nouvelle méthode pour calculer la grandeur d'une éclipse de soleil dans un temps donné.

Quant aux publications mathématiques de LOUVILLE nous avons déjà mentionné la plus importante; nous pouvons ajouter qu'il était le premier de l'Académie, qui osa se déclarer contre LEIBNITZ concernant les forces vives. Il continuait ces recherches, et MAIRAN se joignit à lui avec une nouvelle théorie; c'était alors JEAN BERNOULLI qu'ils attaquaient.

Ajoutons que LOUVILLE a proposé un problème qui fut résolu par RENAU, SAURIN et NICOLE².

Ces deux derniers géomètres ont généralisé le problème proposé en celui-ci: Trouver deux nombres qui soient tels que le second soit dans le premier p de fois avec un reste, que ce reste soit dans le second encore p de fois avec un nouveau reste, que ce

¹ Il y avait au moins trois siècles que ses ancêtres possédaient la terre et la seigneurie de Louville.

² Mémoires de l'Académie des sciences 1716, 22--26, 26--29, 30--34.

second reste soit dans le premier p de fois, et ainsi de suite à l'infini.

RENAU n'étudie que le cas spécial $p = 1$, ce qui est précisément le problème proposé par LOUVILLE.

Remarquons encore que notre géomètre a donné des suppléments importants aux recherches de MAIRAN sur la roue d'ARISTOTE¹.

¹ Histoire de l'Académie des sciences 1715, 31.

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.

Mathematisk-fysiske Meddelelser. **X**, 6.

ÜBER
MONOTONE FUNKTIONEN

VON

BØRGE JESSEN



KØBENHAVN

HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI

1929

In der Theorie der reellen Funktionen einer Veränderlichen spielen die monotonen Funktionen eine wichtige Rolle. Durch stetige, stets wachsende (oder stets abnehmende) Funktionen werden die allgemeinsten eineindeutigen und stetigen Abbildungen von Intervallen auf Intervalle vermittelt; die allgemeinste Funktion von beschränkter Variation wird als Differenz einer monoton wachsenden und einer monoton abnehmenden Funktion dargestellt. Die entscheidenden Eigenschaften der Funktionen von beschränkter Variation: die Differentiierbarkeit fast überall, sowie die Zerlegung in einen totalstetigen Teil (das unbestimmte Integral der Ableitung) und einen Teil von konstanter λ -Variation, sind unmittelbare Folgerungen der entsprechenden Tatsachen für monotone Funktionen. Im folgenden sollen nun diese Ergebnisse von Neuem mit Hilfe eines einfachen Kunstgriffs hergeleitet werden. Hierbei sind die Grundlagen die »Vorlesungen über reelle Funktionen« (Leipzig und Berlin, 1918 (2. Aufl. 1927)) des Herrn CARATHÉODORY, auf die sich die Paragraphenhinweise beziehen. Während in der üblichen Theorie (§§ 500—513) die Zerlegung einer monotonen Funktion in eine totalstetige Funktion und eine Funktion von konstanter λ -Variation direkt vorgenommen wird, und dann die übrigen Eigenschaften (die Differentiierbarkeit und die Summierbarkeit der Ableitung) aus den Eigenschaften dieser Funktionen gefolgert werden, kommen

wir im folgenden allein mit Betrachtungen über totalstetige Funktionen aus (deren Theorie als bekannt vorausgesetzt wird). Ausser den schon erwähnten Sätzen ergibt sich u. a.: Die zu einer monotonen Funktion von konstanter λ -Variation inverse Funktion ist immer wieder von konstanter λ -Variation (vgl. § 512).

Es sei $f(x)$ eine im (endlichen) Intervalle

$$a \leq x \leq b$$

monoton wachsende Funktion, d. h. eine endliche (aber nicht notwendig stetige) Funktion für die stets

$$f(x_1) \leq f(x_2) \quad \text{wenn} \quad x_1 < x_2.$$

Wir wollen zunächst die Differentiierbarkeit dieser Funktion fast überall, d. h. für alle Werte von x bis auf die Werte einer Nullmenge, beweisen. Hierzu betrachten wir (Fig. 1) den Graph der Funktion, d. h. die ebene Kurve G die

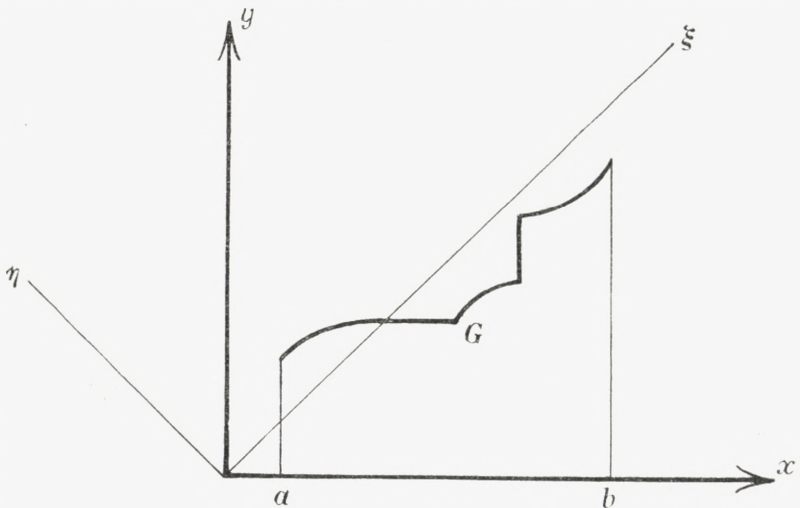


Fig. 1.

aus allen Punkten $(x, y) = (x, f(x))$, $a \leq x \leq b$, besteht und die ausserdem noch, wenn $f(x)$ unstetig ist, für jede Unstetigkeitsstelle x_0 das Geradenstück $x = x_0$, $f(x_0 - 0) \leq y \leq f(x_0 + 0)$ enthält. Die Aufgabe, $f(x)$ zu differenzieren, ist mit der Aufgabe äquivalent, Tangenten an G zu legen. Führen wir auf G als Parameter die Grösse $t = x + y$ ein, so wollen wir zeigen, dass G in fast allen Punkten (d. h. für fast alle Werte von t) eine bestimmte Tangente hat. Hiermit sind wir fertig, denn eine Nullmenge auf G projiziert sich offenbar auf die x -Achse wieder in eine Nullmenge. Dass G fast überall eine bestimmte Tangente hat, ist aber eine unmittelbare Folge der Tatsache, dass wenn wir die Gerade $x = y$ als Achse einer neuen Variablen ξ einführen, die Kurve G das Bild einer in ξ totalstetigen Funktion wird, nämlich das Bild einer Funktion, deren Differenzenquotienten zwischen den Grenzen -1 und $+1$ liegen. — Aus der angewendeten Betrachtung folgt (vgl. § 478), dass noch für monotone Funktionen alle Sätze über Limesfunktionen der Derivierten wörtlich wie für totalstetige Funktionen gelten.

Fassen wir, was auch im folgenden bequem sein wird, die Funktion $f(x)$ als mehrdeutig auf, indem wir ihr in jeder Unstetigkeitsstelle x_0 alle Werte des Intervalles $f(x - 0) \leq y \leq f(x_0 + 0)$ zuschreiben, so können wir die neue unabhängige Variable ξ in der Form schreiben

$$\xi = \frac{\sqrt{2}}{2} (x + f(x));$$

die neue abhängige Variable ist

$$\eta = \frac{\sqrt{2}}{2} (-x + f(x)).$$

Die Auffassung von G als Bild einer Funktion $\eta = \eta(\xi)$ ist also mit der Betrachtung von $-x + f(x)$ als Funktion von $x + f(x)$ gleichbedeutend. Für die folgenden Rechnungen wird es bequemer sein, statt $-x + f(x)$ nur $f(x)$ selber als Funktion von $x + f(x)$ zu betrachten. Indem wir diese Transformation einführen, leiten wir zunächst wieder die Differenzierbarkeit ab und zeigen dann die Summierbarkeit der Ableitung.

Gleichzeitig mit $f(x)$ ist auch

$$t = x + f(x)$$

eine monotone Funktion von x ; sie transformiert das Intervall $a \leq x \leq b$ in das Intervall $t_0 \leq t \leq T$, wobei $t_0 = a + f(a)$, $T = b + f(b)$ ist. Wir betrachten (Fig. 2) die Funktion

$$F(t) = f(x),$$

d. h. die Funktion $f(x)$ als Funktion der neuen unabhängigen Variablen $x + f(x)$ aufgefasst. Sie ist stetig und mono-

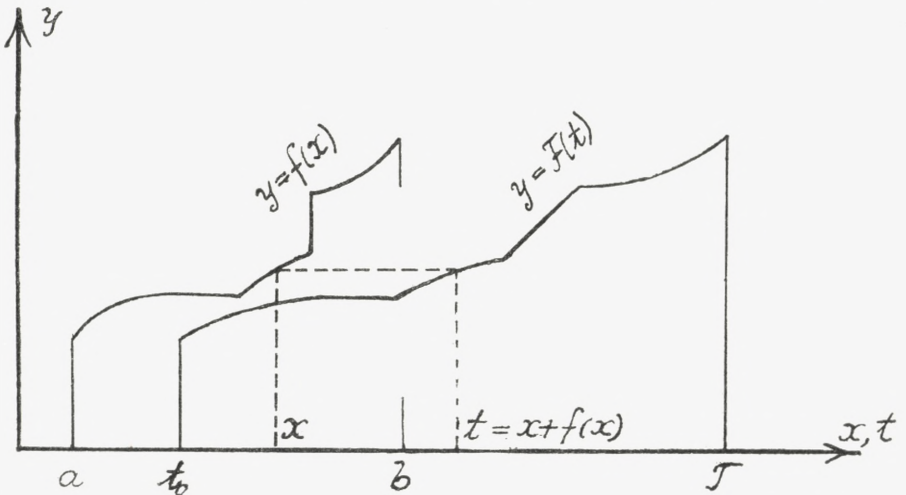


Fig. 2.

ton wachsend im Intervalle $t_0 \leqq t \leqq T$. Für beliebige Werte $t_1 = x_1 + f(x_1)$ und $t_2 = x_2 + f(x_2)$ ($\neq t_1$) ist

$$(1) \quad \frac{F(t_2) - F(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1 + f(x_2) - f(x_1)} = \frac{1}{\frac{1}{f(x_2) - f(x_1)} + 1}.$$

also

$$0 \leqq \frac{F(t_2) - F(t_1)}{t_2 - t_1} \leqq 1.$$

Die Funktion $F(t)$ hat also beschränkte Differenzenquotienten; sie ist totalstetig. Dasselbe gilt für

$$\varphi(t) = t - F(t),$$

deren Differenzenquotienten ebenfalls zwischen 0 und 1 liegen. Die letzte Funktion transformiert das Intervall $t_0 \leqq t \leqq T$ in das Intervall $a \leqq x \leqq b$ und man hat

$$f(\varphi(t)) = F(t).$$

Bei der Abbildung $x = \varphi(t)$ geht ein beliebiges Teilintervall $x_1 + f(x_1) \leqq t \leqq x_2 + f(x_2)$ von $t_0 \leqq t \leqq T$ in ein nicht grösseres Intervall, nämlich in das Intervall $x_1 \leqq x \leqq x_2$ über; hieraus folgt, dass auch jede beliebige messbare Teilmenge von $t_0 \leqq t \leqq T$ bei der Abbildung in eine messbare Teilmenge von $a \leqq x \leqq b$ übergehen muss und zwar in eine Menge mit höchstens demselben Inhalt; speziell gehen also Nullmengen in Nullmengen über.¹

¹ Analog kann man, wie LEBESGUE in der neuen Ausgabe der »Leçons sur l'intégration« (Paris, 1928), eine beliebige Funktion $f(x)$ von beschränkter Variation als Funktion der neuen Variablen $x + V(x)$ betrachten, wobei $V(x)$ die totale Variation von $f(x)$ im Intervalle $a \leqq \xi \leqq x$ bedeutet, und hierdurch u. a. zu einer sehr übersichtlichen Theorie der

Wenden wir auf eine beliebige monoton wachsende totalstetige Funktion $F(t)$, deren Differenzenquotienten zwischen 0 und 1 liegen, die Transformation

$$(2) \quad x = t - F(t), \quad f(x) = F(t)$$

an, so bekommen wir eine monotone Funktion $f(x)$. Der gewonnene Zusammenhang zwischen monotonen Funktionen $f(x)$ und totalstetigen Funktionen $F(t)$ ist also ein gegenseitiger. Statt (2) können wir auch schreiben

$$(3) \quad x = a + \int_{t_0}^t (1 - \Phi(t)) dt, \quad f(x) = f(a) + \int_{t_0}^t \Phi(t) dt,$$

wobei $\Phi(t)$ eine summierbare Funktion zwischen 0 und 1 bedeutet. (3) gibt eine Parameterdarstellung der allgemeinsten monoton wachsenden Funktion.

Aus (1) geht unmittelbar hervor:

$$(4) \quad DF(t) = \frac{1}{\frac{1}{Df(x)} + 1} \quad \text{oder} \quad Df(x) = \frac{DF(t)}{1 - DF(t)}$$

für zusammengehörige Derivierte von $f(x)$ und $F(t)$. Nun ist $DF(t)$ eindeutig bestimmt (gleich $\Phi(t)$) für fast alle Werte von t ; es ist demnach $Df(x)$ eindeutig bestimmt für fast alle Werte von x :

STIELTJÉSintegrale gelangen. Der Ausgangspunkt des Verfassers war übrigens von dem LEBESGUE'schen ganz verschieden. Bedeutet $f(x)$ die Totalkrümmung eines konvexen Bogens, dessen Länge von einem festen Punkt gerechnet mit x bezeichnet wird, so bedeutet $x + f(x)$ die Länge des äusseren Parallelbogens im Abstand 1. Die Krümmung des Bogens ist die Ableitung der Funktion. Durch Übergang zum äusseren Parallelbogen erreicht man aber eben, mit einem Bogen beschränkter Krümmung rechnen zu können.

Satz 1. Jede monotone Funktion ist differenzierbar in einem massgleichen Kern ihres Definitionsbereiches.

Mit $Df(x)$ und $DF(t)$ bezeichnen wir zwei zusammengehörige Derivierte von $f(x)$ und $F(t)$ d. h. zwei eindeutige, durch die Relationen (4) verbundene, Funktionen von x bzw. t die in jedem Punkt eine der Derivierten von $f(x)$ bzw. $F(t)$ darstellen. Es soll gezeigt werden, dass $Df(x)$ über $a \leq x \leq b$ summierbar ist. Hierzu sei zuerst bemerkt, dass $Df(x)$ infolge seiner Darstellung (4) jedenfalls eine messbare Funktion sein muss; denn für jede beliebige Zahl A geht die Menge $M\{Df(x) < A\}$ aus der Menge $M\left\{DF(t) < \frac{1}{\frac{1}{A} + 1}\right\}$ durch die Transformation $x = t - F(t)$

hervor. Für jede natürliche Zahl n ist also die abgeschnittene Funktion

$$[Df(x)]_n = \begin{cases} Df(x) & \text{wenn } Df(x) < n \\ n & \text{wenn } Df(x) \geq n \end{cases}$$

notwendig summierbar. Substituieren wir aber (§ 497) in das Integral dieser Funktion für x die monotone totalstetige Funktion $\varphi(t) = t - F(t)$, so kommt

$$\int_a^b [Df(x)]_n dx = \int_{t_0}^T \left[\frac{DF(t)}{1 - DF(t)} \right]_n (1 - DF(t)) dt \leq \int_{t_0}^T DF(x) dt$$

und aus der Beschränktheit von $\int_a^b [Df(x)]_n dx$ folgt die Summierbarkeit von $Df(x)$. Hieraus folgt speziell

Satz 2. Eine monotone Funktion hat höchstens in einer Nullmenge eine unendliche Derivierte.

Es bedeute $\dot{f}(x)$ die Ableitung von $f(x)$, d. h. die eindeutige Funktion von x , die in allen Punkten, wo $f(x)$ differenzierbar ist und eine endliche Derivierte $Df(x)$ besitzt, gleich dieser Derivierten ist, aber sonst gleich Null ist. Diese Funktion ist mit allen Derivierten von $f(x)$ äquivalent. Mit $\dot{F}(t)$ bezeichnen wir die Ableitung von $F(t)$. Wir setzen

$$\dot{F}(t) = \dot{F}_0(t) + \dot{F}_1(t)$$

wobei

$$\dot{F}_0(t) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \dot{F}(t) = 1 \\ \dot{F}(t) & \text{wenn } \dot{F}(t) < 1 \end{cases}; \quad \dot{F}_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \dot{F}(t) = 1 \\ 0 & \text{wenn } \dot{F}(t) < 1. \end{cases}$$

Dann ist

$$\dot{f}(x) = \frac{\dot{F}_0(t)}{1 - \dot{F}_0(t)}.$$

Für beliebige Werte von x im Intervalle $a \leq x \leq b$ ist also (§ 499, Satz 4) mit $t = x + f(x)$

$$\begin{aligned} \int_a^x \dot{f}(x) dx &= \int_{t_0}^t \frac{\dot{F}_0(t)}{1 - \dot{F}_0(t)} (1 - \dot{F}(t)) dt \\ &= \int_{t_0}^t \dot{F}_0(t) dt = \int_{t_0}^t \dot{F}(t) dt - \int_{t_0}^t \dot{F}_1(t) dt \\ &= f(x) - f(a) - \int_{t_0}^t \dot{F}_1(t) dt \end{aligned}$$

und demnach

$$(5) \quad f(x) = f(a) + \int_a^x \dot{f}(x) dx + \int_{t_0}^t \dot{F}_1(t) dt.$$

Diese Formel gibt eine Zerlegung von $f(x)$ in zwei monotone Funktionen

$$f(x) = \tau(x) + \nu(x),$$

wo

$$\tau(x) = f(a) + \int_a^x \dot{f}(x) dx$$

totalstetig ist und fast überall dieselbe Ableitung wie $f(x)$ hat, während

$$\nu(x) = \int_{t_0}^t \dot{F}_1(t) dt$$

fast überall die Ableitung Null hat. Diese letzte Funktion wollen wir nun näher untersuchen.

Die Funktion $\dot{F}_1(t)$ nimmt nur die Werte 0 und 1 an. Die Menge $M\{\dot{F}_1(t) = 1\}$ hat den Inhalt $\nu(b) - \nu(a)$ ($= \nu(b)$) und wird durch die Funktion $x = \varphi(t)$ in die Menge der Punkte von $a \leq x \leq b$ transformiert, für die $f(x)$ mit unendlicher Derivierten differentiierbar ist, also in eine Menge mit dem Inhalt Null. Diese Menge bezeichnen wir mit A . Es sei $U = \delta_1 + \delta_2 + \dots$ eine beliebige Punktmenge, die aus offenen Intervallen

$$\delta_k: a_k < x < b_k$$

ohne gemeinsame Punkte besteht und die A überdeckt. Indem wir (wenn es nötig ist) $f(x) = f(a)$ für $x < a$ und $f(x) = f(b)$ für $x > b$ setzen, entspricht der Menge U bei der Abbildung $t = x + f(x)$ eine Menge von Intervallen

$$a_k + f(a_k) < t < b_k + f(b_k),$$

die die Menge $M\{\dot{F}_1(t) = 1\}$ überdeckt. Es wird also

$$(6) \quad \nu(b) - \nu(a) = \int_{t_0}^T \dot{F}_1(t) dt = \sum_k (\nu(b_k) - \nu(a_k)).$$

Da wir den Inhalt von U beliebig klein wählen können, wird also die Nullvariation von $\nu(x)$ im Intervalle $a \leq x \leq b$ gleich der totalen Variation $\nu(b) - \nu(a)$: Die Funktion $\nu(x)$ ist von konstanter λ -Variation (§ 501).

Satz 3. Jede im Intervalle $a \leq x \leq b$ definierte monoton wachsende Funktion $f(x)$ kann als Summe von zwei monoton wachsenden Funktionen

$$(7) \quad f(x) = r(x) + \nu(x)$$

angesehen werden, von denen die erste ein unbestimmtes Integral der Ableitung von $f(x)$ ist und die zweite von konstanter λ -Variation ist; für die letzte gilt noch die Gleichung (6).

Dass diese Zerlegung in eine totalstetige Funktion und eine Funktion von konstanter λ -Variation nur in einer Weise möglich ist, wenn wir $\nu(a) = 0$ verlangen, folgt daraus, dass bei jeder Zerlegung (7) $\nu(x) - \nu(a)$ die Nullvariation von $f(x)$ im Intervalle $a \leq \xi \leq x$ bedeuten muss.

Aus der Darstellung

$$f(x) = f(a) + \int_{t_0}^x \dot{F}_0(t) dt + \int_{t_0}^x \dot{F}_1(t) dt$$

folgt, dass $f(x)$ dann und nur dann totalstetig bzw. von konstanter λ -Variation ist, wenn $\dot{F}_1(t)$ bzw. $\dot{F}_0(t) \infty 0$ ist. Unsere Parameterdarstellung (3) einer beliebigen monoton wachsenden Funktion stellt also dann und nur dann eine totalstetige Funktion bzw. eine Funktion von konstanter λ -Variation dar, wenn fast überall in $t_0 \leq t \leq T$

$$0 \leq \Phi(t) < 1$$

bzw.

$$(8) \quad \Phi(t) = 0 \text{ oder } 1$$

ist. Hieraus folgt sofort

Satz 4. Die inverse Funktion einer monotonen Funktion von konstanter λ -Variation ist immer wieder von konstanter λ -Variation; die inverse Funktion einer totalstetigen Funktion ist dann und nur dann wieder totalstetig, wenn die Ableitung der gegebenen Funktion fast überall von Null verschieden ist.

Es kann dies auch zu einer leichten Verschärfung der Abbildungssätze in § 512 benutzt werden.

Wir bemerken noch, dass man in der Definition der allgemeinsten monoton wachsenden Funktion von konstanter λ -Variation die Verwendung des Integralbegriffs (oder des gleichwertigen Begriffs des zweidimensionalen Inhalts) vermeiden kann. Wie aus (3) und (8) hervorgeht, hat man, wenn A und B zwei komplementäre messbare Teilmengen von $t_0 \leq t \leq T$ bedeuten und wenn das Intervall von t_0 bis t mit I_t bezeichnet wird, in

$$x = a + mAI_t, \quad f(x) = f(a) + mBI_t$$

eine Parameterdarstellung dieser Funktion. Hieraus folgt unmittelbar die Existenz sogar von stetigen und stets wachsenden Funktionen von konstanter λ -Variation.

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.

Mathematisk-fysiske Meddelelser. **X**, 7.

FORTGESETZTE UNTERSUCHUNGEN
ÜBER ASYMPTOTISCHE BAHNEN
IM PROBLÈME RESTREINT.

ÜBER DAS SYSTEM PERIODISCHER, IN BEZUG AUF
DIE ξ -ACHSE UNSYMMETRISCHER, ASYMPTOTISCHER
BAHNEN

VON

ELIS STRÖMGREN

MIT 2 TAFELN



KØBENHAVN

HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL

BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI A/S

1930

In der Mitteilung IX, 7 der Dänischen Akademie der Wissenschaften (auch Publ. des Kopenhagener Observatoriums No. 64) habe ich einen vorläufigen Bericht über meine Untersuchungen über periodische Bahnen um einen der Librationspunkte L_4 und L_5 im problème restreint bei beliebigem Verhältnis der zwei endlichen Massen veröffentlicht. Die vorliegende Abhandlung soll die Resultate der Fortsetzung dieser Arbeit geben: die Festlegung der asymptotischen Grenzbahnen zu sämtlichen existierenden Klassen einfach-periodischer Bahnen um einen der zwei Punkte L_4 und L_5 , Bahnen, die also in bezug auf die ξ -Achse unsymmetrisch sind. Es hat sich u. A. gezeigt, dass alle die in der zitierten Abhandlung vermuteten Bahnen wirklich existieren, und ausserdem sind einige neue ähnliche Bahnen gefunden worden. Als Nebenprodukt werden Resultate mitgeteilt über eine Anzahl periodischer Bahnen desselben Typus, die aber nicht einfach-periodisch sind, und die deshalb an sich ausserhalb des Rahmens des Kopenhagener Problems fallen.

Wir stellen zunächst die Hauptzüge der Theorie der zu L_4 (bezw. L_5) asymptotischen Lösungen zusammen. Vgl. A. N. 4015 und Publikationer og mindre Meddelelser fra Københavns Observatorium 47 (Seeliger-Festschrift) und 61

(Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskabs Mathematisk-fysiske Meddelelser IX, 3).

Im allgemeinen Fall — mit zwei endlichen Massen, die nicht gleich gross sind — lauten die Bewegungsgleichungen der dritten unendlich kleinen Masse, wenn wir nur die erste Potenz der Grössen x und y mitnehmen und uns also auf infinitesimale Lösungen beschränken:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} - 2 \frac{dy}{dt} &= \frac{3}{4} x + \frac{3\sqrt{3}}{4} (1 - 2\mu) y \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} &= \frac{3\sqrt{3}}{4} (1 - 2\mu) x + \frac{9}{4} y, \end{aligned} \quad (1)$$

wo μ die kleinere der zwei endlichen Massen bezeichnet, $1 - \mu$ die grössere, und wo x , y die Koordinaten des dritten Körpers bedeuten, bezogen auf den Librationspunkt L_4 als Anfangspunkt und auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem, das sich mit derselben Geschwindigkeit und in derselben Richtung um den gemeinsamen Schwerpunkt dreht wie die Massen μ und $1 - \mu$, und dessen y -Achse senkrecht gegen die Verbindungslinie zwischen diesen Massen steht.

Die Lösung dieses Gleichungssystems ergibt sich in der folgenden Form:

$$\begin{aligned} x &= K_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 e^{\lambda_2 t} + K_3 e^{\lambda_3 t} + K_4 e^{\lambda_4 t} \\ y &= L_1 e^{\lambda_1 t} + L_2 e^{\lambda_2 t} + L_3 e^{\lambda_3 t} + L_4 e^{\lambda_4 t}, \end{aligned} \quad (2)$$

wo K_1 , K_2 , K_3 und K_4 unabhängige Integrationskonstanten sind und die vier L -Werte aus den K -Werten mit Hilfe der einen der zwei Gleichungen:

$$\begin{aligned} \left(\lambda_p^2 - \frac{3}{4}\right) K_p - \left[2\lambda_p + \frac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\mu)\right] L_p &= 0 \\ \left[2\lambda_p - \frac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\mu)\right] K_p + \left(\lambda_p^2 - \frac{9}{4}\right) L_p &= 0 \end{aligned} \quad (p = 1, 2, 3, 4) \quad (3)$$

erhalten werden können, nachdem die vier λ -Werte aus der folgenden Gleichung berechnet sind:

$$\lambda^4 + \lambda^2 + \frac{27}{4}\mu(1-\mu) = 0. \quad (4)$$

Für die λ -Werte ergibt sich:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\lambda_2 = \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{1 - 27\mu(1-\mu)}}{2}} \\ \lambda_3 &= -\lambda_4 = \sqrt{\frac{-1 - \sqrt{1 - 27\mu(1-\mu)}}{2}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Wenn $1 - 27\mu(1-\mu) \geq 0$, d. h. wenn $\mu \leq 0.0385\dots$, gibt es rein periodische Lösungen, also infinitesimale periodische Bahnen.

Wenn $1 - 27\mu(1-\mu) < 0$, d. h. wenn $\mu > 0.0385\dots$ oder, in der in den Kopenhagener Untersuchungen üblichen Bezeichnungsweise (m_2 und m_1 statt μ und $1-\mu$), wenn:

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{\mu}{1-\mu} > \text{ca. } \frac{1}{25},$$

gibt es dagegen keine rein periodischen infinitesimalen Lösungen.

Wir setzen:

$$\sqrt{1 - 27\mu(1-\mu)} = \alpha i, \quad \text{wo } i = \sqrt{-1},$$

und erhalten:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= a + bi & \lambda_3 &= -a + bi \\ \lambda_2 &= -a - bi & \lambda_4 &= a - bi \end{aligned} \quad (6)$$

wo:

$$\begin{aligned} a &= \frac{\alpha}{2\sqrt{1 + \sqrt{1 + \alpha^2}}} \\ b &= \frac{\sqrt{1 + \sqrt{1 + \alpha^2}}}{2}. \end{aligned}$$

Wir erhalten dann aus (2):

$$\begin{aligned} x &= K_1 e^{at} e^{bit} + K_2 e^{-at} e^{-bit} + K_3 e^{-at} e^{bit} + K_4 e^{at} e^{-bit} \\ y &= L_1 e^{at} e^{bit} + L_2 e^{-at} e^{-bit} + L_3 e^{-at} e^{bit} + L_4 e^{at} e^{-bit}. \end{aligned} \quad (7)$$

Die L -Werte ergeben sich aus (3) in der folgenden Form:

$$\begin{aligned} L_1 &= (P + Qi) K_1 & L_3 &= (M - Ni) K_3 \\ L_2 &= (M + Ni) K_2 & L_4 &= (P - Qi) K_4 \end{aligned} \quad (8)$$

(P, Q, M, N reelle Grössen).

Wenn wir jetzt den speziellen Fall $K_1 = K_4 = 0$ und daraus $L_1 = L_4 = 0$ wählen, erhalten wir eine asymptotische Lösung, wo der dritte Körper mit wachsender Zeit sich dem Librationspunkt L_4 unbeschränkt nähert.

Wir bezeichnen mit x_0 und y_0 die Koordinatenwerte für einen gegebenen Zeitpunkt $t = 0$ und erhalten:

$$\begin{aligned} x_0 &= K_2 + K_3 \\ y_0 &= (M + Ni) K_2 + (M - Ni) K_3. \end{aligned} \quad (9)$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich K_2 und K_3 als Funktionen von x_0 und y_0 bestimmen:

$$\begin{aligned}
 K_2 &= \frac{x_0}{2} + i \left(\frac{M}{2N} x_0 - \frac{1}{2N} y_0 \right) \\
 K_3 &= \frac{x_0}{2} - i \left(\frac{M}{2N} x_0 - \frac{1}{2N} y_0 \right),
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

wofür wir schreiben können:

$$\begin{aligned}
 K_2 &= A + Bi \\
 K_3 &= A - Bi.
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

Aus (8) ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 L_2 &= (MA - NB) + i(NA + MB) \\
 L_3 &= (MA - NB) - i(NA + MB)
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

oder:

$$\begin{aligned}
 L_2 &= C + Di \\
 L_3 &= C - Di.
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

Aus (7) ergibt sich dann:

$$\begin{aligned}
 x &= A e^{-at} e^{-bit} + B i e^{-at} e^{-bit} + A e^{-at} e^{bit} - B i e^{-at} e^{bit} \\
 y &= C e^{-at} e^{-bit} + D i e^{-at} e^{-bit} + C e^{-at} e^{bit} - D i e^{-at} e^{bit}
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

also:

$$\begin{aligned}
 x &= 2A e^{-at} \cos bt + 2B e^{-at} \sin bt \\
 y &= 2C e^{-at} \cos bt + 2D e^{-at} \sin bt,
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

d. h. eine spiralförmige Bewegung in L_4 hinein. (Die dritte Masse erreicht den Punkt L_4 für $t = +\infty$). Die Gleichungen für den entsprechenden Zweig der Bewegung aus L_4 hinaus (das Spiegelbild des jetzt besprochenen Zweiges) hätten wir erhalten, wenn wir in den Gleichungen die Glieder $e^{at} \cos bt$ und $e^{at} \sin bt$ behalten und die Glieder

$e^{-at} \cos bt$ und $e^{-at} \sin bt$ gestrichen hätten (die dritte Masse hat dann den Punkt L_4 für $t = -\infty$ verlassen). Die Tafel II stellt diesen letzterwähnten Zweig der Bewegung dar.

Von jetzt an beschränken wir uns auf das Kopenhagener Problem: $m_1 = m_2$, d. h. $\mu = \frac{1}{2}$.

Die Differentialgleichungen der Bewegung lauten dann:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - 2 \frac{dy}{dt} &= \frac{3}{4}x \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} &= \frac{9}{4}y. \end{aligned} \tag{1'}$$

Für die numerischen Werte der Konstanten des Problems ergibt sich:

$$\begin{aligned} a &= \frac{\sqrt{23}}{2} \\ a &= \frac{\sqrt{23}}{2\sqrt{2}\sqrt{2+3\sqrt{3}}} = 0.63208 & \log a &= 9.80077 \\ b &= \frac{\sqrt{2+3\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}} = 0.94843_{.3} & \log b &= 9.97700_{.5} \\ M &= -a \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}} = -0.13357 & \log M &= 9.12572_n \\ N &= -b \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}} = -0.74800 & \log N &= 9.87390_n \\ M^2 + N^2 &= \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{aligned} \tag{16}$$

Für die Gleichungen der Bewegung in den Librationspunkt L_4 hinein erhalten wir:

$$\begin{aligned} x &= x_0 \cdot e^{-at} \cos bt + \left(\frac{M}{N} x_0 - \frac{1}{N} y_0 \right) \cdot e^{-at} \sin bt \\ y &= y_0 \cdot e^{-at} \cos bt + \left(\frac{M^2 + N^2}{N} x_0 - \frac{M}{N} y_0 \right) \cdot e^{-at} \sin bt, \end{aligned} \quad (17)$$

oder, wenn wir — wie es in unseren numerischen Untersuchungen immer der Fall ist — die Bewegung in einem Punkte auf der y -Achse anfangen (x_0 also = 0):

$$\begin{aligned} x &= -\frac{1}{N} y_0 \cdot e^{-at} \sin bt \\ y &= y_0 \cdot e^{-at} \cos bt - \frac{M}{N} y_0 \cdot e^{-at} \sin bt. \end{aligned} \quad (18)$$

Die Haupteigenschaften der spiralförmigen asymptotischen Bewegung haben wir in der Publ. (47) angegeben:

1. Weil a und b beide von Null verschiedene Werte besitzen, gibt es nur gemischt exponentiell-trigonometrische Glieder, keine rein trigonometrischen und keine rein exponentiellen.

2. Es gibt unendlich viele Spiralbewegungen in den Librationspunkt hinein und von ihm weg.

3. Für die Umlaufszeit (T) in den Spiralen erhalten wir den für alle Spiralen gültigen Wert:

$$T = \frac{2\pi}{b} = 6.62483.$$

4. Der Faktor e^{at} erhält für einen ganzen Umlauf in der Spirale den Wert:

$$e^{aT} = 65.850,$$

für die Hälfte der Umlaufszeit den Wert:

$$e^{a\frac{T}{2}} = 8.1148.$$

Hier haben wir das Verhältnis der Stücke der y -Achse von L_4 aus gerechnet, die von den aufeinander folgenden Spiralswindungen abgeschnitten werden.

5. Der (konstante) Winkel (θ), den die Bahntangente in einem beliebigen Punkte auf der η -Achse mit dieser Achse macht, ist durch die folgende Gleichung gegeben:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{\alpha},$$

woraus sich der für alle Spiralen gültige Wert:

$$\theta = 57^\circ 42'.25$$

ergibt.

Nach dieser Skizze der Hauptpunkte der Theorie der spiralförmigen asymptotischen Bahnen in L_4 (L_5) hinein und von L_4 (L_5) weg gehen wir zu den neuen Rechnungsergebnissen über.

Die numerischen Werte für die gerechneten Bahnen werden nachher zusammengestellt (Seite 16 und f.). Auf der Tafel II am Schluss dieser Abhandlung ist das gesamte Material unserer Untersuchungen über die asymptotischen Bahnen — die früheren Arbeiten eingeschlossen — gegeben. Nur in solchen Fällen, wo eine Bahn einer anderen allzu nahe kommen würde, oder wo die Einzeichnung eines Teiles

einer Bahn der Übersichtlichkeit Eintrag tun würde, habe ich auf absolute Vollständigkeit verzichtet. Die Figuren 1—6 und 9 der Tafel I geben alle gefundenen einfach-periodischen asymptotischen Bahnen wieder, die nach einem halben Umlauf die η -Achse senkrecht schneiden. Über die Bahnen in Fig. 7—8 später Näheres. Aus Rücksicht auf die an sich sehr grosse Rechenarbeit habe ich mich im allgemeinen damit begnügt, der exakten periodischen Bahn *nahe* zu kommen. In einigen Fällen sind auf den Figuren der Tafel I die Bahnen vom Zeichner rein zeichnerisch interpoliert worden.

Die numerische Rechenarbeit ist in der ganz überwiegenden Anzahl von Fällen vom Herrn Oberlehrer N. BENNEDSEN (Helsingör) ausgeführt worden. Ohne seine ausserordentlich energische und ebenso zuverlässige Mitarbeit wäre es nicht möglich gewesen, diese Arbeit in so kurzer Zeit zu vollführen.

In einigen Fällen haben die Herren Dr. E. NOTEBOOM (Rathenow) und Dr. F. BURMEISTER (München) an der Arbeit teilgenommen.

Die Zeichnungen sind alle vom Herrn Ingenieur OTTO CHRISTENSEN ausgeführt worden.

Das Hauptinteresse der Untersuchung knüpft sich an die auf die Figuren 1—9 eingezeichneten einfach-periodischen Bahnen. Die in der Publ. 47 gegebene, in der Publ. 61 vervollständigte, Übersicht bezog sich auf solche zu L_4 asymptotische periodische Bahnen, die nach $\frac{1}{4}$ Umlauf die ξ -Achse senkrecht schneiden und deshalb nach $\frac{1}{2}$ Umlauf in den Librationspunkt L_5 asymptotisch hineinwandern. Wir wissen (Publ. 47, 60, 61), dass es unter den

— unendlich vielen — zu L_4 asymptotischen Bahnen fünf solche Bahnen gibt, und wir kennen den Zusammenhang dieser 5 Bahnen mit bekannten Klassen periodischer Bahnen.

Mit den in der vorliegenden Abhandlung gegebenen einfach-periodischen asymptotischen Bahnen (9 Stück) liegen die Verhältnisse anders. Die Bahnen 1—6 und 9 der Tafel I schneiden nach $\frac{1}{2}$ Umlauf die η -Achse senkrecht; sie wandern nach noch $\frac{1}{2}$ Umlauf wieder in L_4 hinein, ohne L_5 berührt zu haben. Es kommen noch die Bahnen 7—8 der Tafel I hinzu, die eine Gruppe für sich bilden. Spiegelbilder dieser Bahnen in bezug auf die ξ -Achse erhalten wir, wenn wir überall L_4 gegen L_5 vertauschen.

Mit den erwähnten drei Gruppen von Bahnen sind alle Möglichkeiten in bezug auf einfach-periodische zu L_4 (L_5) asymptotische Bahnen erschöpft.

Über die 9 in den Figuren der Tafel I gegebenen einfach-periodischen asymptotischen Bahnen ist folgendes zu bemerken:

1. (Fig. 1); η_0 etwas grösser als 1.72025 (Bahn No. 6 in der Zusammenstellung der gerechneten Bahnen). Vgl. Paragraph V in Publ. 64 (Seite 8).
2. (Fig. 2); η_0 sehr nahe = 1.7008 (Bahn 1 in der Zusammenstellung). Vgl. Paragraph I in Publ. 64 (Seite 5—6).
3. (Fig. 3); η_0 zwischen 1.7370 und 1.7375 (Bahn 12 in Publ. 61 und Bahn 7 der Zusammenstellung in der vorliegenden Abhandlung). Vgl. Paragraph II in Publ. 64 (Seite 6).
4. (Fig. 4); η_0 sehr nahe = 1.7392 (Bahn 8 der Zusammenstellung). Vgl. Paragraph VI in Publ. 64 (Seite 8).

5. (Fig. 5); η_0 sehr nahe = 1.74427 (Bahn 13 der Zusammenstellung).

6. (Fig. 6); η_0 sehr nahe = 1.74484 (Bahn 16 der Zusammenstellung). Vgl. Paragraph IV in Publ. 64 (Seite 7—8).

7—8. (Fig. 7—8); η_0 zwischen 1.745100 und 1.745115 (Bahnen 18 und 19 der Zusammenstellung). Besonders interessante Bahn: sie hat ihr Spiegelbild in bezug auf die η -Achse für einen η_0 -Wert zwischen 1.7200 und 1.7202 (Bahnen 4 und 5 der Zusammenstellung).

9. (Fig. 9); η_0 zwischen 1.750 und 1.752 (Bahn 25 in Publ. 61 und Bahn 24 der Zusammenstellung in der vorliegenden Abhandlung). Vgl. Paragraph III in Publ. 64 (Seite 6—7).

Ausser diesen einfach-periodischen, in bezug auf die ξ -Achse unsymmetrischen, asymptotischen Bahnen, deren Berechnung ja das Hauptergebnis unserer Arbeit bildet, folgt aus unseren Rechnungen die Existenz einer grossen Anzahl nicht einfach-periodischer asymptotischer Bahnen, die ja ausserhalb des Kopenhagener Programmes fallen, von denen wir doch im folgenden einige der allereinfachsten zusammenstellen (Vgl. Tafel II):

I. Eine Bahn $1.7000 < \eta_0 < 1.7015$ schneidet zum zweiten Mal die ξ -Achse (Bewegung aufwärts), jetzt senkrecht.

II. Eine Bahn $1.719 < \eta_0 < 1.720$, wie bei I.

III. Eine Bahn $1.742 < \eta_0 < 1.743$ schneidet zum vierten Mal die ξ -Achse (Bewegung aufwärts), jetzt senkrecht.

IV. Eine Bahn mit η_0 etwas grösser als 1.7452, wie bei I.

V. Eine Bahn mit η_0 etwas grösser als 1.752, wie bei I.

.....

Ein näheres Studium der Tafel II gibt die Andeutung von der Existenz einer unendlichen Zahl anderer kompliziert-periodischer Bahnen. Alle diese Bahnen sind selbstverständlich auch als Grenzbahnen zu Klassen periodischer Bahnen aufzufassen.

Es sei noch bemerkt, das auf der Tafel einige relativ einfache Bahnen abgelesen werden können, die asymptotisch zu L_4 (L_5) sind und nachher zu Einsturzbahnen in m_2 oder m_1 werden. Diese Bahnen sind aber nicht periodisch und bieten deshalb weniger Interesse.

Als interessantes Detail möchte ich noch auf die Art und Weise aufmerksam machen, in der eine Schleife (während der Entwicklung eines Systems aus L_4 asymptotisch herausströmenden Bahnen bis zu einer Bahn, die auch asymptotisch in L_5 oder L_4 hineinwandert) in unendlich vielen Windungen um den betreffenden Librationspunkt herumtanzt, während sie gleichzeitig immer kleiner wird. Ein typisches Beispiel liefert z. B. die Entwicklung $\eta_0 = 1.746 \rightarrow 1.7473 \rightarrow 1.74748 \rightarrow 1.747552$.

Über die Bedeutung der gefundenen einfach-periodischen, zu L_4 (bezw. L_5) asymptotischen, in bezug auf die ξ -Achse unsymmetrischen Bahnen ist in der Publ. 64 gesprochen worden: sie müssen alle naturgemäss die Rolle von Grenzbahnen zu Klassen periodischer Bahnen spielen. In methodischer Hinsicht haben wir hier ein neues Problem. Die in Publ. 47 mitgeteilten fünf einfach-periodischen asymptotischen Bahnen konnten alle als Grenzbahnen zu schon vorher bekannten Bahnklassen klassifiziert werden. Bezeichnend für die Kopenhagener Untersuchungen im Gebiete des problème restreint war es überhaupt immer,

dass wir zunächst Vertreter einer Klasse periodischer Bahnen gefunden hatten und nachher durch mühevolleres Suchen die beiden Grenzbahnen der Klasse ermittelten. Das jetzt vorliegende Problem ist das gerade umgekehrte: wir haben eine Anzahl periodischer asymptotischer Bahnen gefunden, von denen wir sicher behaupten können, dass sie Grenzbahnen zu Klassen periodischer Bahnen sind. Die Aufgabe bleibt, zu untersuchen, wie diese Klassen verlaufen, und darunter: wie die gefundenen Grenzbahnen mit einander zu kombinieren sind. Dies dürfte wohl als eine verhältnismässig einfache Aufgabe bezeichnet werden. Über die Resultate können zur Zeit nur Vermutungen ausgesprochen werden. Ich denke mir vorläufig das folgende Arbeitsprogramm: zu untersuchen, ob Fig. 1 und Fig. 6 mit einander zu kombinieren sind, ferner Fig. 2 mit Fig. 5, Fig. 3 mit ihrem zu L_5 asymptotischen Spiegelbild, Fig. 4 ebenfalls mit dem zu L_5 asymptotischen Spiegelbild, Fig. 7 mit ihrem Spiegelbild in bezug auf die η -Achse (Fig. 8) und Fig. 9 mit ihrem zu L_5 asymptotischen Spiegelbild.

Eine weitere Aufgabe, die zu lösen ist, betrifft den Zusammenhang zwischen den in der vorliegenden Abhandlung gefundenen Resultaten und den altherbekannten zwei Klassen infinitesimaler, rein periodischer Bahnen um L_4 (L_5), welche existieren, wenn $m_2 < \frac{1}{25} m_1$ ist. Diese Frage schliesst die andere Frage in sich ein: weshalb es überhaupt keine infinitesimalen rein periodischen Bahnen um L_4 (L_5) gibt, wenn $m_2 > \frac{1}{25} m_1$. Die Beantwortung dieser letzten Frage dürfte an der Hand der Figuren auf Tafel I keine ernsthaften Schwierigkeiten bereiten.

Dem Carlsbergfond bin ich für pekuniäre Unterstützung zu grossem Danke verpflichtet.

ELIS STRÖMGREN.

Bahn 1.
 $\eta_0 = + 1.7008$

t	ξ	η	t	ξ	η
0.0	0.00000	+ 1.70080	2.2	-0.14928	+ 1.77397
0.2	-0.00895	1.69601	2.4	0.14882	1.80470
0.4	0.01997	1.69195	2.6	0.13945	1.83989
0.6	0.03300	1.68906	2.8	0.11924	1.87868
0.8	0.04788	1.67787	3.0	0.08641	1.91968
1.0	0.06427	1.68893	3.2	-0.03950	1.96097
1.2	0.08165	1.69284	3.4	+ 0.02250	2.00009
1.4	0.09930	1.70020	3.6	0.09990	2.03406
1.6	0.11623	1.71157	3.8	0.19217	2.05946
1.8	0.13122	1.72745	4.0	0.29778	2.07263
2.0	-0.14280	+ 1.74819	4.2	+ 0.41403	+ 2.06979

ψ	E	F	ξ	η
0.000	+ 1.44190	- 1.48315	+ 0.29781	+ 2.07262
0.025	1.40892	1.48755	0.37490	2.07271
0.050	1.37388	1.48968	0.45597	2.06442
0.075	1.33718	1.48915	0.53924	2.04672
0.100	1.29936	1.48559	0.62254	2.01888
0.125	1.26100	1.47865	0.70346	1.98055
0.150	1.22279	1.46802	0.77943	1.93192
0.175	1.18543	1.45342	0.84794	1.87369
0.200	1.14964	1.43467	0.90686	1.80700
0.225	1.11608	1.41164	0.95450	1.73342
0.250	+ 1.08535	- 1.38426	+ 0.98975	+ 1.65454

ψ	E	F	ξ	η
0.275	+ 1.05795	— 1.35256	+ 1.01221	+ 1.57223
0.300	1.03425	1.31663	1.02207	1.48810
0.325	1.01449	1.27664	1.02008	1.40358
0.350	0.99875	1.23280	1.00753	1.31979
0.375	0.98701	1.18538	0.98596	1.23753
0.400	0.97910	1.13466	0.95703	1.15726
0.425	0.97477	1.08098	0.92256	1.07928
0.450	0.97371	1.02467	0.88413	1.00365
0.475	0.97555	0.96606	0.84335	0.93027
0.500	0.97990	0.90547	0.80151	0.85899
0.525	0.98636	0.84323	0.75978	0.78963
0.550	0.99458	0.77961	0.71898	0.72198
0.575	1.00417	0.71489	0.67990	0.65587
0.600	1.01482	0.64932	0.64299	0.59110
0.625	1.02625	0.58310	0.60862	0.52751
0.650	1.03821	0.51644	0.57699	0.46495
0.675	1.05047	0.44949	0.54824	0.40327
0.700	1.06289	0.38240	0.52234	0.34233
0.725	1.07533	0.31529	0.49926	0.28200
0.750	1.08770	0.24827	0.47891	0.22213
0.775	1.09993	0.18142	0.46115	0.16257
0.800	1.11199	0.11484	0.44581	0.10320
0.825	1.12388	— 0.04860	0.43270	+ 0.04384
0.850	1.13563	+ 0.01723	0.42162	— 0.01562
0.875	1.14731	0.08255	0.41234	0.07534
0.900	1.15899	0.14728	0.40461	0.13545
0.925	1.17077	0.21132	0.39817	0.19609
0.950	1.18277	0.27455	0.39271	0.25734
0.975	1.19514	0.33683	0.38789	0.31931
1.000	1.20805	0.39798	0.38331	0.38198
1.025	1.22167	0.45782	0.37856	0.44538
1.050	1.23619	0.51612	0.37312	0.50943
1.075	1.25183	0.57262	0.36641	0.57394
1.100	+ 1.26879	+ 0.62701	+ 0.35785	— 0.63864

ψ	E	F	ξ	η
1.125	+ 1.28726	+ 0.67896	+ 0.34674	— 0.70310
1.150	1.30743	0.72809	0.33245	0.76676
1.175	1.32945	0.77402	0.31425	0.82892
1.200	1.35344	0.81630	0.29158	0.88863
1.225	1.37945	0.85449	0.26394	0.94478
1.250	1.40746	0.88815	0.23107	0.99616
1.275	1.43737	0.91682	0.19297	1.04143
1.300	1.46901	0.94012	0.14992	1.07924
1.325	1.50210	0.95769	0.10260	1.10832
1.350	1.53630	0.96924	+ 0.05200	1.12760
1.375	1.57119	0.97458	— 0.00059	1.13635
1.400	1.60634	0.97362	0.05374	1.13418
1.425	1.64130	0.96637	0.10597	1.12118
1.450	+ 1.67561	+ 0.95294	— 0.15583	— 1.09781

Bahn 2.

$$\eta_0 = + 1.7015$$

t	ξ	η	t	ξ	η
0.0	0.00000	+ 1.70150	2.4	— 0.14518	+ 1.80308
0.2	— 0.00876	1.69682	2.6	0.13599	1.83745
0.4	0.01952	1.69286	2.8	0.11620	1.87531
0.6	0.03226	1.69005	3.0	0.08409	1.91534
0.8	0.04679	1.68889	3.2	— 0.03822	1.95565
1.0	0.06280	1.68994	3.4	+ 0.02238	1.99383
1.2	0.07977	1.69377	3.6	0.09803	2.02700
1.4	0.09698	1.70097	3.8	0.18821	2.05181
1.6	0.11349	1.71209	4.0	0.29144	2.06468
1.8	0.12810	1.72761	4.2	0.40507	2.06192
2.0	0.13939	1.74788	4.4	+ 0.52523	+ 2.03998
2.2	— 0.14568	+ 1.77307			

ψ	E	F	ξ	η
0.000	+ 1.44426	— 1.47942	+ 0.29141	+ 2.06467
0.025	1.41214	1.48364	0.36620	2.06481
0.050	1.37802	1.48563	0.44486	2.05686
0.075	1.34229	1.48504	0.52573	2.03989
0.100	1.30546	1.48149	0.60667	2.01309
0.125	1.26811	1.47464	0.68536	1.97618
0.150	1.23091	1.46418	0.75932	1.92929
0.175	1.19453	1.44985	0.82623	1.87306
0.200	1.15965	1.43146	0.88400	1.80851
0.225	1.12694	1.40888	0.93094	1.73709
0.250	1.09698	1.38204	0.96598	1.66041
0.275	1.07026	1.35096	0.98860	1.58011
0.300	1.04715	1.31575	0.99903	1.49787
0.325	1.02789	1.27653	0.99792	1.41496
0.350	1.01258	1.23354	0.98643	1.33256
0.375	1.00119	1.18701	0.96599	1.25143
0.400	0.99358	1.13725	0.93828	1.17213
0.425	0.98952	1.08455	0.90496	1.09488
0.450	0.98872	1.02926	0.86760	1.01982
0.475	0.99083	0.97170	0.82772	0.94691
0.500	0.99548	0.91218	0.78661	0.87598
0.525	1.00229	0.85103	0.74540	0.80693
0.550	1.01090	0.78852	0.70494	0.73954
0.575	1.02096	0.72493	0.66597	0.67366
0.600	1.03217	0.66050	0.62896	0.60912
0.625	1.04424	0.59544	0.59432	0.54574
0.650	1.05694	0.52996	0.56219	0.48343
0.675	1.07005	0.46421	0.53274	0.42200
0.700	1.08343	0.39835	0.50595	0.36135
0.725	1.09694	0.33250	0.48178	0.30135
0.750	1.11050	0.26677	0.46011	0.24185
0.775	1.12405	0.20126	0.44081	0.18274
0.800	1.13756	0.13605	0.42370	0.12386
0.825	+ 1.15103	— 0.07124	+ 0.40858	+ 0.06511

ψ	E	F	ξ	η
0.850	+ 1.16449	— 0.00690	+ 0.39523	+ 0.00634
0.875	1.17801	+ 0.05689	0.38338	— 0.05258
0.900	1.19166	0.12002	0.37279	0.11177
0.925	1.20554	0.18239	0.36315	0.17131
0.950	1.21978	0.24388	0.35413	0.23129
0.975	1.23452	0.30434	0.34538	0.29175
1.000	1.24993	0.36363	0.33647	0.35272
1.025	1.26618	0.42154	0.32697	0.41415
1.050	1.28345	0.47786	0.31639	0.47591
1.075	1.30195	0.53232	0.30415	0.53778
1.100	1.32186	0.58464	0.28970	0.59945
1.125	1.34339	0.63449	0.27237	0.66048
1.150	1.36669	0.68150	0.25161	0.72022
1.175	1.39192	0.72528	0.22680	0.77794
1.200	1.41919	0.76540	0.19746	0.83269
1.225	1.44855	0.80144	0.16324	0.88339
1.250	1.48000	0.83297	0.12399	0.92886
1.275	1.51348	0.85956	0.07978	0.96780
1.300	1.54884	0.88081	+ 0.03103	0.99896
1.325	1.58588	0.89637	— 0.02155	1.02121
1.350	1.62431	0.90598	0.07697	1.03363
1.375	1.66382	0.90942	0.13402	1.03557
1.400	1.70406	0.90658	0.19132	1.02680
1.425	1.74467	0.89746	0.24747	1.00745
1.450	1.78535	0.88213	0.30126	0.97812
1.475	1.82574	0.86076	0.35153	0.93968
1.500	1.86569	0.83360	0.39759	0.89325
1.525	1.90502	0.80098	0.43900	0.84021
1.550	1.94369	0.76327	0.47568	0.78187
1.575	1.98169	0.72085	0.50778	0.71958
1.600	2.01912	0.67415	0.53574	0.65461
1.625	2.05613	0.62356	0.56017	0.58799
1.650	2.09291	0.56949	0.58179	0.52073
1.675	+ 2.12970	+ 0.51232	— 0.60138	— 0.45361

ψ	E	F	ξ	η
1.700	+ 2.16676	+ 0.45240	- 0.61973	- 0.38731
1.725	2.20437	0.39004	0.63764	0.32237
1.750	2.24277	0.32554	0.65581	0.25929
1.775	2.28222	0.25916	0.67496	0.19851
1.800	2.32294	0.19113	0.69572	0.14041
1.825	2.36516	0.12166	0.71870	0.08546
1.850	2.40903	+ 0.05093	0.74443	- 0.03407
1.875	2.45467	- 0.02087	0.77337	+ 0.01324
1.900	2.50214	0.09357	0.80593	0.05592
1.925	+ 2.55140	- 0.16704	- 0.84245	+ 0.09340

Bahn 3.

$$\eta_0 = + 1.719$$

(Forts. zu Publ. 61).

t_1	ξ	η	t_1	ξ	η
0.00	- 1.73536	- 1.41319	0.65	- 2.03167	- 0.57441
0.10	1.83574	1.32992	0.70	2.00201	0.49424
0.20	1.92334	1.22562	0.75	1.96111	0.41511
0.30	1.99346	1.10260	0.80	1.90776	0.33794
0.40	2.04137	0.96386	0.85	1.84040	0.26378
0.50	2.06227	0.81308	0.90	- 1.75681	- 0.19383
0.60	- 2.05106	- 0.65476			

ψ_1	E	F	ξ	η
0.00	+ 3.27443	- 1.17428	- 1.75684	- 0.19383
0.02	3.24631	1.11230	1.67585	0.14177
0.04	3.22247	1.04696	1.59478	0.10091
0.06	3.20250	0.97875	1.51566	0.06956
0.08	+ 3.18593	- 0.90811	- 1.44003	- 0.04602

ψ_1	E	F	ξ	η
0.10	+ 3.17228	- 0.83544	- 1.36913	- 0.02872
0.12	3.16109	0.76111	1.30365	0.01632
0.14	3.15192	0.68541	1.24420	0.00765
0.16	3.14440	0.60863	1.19100	- 0.00182
0.18	3.13816	0.53096	1.14429	+ 0.00191
0.20	3.13290	0.45262	1.10413	0.00407
0.22	3.12838	0.37376	1.07059	0.00506
0.24	3.12437	0.29449	1.04355	0.00515
0.26	3.12072	0.21495	1.02297	0.00452
0.28	3.11730	0.13521	1.00886	0.00329
0.30	3.11405	- 0.05536	1.00115	+ 0.00153
0.32	3.11093	+ 0.02453	0.99983	- 0.00075
0.34	3.10794	0.10440	1.00489	0.00352
0.36	3.10514	0.18420	1.01634	0.00675
0.38	3.10259	0.26383	1.03421	0.01041
0.40	3.10044	0.34324	1.05859	0.01440
0.42	3.09886	0.42232	1.08951	0.01858
0.44	3.09804	0.50098	1.12707	0.02273
0.46	3.09828	0.57908	1.17131	0.02650
0.48	3.09986	0.65648	1.22227	0.02940
0.50	+ 3.10314	+ 0.73296	- 1.27991	- 0.03077

Bahn 4.

$$\eta_0 = + 1.72$$

(Forts. zu Publ. 61).

ψ	E	F	ξ	η
0.00	+ 3.20090	- 0.84115	- 1.3727	- 0.0560
0.02	3.27168	0.86300	1.3843	0.1264
0.04	3.34107	0.88628	1.3910	0.1996
0.06	3.40867	0.91111	1.3934	0.2751
0.08	+ 3.47405	- 0.93764	- 1.3921	- 0.3529

ψ	E	F	ξ	η
0.10	+ 3.53676	— 0.96602	— 1.3881	— 0.4325
0.12	3.59634	0.99641	1.3825	0.5138
0.14	3.65233	1.02891	1.3764	0.5965
0.16	3.70419	1.06363	1.3712	0.6805
0.18	3.75141	1.10065	1.3685	0.7656
0.20	3.79339	1.13999	1.3700	0.8514
0.22	3.82953	1.18161	1.3776	0.9375
0.24	3.85912	1.22542	1.3936	1.0231
0.26	3.88144	1.27125	1.4202	1.1073
0.28	3.89568	1.31882	1.4601	1.1883
0.30	3.90099	1.36780	1.5162	1.2641
0.32	3.89651	1.41773	1.5914	1.3312
0.34	3.88131	1.46806	1.6879	1.3854
0.36	3.85453	1.51814	1.8090	1.4208
0.38	3.81538	1.56724	1.9544	1.4303
0.40	3.76323	1.61456	2.1236	1.4054
0.42	3.69771	1.65926	2.3125	1.3369
0.44	3.61880	1.70054	2.5136	1.2159
0.46	3.52687	1.73762	2.7151	1.0350
0.48	3.42281	1.76988	2.9015	0.7909
0.50	3.30799	1.79678	3.0552	0.4857
0.52	3.18422	1.81794	3.1579	— 0.1278
0.54	+ 3.05378	— 1.83310	— 3.1942	+ 0.2672

t_1	ξ	η	t_1	ξ	η
0.0	— 3.15793	— 0.12780	0.7	— 2.90828	+ 1.35048
0.1	3.18683	+ 0.08633	0.8	2.79494	1.53171
0.2	3.19387	0.30455	0.9	2.66702	1.69853
0.3	3.17861	0.52372	1.0	2.52679	1.84940
0.4	3.14148	0.74073	1.1	2.37669	1.98314
0.5	3.08323	0.95264	1.2	2.21922	2.09895
0.6	— 3.00498	+ 1.15673	1.3	— 2.05692	+ 2.19635

t	ξ	η	t	ξ	η
1.4	— 1.89236	+ 2.27527	2.2	— 0.76213	+ 2.32821
1.5	1.72799	2.33591			
1.6	1.56621	2.37886	2.4	0.59232	2.23206
1.7	1.40927	2.40494	2.6	0.48152	2.12106
1.8	1.25924	2.41526	2.8	0.42926	2.01014
1.9	1.11798	2.41115	3.0	0.43106	1.91318
2.0	0.98715	2.39414	3.2	0.47884	1.84221
2.1	— 0.86815	+ 2.36590	3.4	0.56125	1.80725
			3.6	— 0.66411	+ 1.81642

Bahn 5.

$$\eta_0 = + 1.7202$$

ψ	E	F	ξ	η
0.00	— 1.57080	+ 1.31101	0.00000	+ 1.72020
0.05	1.57248	1.31011	— 0.00334	1.71840
0.10	1.57455	1.30935	0.00745	1.71690
0.15	1.57699	1.30882	0.01147	1.71577
0.20	1.57976	1.30861	0.01779	1.71539
0.25	1.58281	1.30882	0.02385	1.71569
0.30	1.58604	1.30957	0.03028	1.71716
0.35	1.58930	1.31096	0.03681	1.71980
0.40	1.59242	1.31309	0.04310	1.72388
0.45	1.59518	1.31607	0.04872	1.72977
0.50	1.59730	1.31996	0.05314	1.73744
0.55	1.59845	1.32480	0.05568	1.74716
0.60	1.59828	1.33059	0.05561	1.75880
0.65	1.59637	1.33725	0.05205	1.77244
0.70	1.59230	1.34467	0.04405	1.78772
0.75	1.58564	1.35259	0.03061	1.80421
0.80	1.57599	1.36069	— 0.01080	1.82117
0.85	— 1.56304	+ 1.36849	+ 0.01623	+ 1.83750

ψ	E	F	ξ	η
0.90	— 1.54660	+ 1.37541	+ 0.05091	+ 1.85144
0.95	1.52670	1.38069	0.09317	1.86130
1.00	1.50364	1.38348	0.14223	1.86483
1.05	1.47805	1.38282	0.19619	1.85965
1.10	1.45094	1.37772	0.25215	1.84352
1.15	1.42370	1.36720	0.30624	1.81492
1.20	1.39801	1.35047	0.35402	1.77321
1.25	1.37572	1.32690	0.39105	1.71877
1.30	1.35867	1.29625	0.41362	1.65311
1.35	1.34850	1.25861	0.41940	1.57841
1.40	1.34653	1.21448	0.40757	1.49738
1.45	1.35367	1.16475	0.37884	1.41258
1.50	1.37041	1.11060	0.33496	1.32636
1.55	1.39693	1.05349	0.27819	1.24046
1.60	1.43319	0.99503	0.21087	1.15651
1.65	1.47914	0.93693	0.13473	1.07545
1.70	1.53473	0.88092	+ 0.05098	0.99872
1.75	1.60013	0.82869	— 0.03999	0.92644
1.80	1.67568	0.78191	0.13833	0.85933
1.85	1.76192	0.74214	0.24473	0.79737
1.90	1.85952	0.71078	0.35973	0.74018
1.95	1.96925	0.68907	0.48381	0.68655
2.00	2.09174	0.67785	0.61650	0.63400
2.05	2.22735	0.67760	0.75595	0.57875
2.10	2.37587	0.68822	0.89844	0.51552
2.15	2.53639	0.70905	1.03786	0.43807
2.20	2.70690	0.73908	1.16622	0.34038
2.25	2.88436	0.77723	1.27421	0.21825
2.30	3.06462	0.82290	1.35409	+ 0.07066
2.35	3.24251	0.87641	1.40206	— 0.10004
2.40	3.41208	0.93919	1.42087	0.28949
2.45	3.56656	1.01340	1.42033	0.49310
2.50	— 3.69830	+ 1.10132	— 1.41807	— 0.70690

ψ	E	F	ξ	η
2.525	— 3.75291	+ 1.15089	— 1.42277	— 0.81634
2.550	3.79831	1.20428	1.43920	0.92630
2.575	3.83306	1.26132	1.46872	1.03521
2.600	3.85553	1.32171	1.51782	1.14044
2.625	3.86392	1.38493	1.59239	1.23771
2.650	3.85625	1.45018	1.69892	1.32096
2.675	3.83038	1.51648	1.84339	1.37823
2.700	3.78427	1.58259	2.03048	1.39703
2.725	3.71600	1.64706	2.26010	1.35809
2.750	3.62411	1.70841	2.52518	1.23869
2.775	3.50787	1.76515	2.80731	1.01557
2.800	3.36752	1.81606	3.07487	0.67033
2.825	3.20444	1.86017	3.28377	— 0.19688
2.850	3.02116	1.89681	3.38277	+ 0.39133
2.875	2.82133	1.92547	3.32400	1.05661
2.900	2.60958	1.94555	3.07671	1.73856
2.925	2.39141	1.95635	2.63912	2.36310
2.950	2.17297	1.95725	2.04514	2.85912
2.975	1.96042	1.94808	1.35938	3.17886
3.000	1.75926	1.92933	0.66084	3.31015
3.025	1.57364	1.90203	— 0.00973	3.27531
3.050	1.40608	1.86780	+ 0.54344	3.11707
3.075	1.25771	1.82799	0.98285	2.88306
3.100	— 1.12840	+ 1.78380	+ 1.31009	+ 2.61377

Bahn 6.

$$\eta_0 = 1.72025$$

ψ	E	F	ξ	η
0.00	— 1.57080	+ 1.31104	0.00000	+ 1.72025
0.05	1.57248	1.31014	— 0.00333	1.71847
0.10	— 1.57454	+ 1.30939	— 0.00741	+ 1.71696

ψ	E	F	ξ	η
0.15	— 1.57696	+ 1.30886	— 0.01223	+ 1.71585
0.20	1.57972	1.30865	0.01771	1.71543
0.25	1.58276	1.30886	0.02375	1.71578
0.30	1.58598	1.30960	0.03017	1.71720
0.35	1.58922	1.31098	0.03669	1.71985
0.40	1.59234	1.31311	0.04294	1.72395
0.45	1.59508	1.31608	0.04852	1.72973
0.50	1.59720	1.31995	0.05294	1.73750
0.55	1.59834	1.32477	0.05545	1.74710
0.60	1.59817	1.33053	0.05539	1.75873
0.65	1.59628	1.33717	0.05186	1.77220
0.70	1.59222	1.34454	0.04388	1.78747
0.75	1.58560	1.35244	0.03053	1.80397
0.80	1.57600	1.36050	— 0.01080	1.82080
0.85	1.56311	1.36828	+ 0.01608	1.83700
0.90	1.54675	1.37516	0.05059	1.85095
0.95	1.52694	1.38043	0.09268	1.86077
1.00	1.50399	1.38322	0.14146	1.86427
1.05	1.47851	1.38257	0.19515	1.85918
1.10	1.45152	1.37749	0.25090	1.84320
1.15	1.42440	1.36704	0.30479	1.81478
1.20	1.39882	1.35039	0.35237	1.77332
1.25	1.37661	1.32694	0.38931	1.71922
1.30	1.35960	1.29644	0.41189	1.65380
1.35	1.34947	1.25898	0.41774	1.57947
1.40	1.34750	1.21505	0.40604	1.49875
1.45	1.35460	1.16553	0.37748	1.41423
1.50	1.37129	1.11162	0.33376	1.32825
1.55	1.39774	1.05474	0.27687	1.24268
1.60	1.43392	0.99653	0.20999	1.15891
1.65	1.47978	0.93866	0.13396	1.07850
1.70	1.53530	0.88288	+ 0.05024	1.00150
1.75	1.60062	0.83088	— 0.04073	0.92942
1.80	— 1.67609	+ 0.78432	— 0.13912	+ 0.86244

ψ	E	F	ξ	η
1.85	— 1.76225	+ 0.74476	— 0.24555	+ 0.80064
1.90	1.85976	0.71364	0.36066	0.74360
1.95	1.96938	0.69214	0.48486	0.69000
2.00	2.09175	0.68115	0.61771	0.63754
2.05	2.22720	0.68114	0.75740	0.58229
2.10	2.37554	0.69201	0.90020	0.51898
2.15	2.53582	0.71316	1.04014	0.44137
2.20	2.70605	0.74357	1.16905	0.34344
2.25	2.88318	0.78219	1.27794	0.22090
2.30	3.06305	0.82845	1.35903	+ 0.07269
2.35	3.24046	0.88270	1.40861	— 0.09893
2.40	3.40940	0.94638	1.42940	0.28952
2.425	3.48860	0.98243	1.4319	0.3905
2.450	3.56304	1.02170	1.4316	0.4946
2.475	3.63173	1.06446	1.4311	0.6013
2.500	3.69357	1.11093	1.4332	0.7100
2.525	3.74736	1.16126	1.4415	0.8202
2.550	3.79174	1.21546	1.4600	0.9308
2.575	3.82522	1.27340	1.4935	1.0400
2.600	3.84609	1.33475	1.5476	1.1450
2.625	3.85245	1.39898	1.6285	1.2410
2.650	3.84222	1.46531	1.7429	1.3209
2.675	3.81317	1.53274	1.8971	1.3736
2.700	3.76308	1.60004	2.0956	1.3832
2.725	3.68990	1.66580	2.3379	1.3294
2.750	3.59200	1.72854	2.6152	1.1874
2.775	3.46846	1.78690	2.9066	0.9317
2.800	3.31930	1.83971	3.1760	0.5423
2.8125	3.23544	1.86376	3.2870	0.2948
2.8250	3.14567	1.88614	3.3728	— 0.0131
2.8375	3.05032	1.90678	3.4256	+ 0.3000
2.8500	— 2.94978	+ 1.92560	— 3.4382	+ 0.6400

ψ	E	F	ξ	η
2.8625	— 2.84448	+ 1.94252	— 3.4038	+ 1.0002
2.8750	2.73493	1.95748	3.3168	1.3726
2.8875	2.62173	1.97036	3.1734	1.7470
2.9000	2.50552	1.98102	2.9716	2.1125
2.9125	2.38702	1.98934	2.7130	2.4569
2.9250	2.26701	1.99518	2.4017	2.7689
2.9375	2.14632	1.99842	2.0445	3.0376
2.9500	2.02578	1.99895	1.6516	3.2543
2.9625	1.90626	1.99673	1.2346	3.4131
2.9750	1.78854	1.99177	0.8063	3.5111
2.9875	1.67342	1.98412	— 0.3796	3.5488
3.0000	1.56154	1.97390	+ 0.0340	3.5298
3.0125	1.45350	1.96125	0.4242	3.4598
3.0250	— 1.34976	+ 1.94635	+ 0.7834	+ 3.3467

Bahn 7.

$$\eta_0 = 1.7375$$

ψ	E	F	ξ	η
0.00	— 1.57080	+ 1.31968	0.00000	+ 1.7375
0.05	1.57002	1.32010	+ 0.00158	1.7384
0.10	1.56906	1.32045	0.00351	1.7390
0.15	1.56792	1.32070	0.00578	1.7396
0.20	1.56662	1.32079	0.00839	1.7397
0.25	1.56521	1.32069	0.01122	1.7395
0.30	1.56371	1.32034	0.01422	1.7388
0.35	1.56220	1.31968	0.01724	1.7374
0.40	1.56077	1.31868	0.02009	1.7354
0.45	1.55952	1.31728	0.02257	1.7326
0.50	1.55856	1.31546	0.02445	1.7290
0.55	1.55806	1.31322	0.02540	1.7244
0.60	1.55815	1.31055	0.02516	1.7191
0.65	— 1.55900	+ 1.30750	+ 0.02341	+ 1.7131

ψ	E	F	ξ	η
0.70	— 1.56076	+ 1.30412	+ 0.01986	+ 1.7064
0.75	1.56358	1.30054	0.01424	1.6994
0.80	1.56761	1.29689	+ 0.00627	1.6922
0.85	1.57294	1.29336	— 0.00419	1.6854
0.90	1.57964	1.29018	0.01726	1.6791
0.95	1.58770	1.28763	0.03296	1.6739
1.00	1.59708	1.28602	0.05118	1.6704
1.05	1.60762	1.28570	0.07168	1.6693
1.10	1.61909	1.28705	0.09410	1.6710
1.15	1.63112	1.29046	0.11781	1.6766
1.20	1.64319	1.29632	0.14211	1.6866
1.25	1.65462	1.30504	0.16571	1.7023
1.30	1.66451	1.31696	0.18716	1.7244
1.35	1.67178	1.33237	0.20433	1.7541
1.40	1.67487	1.35146	0.21410	1.7924
1.45	1.67220	1.37426	0.21283	1.8401
1.50	1.66166	1.40056	0.19527	1.8977
1.55	1.64099	1.42983	0.15492	1.9645
1.60	1.60742	1.46103	— 0.08317	2.0379
1.65	1.55873	1.49246	+ 0.02820	2.1114
1.70	1.49302	1.52160	0.18640	2.1740
1.75	1.40968	1.54498	0.39287	2.2105
1.80	1.31044	1.55833	0.63857	2.1937
1.85	1.20000	1.55698	0.89780	2.1128
1.90	1.08584	1.53660	1.1317	1.9612
1.95	0.97746	1.49414	1.3084	1.7540
2.00	0.88360	1.42829	1.3992	1.5197
2.05	0.81026	1.33966	1.4061	1.2880
2.10	0.75944	1.23046	1.3471	1.0778
2.15	0.72936	1.10385	1.2479	0.8944
2.20	0.71578	0.96346	1.1328	0.7347
2.25	0.71340	0.81274	1.0202	0.5926
2.30	0.71697	0.65474	0.9212	0.4616
2.35	— 0.72206	+ 0.49183	+ 0.8431	+ 0.3384

ψ	E	F	ξ	η
2.40	-0.72526	+0.32582	+0.7884	+0.2200
2.45	0.72424	+0.15796	0.7584	+0.1051
2.50	0.71760	-0.01093	0.7534	-0.0072
2.55	0.70492	0.18018	0.7741	0.1174
2.60	0.68659	0.34917	0.8211	0.2258
2.65	0.66402	0.51715	0.8952	0.3331
2.70	0.63976	0.68305	0.9968	0.4402
2.75	0.61758	0.84540	1.1244	0.5500
2.80	0.60271	1.00228	1.2732	0.6682
2.85	0.60175	1.15140	1.4338	0.8056
2.90	0.62228	1.29016	1.5880	0.9787
2.925	0.64302	1.35486	1.6542	1.0848
2.950	0.67200	1.41606	1.7074	1.2072
2.975	0.70998	1.47347	1.7418	1.3476
3.000	0.75763	1.52689	1.7512	1.5072
3.025	0.81540	1.57611	1.7286	1.6851
3.050	0.88357	1.62100	1.6671	1.8786
3.075	0.96216	1.66139	1.5599	2.0825
3.100	1.05096	1.69717	1.4012	2.2892
3.125	1.14953	1.72819	1.1875	2.4880
3.150	1.25717	1.75424	0.9182	2.6662
3.175	1.37290	1.77509	0.5967	2.8096
3.200	1.49550	1.79042	+0.2316	2.9043
3.225	1.62342	1.79988	-0.1634	2.9377
3.250	1.75478	1.80306	0.5702	2.9019
3.275	-1.88742	-1.79963	-0.9672	-2.7948

Bahn 8.

$$\eta_0 = 1.7392$$

ψ	E	F	ξ	η
0.00	-1.57080	+1.32052	0.00000	+1.7392
0.04	-1.57000	+1.32097	+0.00160	+1.7401

ψ	E	F	ξ	η
0.08	— 1.56904	+ 1.32136	+ 0.00353	+ 1.7409
0.12	1.56794	1.32168	0.00574	1.7415
0.16	1.56670	1.32190	0.00824	1.7420
0.20	1.56532	1.32198	0.01101	1.7421
0.24	1.56384	1.32190	0.01398	1.7420
0.28	1.56228	1.32162	0.01711	1.7414
0.32	1.56070	1.32109	0.02027	1.7402
0.36	1.55912	1.32030	0.02343	1.7386
0.40	1.55763	1.31920	0.02639	1.7363
0.44	1.55630	1.31778	0.02902	1.7335
0.48	1.55518	1.31601	0.03119	1.7300
0.52	1.55440	1.31388	0.03271	1.7256
0.56	1.55404	1.31138	0.03336	1.7207
0.60	1.55420	1.30854	0.03296	1.7150
0.64	1.55500	1.30538	0.03128	1.7088
0.68	1.55652	1.30192	0.02817	1.7020
0.72	1.55890	1.29826	0.02342	1.6948
0.76	1.56220	1.29446	0.01688	1.6874
0.80	1.56651	1.29063	+ 0.00839	1.6800
0.84	1.57190	1.28690	— 0.00214	1.6727
0.88	1.57841	1.28342	0.01479	1.6659
0.92	1.58607	1.28036	0.02959	1.6598
0.96	1.59486	1.27792	0.04653	1.6548
1.00	1.60472	1.27630	0.06549	1.6512
1.04	1.61555	1.27575	0.08636	1.6494
1.08	1.62722	1.27650	0.10896	1.6500
1.12	1.63953	1.27882	0.13292	1.6531
1.16	1.65219	1.28296	0.15793	1.6595
1.20	1.66484	1.28920	0.18336	1.6698
1.24	1.67704	1.29779	0.20860	1.6845
1.28	1.68820	1.30898	0.23263	1.7044
1.32	1.69763	1.32301	0.25431	1.7302
1.36	1.70444	1.34005	0.27189	1.7628
1.40	— 1.70760	+ 1.36024	— 0.28324	+ 1.8033

ψ	E	F	ξ	η
1.44	— 1.70584	+ 1.38364	— 0.28544	+ 1.8523
1.48	1.69765	1.41018	0.27458	1.9108
1.52	1.68133	1.43960	0.24578	1.9788
1.56	1.65491	1.47146	0.19260	2.0558
1.60	1.61631	1.50491	— 0.10751	2.1387
1.64	1.56348	1.53872	+ 0.01784	2.2220
1.68	1.49470	1.57107	0.19080	2.2953
1.72	1.40906	1.59950	0.41489	2.3433
1.76	1.30704	1.62102	0.68514	2.3462
1.80	1.19117	1.63224	0.9840	2.2847
1.84	1.06630	1.62983	1.2807	2.1478
1.88	0.93924	1.61107	1.5374	1.9405
1.92	0.81773	1.57420	1.7214	1.6852
1.96	0.70889	1.51867	1.8161	1.4149
2.00	0.61794	1.44504	1.8249	1.1607
2.04	0.54728	1.35476	1.7650	0.9413
2.08	0.49672	1.24987	1.6600	0.7633
2.12	0.46394	1.13275	1.5320	0.6225
2.16	0.44539	1.00576	1.3986	0.5101
2.20	0.43706	0.87116	1.2721	0.4172
2.24	0.43508	0.73088	1.1600	0.3362
2.28	0.43612	0.58653	1.0668	0.2622
2.32	0.43774	0.43939	0.9946	0.1923
2.36	0.43702	0.29042	0.9445	0.1247
2.40	0.43349	+ 0.14034	0.9165	+ 0.0591
2.44	0.42604	— 0.01030	0.9106	— 0.0043
2.48	0.41449	0.16104	0.9272	0.0651
2.52	0.39916	0.31144	0.9664	0.1230
2.56	0.38099	0.46101	1.0287	0.1776
2.60	0.36158	0.60916	1.1143	0.2291
2.64	0.34322	0.75512	1.2232	0.2789
2.68	0.32899	0.89788	1.3542	0.3307
2.72	0.32281	1.03621	1.5047	0.3908
2.76	— 0.32932	— 1.16858	+ 1.6693	— 0.4700

ψ	E	F	ξ	η
2.80	— 0.35370	— 1.29328	+ 1.8382	— 0.5837
2.84	0.40116	1.40841	1.9950	0.7507
2.88	0.47636	1.51210	2.1136	0.9895
2.92	0.58249	1.60264	2.1577	1.3105
2.94	0.64756	1.64252	2.1382	1.5006
2.96	0.72050	1.67860	2.0834	1.7059
2.98	0.80100	1.71075	1.9884	1.9217
3.00	0.88853	1.73886	1.8496	2.1402
3.02	0.98240	1.76282	1.6652	2.3530
3.04	1.08178	1.78257	1.4359	2.5499
3.06	1.18564	1.79802	1.1653	2.7209
3.08	1.29292	1.80916	0.8599	2.8567
3.10	1.40243	1.81594	0.5286	2.9497
3.12	1.51298	1.81840	+ 0.1827	2.9948
3.14	1.62339	1.81654	— 0.1659	2.9898
3.16	1.73244	1.81044	0.5051	2.9359
3.18	— 1.83905	— 1.80017	— 0.8238	— 2.8375

Bahn 9.

$$\eta_0 = + 1.741$$

(Forts. zu Publ. 61).

ψ	E	F	ξ	η
0.22	+ 0.22910	+ 0.12815	+ 0.98188	— 0.02918
0.24	0.23410	0.20650	0.99352	0.04824
0.26	0.23850	0.28466	1.01133	0.06816
0.28	0.24240	0.36253	1.03529	0.08894
0.30	0.24598	0.44002	1.06530	0.11064
0.32	0.24942	0.51702	1.10151	0.13338
0.34	+ 0.25291	+ 0.59338	+ 1.14368	— 0.15735

ψ	E	F	ξ	η
0.36	+ 0.25696	+ 0.66894	+ 1.19176	— 0.18298
0.38	0.26169	0.74353	1.24551	0.21059
0.40	0.26758	0.81692	1.30452	0.24080
0.42	0.27505	0.88888	1.36909	0.27487
0.44	0.28458	0.95913	1.43613	0.31251
0.46	0.29667	1.02736	1.50697	0.35602
0.48	0.31183	1.09323	1.57946	0.40633
0.50	0.33057	1.15639	1.65196	0.46477
0.52	0.35338	1.21644	1.72231	0.53276
0.54	0.38065	1.27299	1.78792	0.61144
0.56	0.41273	1.32562	1.84591	0.70173
0.58	0.44978	1.37392	1.89291	0.80384
0.60	0.49163	1.41752	1.92587	0.91736
0.62	0.53869	1.45606	1.94136	1.04067
0.64	0.58996	1.48923	1.93655	1.17057
0.66	0.64502	1.51680	1.90835	1.30443
0.68	0.70300	1.53861	1.85878	1.43635
0.70	0.76288	1.55460	1.78837	1.56236
0.72	0.82350	1.56483	1.69604	1.67712
0.74	0.88361	1.56944	1.58978	1.77636
0.76	0.94198	1.56874	1.47310	1.85696
0.78	0.99743	1.56311	1.35156	1.91713
0.80	1.04895	1.55305	1.23063	1.95668
0.82	1.09566	1.53912	1.11512	1.97673
0.84	1.13692	1.52195	1.01040	1.97864
0.86	1.17227	1.50217	0.91454	1.96713
0.88	1.20144	1.48047	0.83440	1.94317
0.90	1.22437	1.45745	0.76865	1.91044
0.92	1.24111	1.43375	0.71757	1.87146
0.94	1.25181	1.40993	0.68047	1.82860
0.96	1.25675	1.38651	0.65657	1.78375
0.98	1.25623	1.36399	0.64470	1.73840
1.00	1.25059	1.34279	0.64384	1.69360
1.02	+ 1.24021	+ 1.32331	+ 0.65279	— 1.65033

Bahn 10.
 $\eta_0 = + 1.742$
 (Forts. zu Publ. 61).

ψ	E	F	ξ	η
0.52	+ 0.19621	+ 0.10637	+ 0.98635	— 0.02077
0.54	0.21220	0.18356	0.99407	0.03888
0.56	0.22760	0.26055	1.00746	0.05946
0.58	0.24249	0.33724	1.02648	0.08253
0.60	0.25698	0.41350	1.05102	0.10812
0.62	0.27123	0.48919	1.08103	0.13635
0.64	0.28542	0.56416	1.11638	0.16741
0.66	0.29982	0.63821	1.15665	0.20155
0.68	0.31469	0.71112	1.20163	0.23914
0.70	0.33037	0.78264	1.25072	0.28062
0.72	0.34722	0.85249	1.30320	0.32653
0.74	0.36561	0.92033	1.35812	0.37749
0.76	0.38595	0.98582	1.41423	0.43419
0.78	0.40863	1.04856	1.47007	0.49731
0.80	0.43403	1.10815	1.52375	0.56741
0.82	0.46246	1.16414	1.57305	0.64491
0.84	0.49417	1.21610	1.61567	0.72988
0.86	0.52929	1.26356	1.64897	0.82184
0.88	0.56780	1.30612	1.67047	0.91986
0.90	0.60951	1.34336	1.67795	1.02212
0.92	0.65405	1.37495	1.66968	1.12616
0.94	0.70086	1.40062	1.64480	1.22890
0.96	0.74918	1.42017	1.60344	1.32670
0.98	0.79813	1.43355	1.54690	1.41602
1.00	0.84668	1.44080	1.47755	1.49342
1.02	0.89379	1.44207	1.39885	1.55618
1.04	0.93842	1.43767	1.31462	1.60258
1.06	0.97960	1.42799	1.22900	1.63173
1.08	1.01647	1.41354	1.14585	1.64403
1.10	1.04833	1.39487	1.06846	1.64075
1.12	+ 1.07465	+ 1.37262	+ 0.99947	— 1.62357

ψ	E	F	ξ	η
1.14	+ 1.09506	+ 1.34743	+ 0.94059	— 1.59460
1.16	1.10936	1.31993	0.89277	1.55626
1.18	1.11747	1.29077	0.85633	1.51054
1.20	1.11943	1.26052	0.83113	1.45947
1.22	1.11535	1.22975	0.81636	1.40455
1.24	1.10544	1.19897	0.81182	1.34728
1.28	1.06900	1.13911	0.82832	1.22911
1.32	1.01210	1.08398	0.87322	1.11005
1.36	0.93685	1.03578	0.93946	0.99195
1.40	0.84533	0.99601	1.02072	0.87466
1.44	0.73955	0.96553	1.11074	0.75666
1.48	0.62155	0.94457	1.20344	0.63553
1.52	0.49349	0.93297	1.29256	0.50892
1.56	0.35771	0.93031	1.37213	0.37479
1.60	0.21673	0.93612	1.43668	0.23201
1.64	+ 0.07334	0.95009	1.48233	— 0.08057
1.68	— 0.06945	0.97231	1.50749	+ 0.07861
1.72	0.20838	1.00328	1.51348	0.24416
1.76	— 0.33992	+ 1.04390	+ 1.50485	+ 0.41480

Bahn 11.
 $\eta_0 = + 1.743$
 (Forts. zu Publ. 61).

ψ	E	F	ξ	η
0.525	— 0.29274	— 0.20597	+ 0.97784	— 0.05986
0.550	0.32941	0.29518	0.98776	0.09688
0.575	0.36499	0.38385	1.00380	0.14040
0.600	0.39969	0.47130	1.02540	0.19026
0.625	0.43379	0.55728	1.05197	0.24655
0.650	0.46763	0.64135	1.08260	0.30933
0.675	— 0.50166	— 0.72299	+ 1.11609	— 0.37876

ψ	E	F	ξ	η
0.700	— 0.53635	— 0.80162	+ 1.15086	— 0.45493
0.725	0.57220	0.87657	1.18492	0.53780
0.750	0.60969	0.94711	1.21583	0.62713
0.775	0.64925	1.01248	1.24090	0.72221
0.800	0.69117	1.07185	1.25713	0.82179
0.825	0.73555	1.12444	1.26172	0.92386
0.850	0.78226	1.16948	1.25226	1.02553
0.875	0.83087	1.20631	1.22726	1.12323
0.900	0.88065	1.23442	1.18652	1.21279
0.925	0.93061	1.25346	1.13135	1.28996
0.950	0.97951	1.26337	1.06469	1.35103
0.975	1.02602	1.26430	0.99059	1.39325
1.000	1.06877	1.25667	0.91387	1.41534
1.025	1.10652	1.24112	0.83924	1.41741
1.050	1.13821	1.21850	0.77088	1.40107
1.075	1.16301	1.18977	0.71198	1.36875
1.100	1.18035	1.15596	0.66449	1.32344
1.125	1.18990	1.11813	0.62937	1.26822
1.150	1.19156	1.07730	0.60664	1.20588
1.175	1.18534	1.03443	0.59573	1.13886
1.200	1.17142	0.99040	0.59565	1.06912
1.225	1.15002	0.94599	0.60528	0.99815
1.250	1.12140	0.90188	0.62340	0.92702
1.30	1.04365	0.81674	0.68039	0.78700
1.35	0.94043	0.73830	0.75752	0.65209
1.40	0.81409	0.66835	0.84565	0.52295
1.45	0.66714	0.60716	0.93489	0.39918
1.50	0.50260	0.55369	1.01412	0.28056
1.55	0.32421	0.50596	1.07185	0.16814
1.60	— 0.13644	0.46174	1.09822	— 0.06505
1.65	+ 0.05578	0.41924	1.08747	+ 0.02406
1.70	0.24744	0.37783	1.03957	0.09476
1.75	+ 0.43404	— 0.33815	+ 0.95964	+ 0.14493

Bahn 12.
 $\eta_0 = +1.744$
(Forts. zu Publ. 61).

ψ	E	F	ξ	η
0.56	—0.48431	—0.02888	+0.88536	—0.01345
0.60	0.57753	0.14138	0.84620	0.07726
0.64	0.66586	0.25110	0.81130	0.15674
0.68	0.74971	0.35684	0.77898	0.24836
0.72	0.82979	0.45729	0.74687	0.34927
0.76	0.90702	0.55095	0.71200	0.45627
0.80	0.98238	0.63620	0.67120	0.56563
0.84	1.05674	0.71132	0.62144	0.67296
0.88	1.13070	0.77453	0.56034	0.77293
0.92	1.20447	0.82420	0.48688	0.85966
0.96	1.27775	0.85894	0.40215	0.92724
1.00	1.34976	0.87780	0.30927	0.97077
1.04	1.41935	0.88041	0.21320	0.98722
1.08	1.48522	0.86704	0.11966	0.97625
1.12	1.54620	0.83859	+0.03376	0.94012
1.16	1.60137	0.79643	—0.04079	0.88290
1.20	1.65027	0.74226	0.10238	0.80977
1.24	—1.69284	—0.67790	—0.15080	—0.72560

Bahn 13.
 $\eta_0 = +1.74427$

t	ξ	η	t	ξ	η
0.0	0.00000	+1.74427	1.2	+0.03156	+1.74718
0.2	+0.00349	1.74613	1.4	0.03827	1.74426
0.4	0.00778	1.74770	1.6	0.04465	1.73978
0.6	0.01284	1.74880	1.8	0.05022	1.73358
0.8	0.01862	1.74922	2.0	0.05444	1.72549
1.0	+0.02491	+1.74876	2.2	+0.05668	+1.71547

t	ξ	η	t	ξ	η
2.4	+0.05622	+1.70354	7.0	+0.37451	+2.70957
2.6	0.05232	1.68982	7.2	0.66701	2.75767
2.8	0.04422	1.67462	7.4	0.99060	2.75860
3.0	0.03116	1.65836	7.6	1.33541	2.70333
3.2	+0.01246	1.64168	7.8	1.68823	2.58509
3.4	—0.01250	1.62542	8.0	2.03394	2.40020
3.6	0.04412	1.61068	8.2	2.35592	2.14896
3.8	0.08257	1.59870	8.4	2.63716	1.83584
4.0	0.12768	1.59106	8.6	2.86135	1.47042
4.2	0.17885	1.58947	8.8	3.01430	1.06691
4.4	0.23490	1.59578	9.0	3.08546	0.64425
4.6	0.29396	1.61193	9.2	3.06923	+0.22501
4.8	0.35327	1.63992	9.4	2.96639	—0.16550
5.0	0.40920	1.68162	9.6	2.78471	0.50120
5.2	0.45709	1.73863	9.8	2.53950	0.75650
5.4	0.49159	1.81214			
5.6	0.50671	1.90243	9.9	2.39971	0.84648
5.8	0.49622	2.00864	10.0	2.25278	0.90763
6.0	0.45408	2.12823	10.1	2.10232	0.93724
6.2	0.37484	2.25690	10.2	1.95208	0.93252
6.4	0.25410	2.38820	10.3	1.80588	0.89024
6.6	—0.08907	2.51405	10.4	+1.66708	—0.80611
6.8	+0.12106	+2.62470			

ψ	E	F	ξ	η
0.00	+0.51569	+1.26722	+1.6671	—0.80611
0.04	0.48944	1.15080	1.5344	0.66837
0.08	0.43542	1.03634	1.4388	0.51967
0.12	0.35967	0.92471	1.3656	0.37387
0.16	0.26742	0.81594	1.3037	0.24034
0.20	0.16328	0.70947	1.2456	0.12525
0.24	+0.05128	+0.60454	+1.1868	—0.03287

ψ	E	F	ξ	η
0.28	— 0.06505	+ 0.50046	+ 1.1252	+ 0.03391
0.32	0.18268	0.39677	1.0618	0.07399
0.36	0.29912	0.29340	0.99703	0.08770
0.40	0.41249	0.19060	0.93282	0.07695
0.44	0.52145	+ 0.08892	0.87052	+ 0.04434
0.48	0.62527	— 0.01084	0.81085	— 0.00635
0.52	0.72370	0.10780	0.75372	0.07152
0.56	0.81696	0.20094	0.69830	0.14749
0.60	0.90557	0.28925	0.64325	0.23076
0.64	0.99029	0.37161	0.58674	0.31793
0.68	1.07196	0.44691	0.52696	0.40565
0.72	1.15151	0.51399	0.46209	0.49041
0.76	1.22971	0.57168	0.39069	0.56856
0.80	1.30724	0.61886	0.31204	0.63637
0.84	1.38450	0.65451	0.22640	0.69011
0.88	1.46173	0.67777	0.13482	0.72651
0.92	1.53892	0.68807	+ 0.03972	0.74330
0.96	1.61596	0.68516	— 0.05618	0.73928
1.00	1.69270	0.66912	0.14985	0.71483
1.04	— 1.76906	— 0.64038	— 0.23876	— 0.67160

Bahn 14.
 $\eta_0 = + 1.7444$

t	ξ	η	t	ξ	η
0.0	0.00000	+ 1.74440	1.4	+ 0.03865	+ 1.74435
0.2	+ 0.00353	1.74628	1.6	0.04507	1.73982
0.4	0.00786	1.74786	1.8	0.05069	1.73355
0.6	0.01298	1.74896	2.0	0.05493	1.72539
0.8	0.01879	1.74938	2.2	0.05717	1.71527
1.0	0.02517	1.74891	2.4	0.05670	1.70322
1.2	+ 0.03188	+ 1.74731	2.6	+ 0.05275	+ 1.68938

t	ξ	η	t	ξ	η
2.8	+0.04455	+1.67403	7.0	+0.37785	+2.71875
3.0	0.03135	1.65763	7.2	0.67278	2.76704
3.2	+0.01245	1.64081	7.4	0.99933	2.76766
3.4	—0.01275	1.62442	7.6	1.34703	2.71153
3.6	0.04467	1.60954	7.8	1.70277	2.59186
3.8	0.08349	1.59748	8.0	2.05126	2.40494
4.0	0.12903	1.58978	8.2	2.37581	2.15078
4.2	0.18071	1.58817	8.4	2.65929	1.83470
4.4	0.23732	1.59453	8.6	2.88537	1.46560
4.6	0.29697	1.61086	8.8	3.03989	1.05804
4.8	0.35689	1.63911	9.0	3.11233	0.63093
5.0	0.41336	1.68120	9.2	3.09724	+0.20674
5.2	0.46176	1.73879	9.4	2.99551	—0.18942
5.4	0.49658	1.81302	9.6	2.81522	0.53188
5.6	0.51183	1.90422	9.8	2.57165	0.79562
5.8	0.50119	2.01149	10.0	2.28709	0.95836
6.0	0.45861	2.13227			
6.2	0.37855	2.26217	10.1	2.13795	0.99552
6.4	0.25662	2.39473	10.2	1.98926	1.00007
6.6	—0.09000	2.52171	10.3	1.84494	0.96951
6.8	+0.12207	+2.63329	10.4	+1.70876	—0.90068

ψ	E	F	ξ	η
0.00	+0.54672	+1.31715	+1.70876	—0.90068
0.04	0.53075	1.20276	1.56514	0.76662
0.08	0.48418	1.09043	1.46548	0.61431
0.12	0.41332	0.98148	1.39348	0.46063
0.16	0.32368	0.87616	1.33585	0.31571
0.20	0.22005	0.77400	1.28306	0.18633
0.24	+0.10669	0.67421	1.22900	—0.07736
0.28	—0.01268	0.57633	1.17060	+0.00772
0.32	—0.13479	+0.47852	+1.10654	+0.06679

ψ	E	F	ξ	η
0.36	— 0.25686	+ 0.38165	+ 1.03850	+ 0.09933
0.40	0.37668	0.28541	0.96802	0.10642
0.44	0.49261	0.19023	0.89710	0.09050
0.48	0.60359	0.09677	0.82716	0.05501
0.52	0.70909	+ 0.00588	0.75898	+ 0.00383
0.56	0.80908	— 0.08153	0.69245	— 0.05907
0.60	0.90389	0.16456	0.62694	0.12958
0.64	0.99412	0.24227	0.56131	0.20509
0.68	1.08059	0.31376	0.49418	0.28137
0.72	1.16417	0.37810	0.42412	0.35561
0.76	1.24575	0.43441	0.34997	0.42474
0.80	1.32619	0.48180	0.27082	0.48575
0.84	1.40622	0.51947	0.18644	0.53582
0.88	1.48645	0.54666	0.09714	0.57227
0.92	1.56736	0.56281	+ 0.00400	0.59300
0.96	1.64933	0.56752	— 0.09142	0.59664
1.00	1.73269	0.56061	0.18718	0.58270
1.04	— 1.81774	— 0.54216	— 0.28125	— 0.55185

Bahn 15.

$$\eta_0 = + 1.7448$$

t	ξ	η	t	ξ	η
0.0	0.00000	+ 1.74480	1.8	+ 0.05236	+ 1.73364
0.2	+ 0.00364	1.74674	2.0	0.05676	1.72522
0.4	0.00811	1.74837	2.2	0.05909	1.71478
0.6	0.01340	1.74951	2.4	0.05861	1.70233
0.8	0.01940	1.74995	2.6	0.05454	1.68803
1.0	0.02598	1.74947	2.8	0.04608	1.67216
1.2	0.03292	1.74783	3.0	0.03244	1.65521
1.4	0.03991	1.74478	3.2	+ 0.01294	1.63781
1.6	+ 0.04655	+ 1.74012	3.4	— 0.01309	+ 1.62086

t	ξ	η	t	ξ	η
3.6	-0.04608	+1.60545	7.8	+1.75004	+2.61668
3.8	0.08621	1.59296	8.0	2.10832	2.42307
4.0	0.13330	1.58495	8.2	2.44199	2.16041
4.2	0.18677	1.58324	8.4	2.73366	1.83347
4.4	0.24537	1.58975	8.6	2.96676	1.45194
4.6	0.30717	1.60654	8.8	3.12713	1.03035
4.8	0.36925	1.63566	9.0	3.20442	0.58753
5.0	0.42782	1.67908	9.2	3.19345	+0.14580
5.2	0.47801	1.73850	9.4	3.09544	-0.27048
5.4	0.51419	1.81513	9.6	2.91870	0.63673
5.6	0.53011	1.90936	9.8	2.67873	0.93021
5.8	0.51929	2.02026			
6.0	0.47544	2.14512	9.9	2.54166	1.04345
6.2	0.39292	2.27938	10.0	2.39746	1.13161
6.4	0.26721	2.41633	10.1	2.24967	1.19302
6.6	-0.09542	2.54740	10.2	2.10205	1.22630
6.8	+0.12315	2.66242	10.3	1.95852	1.23036
7.0	0.38667	2.75029	10.4	1.82305	1.20420
7.2	0.69038	2.79961	10.5	1.69959	1.14687
7.4	1.02648	2.79962	10.6	+1.59195	-1.05693
7.6	+1.38421	+2.74095			

ψ	E	F	ξ	η
0.00	+0.65364	+1.32000	+1.59195	-1.05693
0.04	0.62530	1.21549	1.48720	0.90010
0.08	0.56665	1.11642	1.42643	0.73180
0.12	0.48382	1.02386	1.39119	0.56395
0.16	0.38202	0.93778	1.36672	0.40314
0.20	0.26578	0.85748	1.34193	0.25386
0.24	0.13916	0.78185	1.30876	0.11984
0.28	+0.00580	0.70976	1.26260	-0.00447
0.32	-0.13105	+0.64030	+1.20170	+0.08950

ψ	E	F	ξ	η
0.36	—0.26851	+0.57296	+1.12677	+0.16046
0.40	0.40419	0.50770	1.04047	0.20835
0.44	0.53618	0.44485	0.94612	0.23482
0.48	0.66315	0.38504	0.84720	0.24293
0.52	0.78429	0.32901	0.74655	0.23661
0.56	0.89929	0.27752	0.64627	0.22007
0.60	1.00829	0.23125	0.54765	0.19737
0.64	1.11175	0.19063	0.45116	0.17193
0.68	1.21036	0.15617	0.35698	0.14673
0.72	1.30504	0.12813	0.26480	0.12397
0.76	1.39678	0.10672	0.17413	0.10530
0.80	1.48669	0.09208	+0.08435	0.09188
0.84	1.57590	0.08429	—0.00512	0.08439
0.88	1.66556	0.08341	0.09495	0.08313
0.92	—1.75681	+0.08947	—0.18570	+0.08808

Bahn 16.

$$\eta_0 = +1.74484$$

t	ξ	η	t	ξ	η
0.0	0.00000	+1.74484	2.4	+0.05886	+1.70226
0.2	+0.00366	1.74679	2.6	0.05481	1.68792
0.4	0.00814	1.74843	2.8	0.04636	1.67200
0.6	0.01344	1.74958	3.0	0.03271	1.65497
0.8	0.01946	1.75002	3.2	+0.01314	1.63750
1.0	0.02606	1.74954	3.4	—0.01296	1.62046
1.2	0.03303	1.74790	3.6	0.04604	1.60496
1.4	0.04004	1.74484	3.8	0.08630	1.59238
1.6	0.04672	1.74016	4.0	0.13359	1.58429
1.8	0.05256	1.73367	4.2	0.18728	1.58250
2.0	0.05698	1.72522	4.4	0.24614	1.58897
2.2	+0.05933	+1.71474	4.6	—0.30824	+1.60573

t	ξ	η	t	ξ	η
4.8	-0.37068	+1.63487	8.2	+2.44921	+2.16428
5.0	0.42962	1.67836	8.4	2.74246	1.83625
5.2	0.48021	1.73793	8.6	2.97710	1.45452
5.4	0.51674	1.81480	8.8	3.13902	1.02993
5.6	0.53295	1.90938	9.0	3.21775	0.58491
5.8	0.52232	2.02065	9.2	3.20816	+0.14054
6.0	0.47856	2.14609	9.4	3.11136	-0.27896
6.2	0.39597	2.28094	9.6	2.93574	0.64926
6.4	0.27001	2.41856	9.8	2.69663	0.94782
6.6	-0.09784	2.55031	10.0	2.41576	1.15567
6.8	+0.12136	2.66601	10.2	2.12014	1.25871
7.0	0.38568	2.75449			
7.2	0.69041	2.80431	10.3	1.97615	1.26788
7.4	1.02771	2.80465	10.4	1.83995	1.24771
7.6	1.38679	2.74612	10.5	1.71548	1.19748
7.8	1.75410	2.62172	10.6	+1.60655	-1.11620
8.0	+2.11394	+2.42768			

ψ	E	F	ξ	η
0.00	+0.67202	+1.34699	+1.6066	-1.11620
0.04	0.65032	1.24317	1.4943	0.96210
0.08	0.59682	1.14490	1.4311	0.79354
0.12	0.51779	1.05352	1.3974	0.62340
0.16	0.41862	0.96925	1.3775	0.45850
0.20	0.30396	0.89148	1.3591	0.30360
0.24	0.17793	0.81915	1.3333	0.16175
0.28	+0.04420	0.75108	1.2943	-0.03640
0.32	-0.09387	0.68625	1.2394	+0.06949
0.36	0.23332	0.62403	1.1686	0.15383
0.40	0.37159	0.56423	1.0840	0.21592
0.44	0.50662	0.50710	0.9892	0.25674
0.48	-0.63689	+0.45319	+0.8880	+0.27882

ψ	E	F	ξ	η
0.52	-0.76100	+0.40322	+0.7838	+0.28568
0.56	0.87966	0.35790	0.6787	0.28169
0.60	0.99166	0.31789	0.5752	0.27055
0.64	1.09771	0.28369	0.4741	0.25593
0.68	1.19845	0.25569	0.3758	0.24078
0.72	1.29468	0.23413	0.2801	0.22733
0.76	1.38740	0.21915	0.1868	0.21720
0.80	1.47764	0.21082	0.0951	0.21147
0.84	1.56651	0.20918	+0.0044	0.21071
0.88	1.65516	0.21422	-0.0862	0.21509
0.92	1.74473	0.22591	0.1775	0.22472
0.96	-1.83632	+0.24420	-0.2703	+0.23798

Bahn 17.
 $\eta_0 = +1.7449$

t	ξ	η	t	ξ	η
0.0	0.00000	+1.74490	3.0	+0.03267	+1.65458
0.2	+0.00367	1.74686	3.2	+0.01299	1.63706
0.4	0.00818	1.74850	3.4	-0.01326	1.61996
0.6	0.01350	1.74965	3.6	0.04652	1.60443
0.8	0.01955	1.75009	3.8	0.08698	1.59182
1.0	0.02618	1.74961	4.0	0.13450	1.58375
1.2	0.03317	1.74795	4.2	0.18843	1.58203
1.4	0.04022	1.74488	4.4	0.24753	1.58860
1.6	0.04691	1.74017	4.6	0.30984	1.60553
1.8	0.05277	1.73364	4.8	0.37247	1.63489
2.0	0.05719	1.72515	5.0	0.43156	1.67864
2.2	0.05953	1.71461	5.2	0.48222	1.73854
2.4	0.05904	1.70208	5.4	0.51873	1.81581
2.6	0.05493	1.68765	5.6	0.53480	1.91082
2.8	+0.04641	+1.67167	5.8	-0.52389	+2.02264

t	ξ	η	t	ξ	η
6.0	-0.47971	+2.14856	8.8	+3.14992	+1.02275
6.2	0.39652	2.28397	9.0	3.22836	0.57582
6.4	0.26979	2.42207	9.2	3.21832	+0.12953
6.6	-0.09663	2.55417	9.4	3.12109	-0.29197
6.8	+0.12366	2.67002	9.6	2.94500	0.66443
7.0	0.38922	2.75853	9.8	2.70544	0.96550
7.2	0.69522	2.80810	10.0	2.42421	1.17656
7.4	1.03383	2.80792	10.2	2.12813	1.28389
7.6	1.39417	2.74857			
7.8	1.76262	2.62304	10.3	1.98384	1.29581
8.0	2.12344	2.42766	10.4	1.84726	1.27895
8.2	2.45945	2.16264	10.5	1.72230	1.23272
8.4	2.75317	1.83288	10.6	+1.61279	-1.15648
8.6	+2.98805	+1.44807			

ψ	E	F	ξ	η
0.00	+0.68527	+1.36363	+1.61279	-1.15648
0.02	0.68104	1.31144	1.54646	1.08355
0.04	0.66774	1.26036	1.49597	1.00414
0.06	0.64627	1.21072	1.45847	0.92074
0.08	0.61745	1.16275	1.43153	0.83545
0.10	0.58206	1.11658	1.41280	0.74962
0.12	0.54081	1.07231	1.39926	0.66410
0.16	0.44330	0.98940	1.38274	0.49709
0.20	0.32964	0.91352	1.36916	0.33858
0.24	0.20397	0.84363	1.34887	0.19190
0.28	+0.07001	0.77854	1.31545	-0.06013
0.32	-0.06884	0.71718	1.26538	+0.05365
0.36	0.20956	0.65881	1.19819	0.14715
0.40	0.34952	0.60319	1.11574	0.21931
0.44	-0.48654	+0.55048	+1.02131	+0.27058

ψ	E	F	ξ	η
0.48	— 0.61897	+ 0.50119	+ 0.91894	+ 0.30311
0.52	0.74568	0.45599	0.81234	0.32020
0.56	0.86606	0.41561	0.70458	0.32579
0.60	0.97997	0.38067	0.59790	0.32383
0.64	1.08764	0.35167	0.49360	0.31788
0.68	1.18960	0.32895	0.39234	0.31088
0.72	1.28662	0.31273	0.29419	0.30511
0.76	1.37960	0.30310	0.19883	0.30216
0.80	1.46956	0.30008	0.10563	0.30305
0.84	1.55757	0.30365	+ 0.01384	0.30834
0.88	1.64473	0.31376	— 0.07754	0.31805
0.92	1.73212	0.33034	0.16986	0.33201
0.96	— 1.82083	+ 0.35332	— 0.26304	+ 0.34949

Bahn 18.

$$\eta_0 = + 1.7451$$

t	ξ	η	t	ξ	η
0.0	0.00000	+ 1.74510	2.8	+ 0.04703	+ 1.67074
0.2	+ 0.00373	1.74709	3.0	0.03310	1.65340
0.4	0.00831	1.74876	3.2	+ 0.01311	1.63561
0.6	0.01371	1.74993	3.4	— 0.01354	1.61827
0.8	0.01986	1.75038	3.6	0.04731	1.60253
1.0	0.02659	1.74988	3.8	0.08838	1.58975
1.2	0.03369	1.74819	4.0	0.13662	1.58158
1.4	0.04084	1.74506	4.2	0.19137	1.57983
1.6	0.04763	1.74028	4.4	0.25140	1.58650
1.8	0.05356	1.73365	4.6	0.31469	1.60369
2.0	0.05805	1.72502	4.8	0.37832	1.63348
2.2	0.06041	1.71433	5.0	0.43832	1.67791
2.4	0.05990	1.70159	5.2	0.48975	1.73873
2.6	+ 0.05573	+ 1.68697	5.4	— 0.52679	+ 1.81716

t	ξ	η	t	ξ	η
5.6	-0.54300	+1.91357	8.2	+2.48901	+2.16569
5.8	0.53189	2.02703	8.4	2.78602	1.83108
6.0	0.48696	2.15478	8.6	3.02365	1.44068
6.2	0.40252	2.29207	8.8	3.18766	1.00912
6.4	0.27396	2.43207	9.0	3.26776	0.55530
6.6	-0.09837	2.56590	9.2	3.25892	+0.10135
6.8	+0.12488	2.68319	9.4	3.16250	-0.32877
7.0	0.39395	2.77258	9.6	2.98690	0.71130
7.2	0.70392	2.82244	9.8	2.74736	1.02453
7.4	1.04676	2.82176	10.0	2.46540	1.25072
7.6	1.41146	2.76104	10.2	2.16716	1.37756
7.8	1.78427	2.63329	10.4	1.88186	1.39842
8.0	+2.14921	+2.43473	10.6	+1.63971	-1.31156

ψ	E	F	ξ	η
0.00	+0.73151	+1.42716	+1.63971	-1.31156
0.02	0.73661	1.37600	1.55989	1.24497
0.04	0.73167	1.32588	1.49972	1.16918
0.06	0.71761	1.27725	1.45607	1.08762
0.08	0.69534	1.23043	1.42620	1.00279
0.10	0.66569	1.18566	1.40720	0.91630
0.12	0.62944	1.14312	1.39655	0.82938
0.14	0.58728	1.10287	1.39219	0.74273
0.16	0.53987	1.06493	1.39187	0.65690
0.20	0.43166	0.99584	1.39713	0.48900
0.24	0.30912	0.93506	1.40029	0.32778
0.28	0.17613	0.88150	1.39249	0.17525
0.32	+0.03618	0.83396	1.36745	-0.03379
0.36	-0.10751	0.79147	1.32227	+0.09408
0.40	0.25203	0.75348	1.25654	0.20619
0.44	-0.39480	+0.71988	+1.17276	+0.30142

ψ	E	F	ξ	η
0.48	— 0.53368	+ 0.69097	+ 1.07478	+ 0.38015
0.52	0.66695	0.66727	0.96722	0.44408
0.56	0.79339	0.64942	0.85458	0.49610
0.60	0.91222	0.63796	0.74081	0.53942
0.64	1.02308	0.63325	0.62869	0.57747
0.68	1.12592	0.63545	0.52021	0.61300
0.72	1.22098	0.64450	0.41640	0.64826
0.76	1.30863	0.66016	0.31773	0.68495
0.80	1.38937	0.68204	0.22405	0.72407
0.84	1.46372	0.70964	0.13493	0.76628
0.88	1.53219	0.74242	+ 0.04973	0.81192
0.92	1.59526	0.77978	— 0.03228	0.86100
0.96	1.65328	0.82110	0.11177	0.91340
1.00	1.70656	0.86576	0.18932	0.96906
1.04	1.75524	0.91313	0.26531	1.02767
1.08	1.79935	0.96263	0.33992	1.08925
1.12	1.83880	1.01368	0.41292	1.15374
1.16	1.87332	1.06573	0.48374	1.22117
1.20	1.90253	1.11832	0.55146	1.29194
1.24	1.92590	1.17104	0.61461	1.36670
1.28	1.94272	1.22358	0.67113	1.44643
1.32	1.95215	1.27573	0.71840	1.53246
1.36	1.95315	1.32738	0.75298	1.62641
1.40	1.94444	1.37851	0.77032	1.73028
1.44	1.92449	1.42918	0.76456	1.84608
1.48	1.89145	1.47941	0.72780	1.97523
1.52	1.84309	1.52911	0.64990	2.11767
1.56	1.77688	1.57789	0.51683	2.27005
1.60	1.69015	1.62485	0.31404	2.42300
1.64	— 1.58047	+ 1.66826	— 0.02658	+ 2.55706

Bahn 19.
 $\eta_0 = + 1.745115$

t	ξ	η	t	ξ	η
0.000	0.00000	+ 1.74512	4.000	- 0.13581	+ 1.58114
0.125	+ 0.00223	1.74639	4.125	0.16935	1.57904
0.250	0.00479	1.74757	4.250	0.20521	1.57992
0.375	0.00768	1.74859	4.375	0.24301	1.58428
0.500	0.01089	1.74943	4.500	0.28225	1.59263
0.625	0.01440	1.75004	4.625	0.32229	1.60549
0.750	0.01821	1.75035	4.750	0.36236	1.62336
0.875	0.02227	1.75033	4.875	0.40151	1.64676
1.000	0.02652	1.74990	5.000	0.43864	1.67617
1.125	0.03093	1.74902	5.125	0.47249	1.71199
1.250	0.03541	1.74761	5.250	0.50168	1.75459
1.375	0.03988	1.74563	5.375	0.52468	1.80419
1.500	0.04424	1.74300	5.500	0.53994	1.86092
1.625	0.04838	1.73969	5.625	0.54581	1.92464
1.750	0.05217	1.73565	5.750	0.54068	1.99502
1.875	0.05546	1.73083	5.875	0.52295	2.07143
2.000	0.05809	1.72522	6.000	0.49113	2.15294
2.125	0.05991	1.71880	6.125	0.44382	2.23831
2.250	0.06072	1.71157	6.250	0.37982	2.32595
2.375	0.06034	1.70355	6.375	0.29815	2.41397
2.500	0.05858	1.69476	6.500	0.19812	2.50017
2.625	0.05522	1.68528	6.625	- 0.07934	2.58210
2.750	0.05007	1.67518	6.750	+ 0.05817	2.65712
2.875	0.04294	1.66457	6.875	0.21402	2.72245
3.000	0.03362	1.65359	7.000	0.38735	2.77523
3.125	0.02195	1.64243	7.125	0.57684	2.81259
3.250	+ 0.00775	1.63129	7.250	0.78069	2.83179
3.375	- 0.00912	1.62041	7.375	0.99663	2.83022
3.500	0.02877	1.61008	7.500	1.22193	2.80557
3.625	0.05126	1.60061	7.625	1.45341	2.75586
3.750	0.07663	1.59236	7.750	1.68753	2.67957
3.875	- 0.10484	+ 1.58573	7.875	+ 1.92039	+ 2.57567

t	ξ	η	t	ξ	η
8.000	+ 2.14787	+ 2.44376	9.125	+ 3.28684	+ 0.27433
8.125	2.36568	2.28408	9.250	3.25873	— 0.00725
8.250	2.56947	2.09757	9.375	3.19670	0.27758
8.375	2.75497	1.88592	9.500	3.10285	0.53083
8.500	2.91810	1.65158	9.625	2.98034	0.76151
8.625	3.05511	1.39772	9.750	2.83338	0.96458
8.750	3.16273	1.12826	9.875	2.66705	1.13563
8.875	3.23832	0.84774	10.000	+ 2.48726	— 1.27107
9.000	+ 3.28001	+ 0.56125			

ψ	E	F	ξ	η
0.00	+ 0.49989	+ 1.70218	+ 2.48726	— 1.27107
0.02	0.57621	1.65722	2.27890	1.37690
0.04	0.63821	1.60948	2.08829	1.42992
0.06	0.68624	1.55977	1.92170	1.44077
0.08	0.72093	1.50892	1.78146	1.41938
0.10	0.74312	1.45768	1.66735	1.37458
0.12	0.75375	1.40673	1.57766	1.31324
0.14	0.75380	1.35669	1.50953	1.24077
0.16	0.74424	1.30802	1.45990	1.16124
0.18	0.72599	1.26113	1.42571	1.07749
0.20	0.69993	1.21632	1.40397	0.99149
0.22	0.66686	1.17379	1.39216	0.90460
0.24	0.62753	1.13367	1.38777	0.81766
0.26	0.58262	1.09601	1.38879	0.73122
0.28	0.53272	1.06081	1.39329	0.64567
0.30	0.47844	1.02802	1.39958	0.56118
0.32	0.42030	0.99755	1.40613	0.47798
0.34	0.35881	0.96928	1.41167	0.39624
0.36	0.29445	0.94307	1.41497	0.31610
0.38	0.22768	0.91877	1.41510	0.23781
0.40	+ 0.15892	+ 0.89622	+ 1.41122	— 0.16159

ψ	E	F	ξ	η
0.42	+ 0.08860	+ 0.87530	+ 1.40261	— 0.08772
0.44	+ 0.01714	0.85589	1.38900	— 0.01653
0.46	— 0.05509	0.83787	1.36997	+ 0.05172
0.48	0.12771	0.82119	1.34550	0.11675
0.50	0.20038	0.80580	1.31576	0.17831
0.52	0.27275	0.79168	1.28091	0.23625
0.54	0.34453	0.77884	1.24146	0.29047
0.56	0.41541	0.76733	1.19778	0.34096
0.58	0.48515	0.75719	1.15050	0.38783
0.60	0.55352	0.74851	1.10032	0.43126
0.62	0.62029	0.74134	1.04773	0.47149
0.64	0.68530	0.73577	0.99344	0.50884
0.66	0.74839	0.73185	0.93792	0.54365
0.68	0.80944	0.72966	0.88186	0.57634
0.70	0.86835	0.72923	0.82562	0.60727
0.72	0.92504	0.73061	0.76972	0.63681
0.74	0.97944	0.73382	0.71445	0.66538
0.76	1.03150	0.73885	0.66019	0.79327
0.78	1.08122	0.74568	0.60716	0.72077
0.80	1.12857	0.75426	0.55557	0.74818
0.82	1.17355	0.76456	0.50557	0.77572
0.84	1.21617	0.77650	0.45727	0.80356
0.86	1.25645	0.79001	0.41080	0.83193
0.88	1.29438	0.80499	0.36619	0.86085
0.90	1.32998	0.82134	0.32355	0.89037
0.92	1.36327	0.83894	0.28290	0.92064
0.94	1.39426	0.85767	0.24427	0.95170
0.96	1.42296	0.87739	0.20772	0.98350
0.98	1.44938	0.89796	0.17332	1.01602
1.00	1.47352	0.91923	0.14113	1.04922
1.02	1.49538	0.94103	0.11124	1.08310
1.04	1.51496	0.96322	0.08376	1.11749
1.06	1.53227	0.98561	0.05879	1.15225
1.08	— 1.54731	+ 1.00804	+ 0.03646	+ 1.18730

ψ	E	F	ξ	η
1.10	— 1.56008	+ 1.03031	+ 0.01692	+ 1.22242
1.12	1.57059	1.05225	+ 0.00034	1.25747
1.14	1.57887	1.07365	— 0.01318	1.29203
1.16	1.58493	1.09432	0.02347	1.32607
1.18	1.58882	1.11408	0.03041	1.35904
1.20	1.59061	1.13272	0.03392	1.39066
1.22	1.59038	1.15007	0.03402	1.42066
1.24	1.58824	1.16593	0.03070	1.44844
1.26	1.58432	1.18015	0.02408	1.47366
1.28	1.57879	1.19255	0.01438	1.49599
1.30	1.57182	1.20297	— 0.00185	1.51484
1.32	1.56362	1.21130	+ 0.01312	1.52999
1.34	— 1.55443	+ 1.21742	+ 0.03010	+ 1.54104

Bahn 20.
 $\eta_0 = + 1.7452$

t	ξ	η	t	ξ	η
0.0	0.00000	+ 1.74520	2.8	+ 0.04751	+ 1.67026
0.2	+ 0.00376	1.74720	3.0	0.03345	1.65276
0.4	0.00837	1.74889	3.2	+ 0.01331	1.63481
0.6	0.01382	1.75007	3.4	— 0.01355	1.61729
0.8	0.02002	1.75053	3.6	0.04761	1.60138
1.0	0.02681	1.75002	3.8	0.08903	1.58844
1.2	0.03397	1.74832	4.0	0.13771	1.58014
1.4	0.04117	1.74518	4.2	0.19298	1.57831
1.6	0.04802	1.74036	4.4	0.25363	1.58497
1.8	0.05401	1.73368	4.6	0.31759	1.60221
2.0	0.05854	1.72498	4.8	0.38194	1.63219
2.2	0.06093	1.71421	5.0	0.44269	1.67690
2.4	0.06043	1.70136	5.2	0.49478	1.73820
2.6	+ 0.05623	+ 1.68662	5.4	— 0.53237	+ 1.81734

t	ξ	η	t	ξ	η
5.6	-0.54901	+1.91467	8.2	+2.50957	+2.17004
5.8	0.53801	2.02927	8.4	2.80944	1.83207
6.0	0.49288	2.15835	8.6	3.04961	1.43768
6.2	0.40782	2.29712	8.8	3.21582	1.00147
6.4	0.27822	2.43863	9.0	3.29769	0.54235
6.6	-0.10114	2.57389	9.2	3.29028	+0.08240
6.8	+0.12410	2.69246	9.4	3.19477	-0.35468
7.0	0.39557	2.78279	9.6	3.01970	0.74525
7.2	0.70829	2.83321	9.8	2.78009	1.06819
7.4	1.05422	2.83254	10.0	2.49710	1.30622
7.6	1.42219	2.77127	10.2	2.19645	1.44797
7.8	1.79835	2.64228	10.4	1.90647	1.48761
8.0	+2.16660	+2.44175	10.6	+1.65664	-1.42532

ψ	E	F	ξ	η
0.00	+0.76299	+1.47121	+1.65664	-1.42532
0.02	0.77544	1.42087	1.56470	1.36447
0.04	0.77711	1.37148	1.49538	1.29290
0.06	0.76900	1.32356	1.44543	1.21372
0.08	0.75205	1.27751	1.41183	1.13021
0.10	0.72715	1.23367	1.39142	1.04448
0.12	0.69511	1.19225	1.38160	0.95782
0.14	0.65668	1.15340	1.37990	0.87098
0.16	0.61256	1.11721	1.38413	0.78457
0.18	0.56337	1.08368	1.39245	0.69884
0.20	0.50970	1.05279	1.40300	0.61397
0.22	0.45208	1.02445	1.41432	0.53000
0.24	0.39102	0.99857	1.42510	0.44705
0.28	0.26050	0.95362	1.43993	0.28459
0.32	+0.12174	0.91683	1.43983	-0.12761
0.36	-0.02194	+0.88721	+1.41974	+0.02212

ψ	E	F	ξ	η
0.40	-0.16742	+0.86408	+1.37760	+0.16258
0.44	0.31185	0.84722	1.31427	0.29217
0.48	0.45265	0.83680	1.23297	0.41021
0.52	0.58755	0.83328	1.13837	0.51725
0.56	0.71462	0.83719	1.03590	0.61501
0.60	0.83231	0.84899	0.93070	0.70600
0.64	0.93933	0.86885	0.82752	0.79294
0.68	1.03467	0.89656	0.73023	0.87826
0.72	1.11746	0.93155	0.64216	0.96396
0.76	1.18694	0.97280	0.56611	1.05117
0.80	1.24236	1.01889	0.50499	1.14018
0.84	1.28303	1.06799	0.46165	1.23011
0.88	1.30832	1.11787	0.43920	1.31894
0.92	-1.31783	+1.16592	+0.44055	+1.40252

Bahn 21.

$$\eta_0 = +1.746$$

(Forts. zu Publ. 61).

ψ	E	F	ξ	η
0.26	+0.67385	+1.28171	+1.51610	-1.03748
0.28	0.62277	1.29863	1.59900	0.98907
0.30	0.57226	1.32191	1.68823	0.94336
0.32	0.52338	1.35189	1.78575	0.90116
0.34	0.47440	1.38913	1.89217	0.87418
0.36	0.43591	1.43432	2.01019	0.83576
0.38	0.40100	1.48840	2.14320	0.82054
0.40	0.37547	1.55259	2.29584	0.82730
0.42	0.36326	1.62856	2.47372	0.87060
0.44	+0.37018	+1.71858	+2.68300	-0.97634

Bahn 22.

$$\eta_0 = +1.7473$$

t	ξ	η	t	ξ	η
0.0	0.00000	+ 1.74730	6.4	- 0.33605	+ 2.55144
0.2	+ 0.00436	1.74962	6.6	- 0.13247	2.70810
0.4	0.00971	1.75158	6.8	+ 0.12619	2.84454
0.6	0.01602	1.75294	7.0	0.43736	2.94731
0.8	0.02321	1.75347	7.2	0.79515	3.00296
1.0	0.03108	1.75292	7.4	1.18997	2.99874
1.2	0.03938	1.75091	7.6	1.60904	2.92391
1.4	0.04773	1.74726	7.8	2.03644	2.77060
1.6	0.05567	1.74168	8.0	2.45409	2.53467
1.8	0.06260	1.73393	8.2	2.84254	2.21662
2.0	0.06785	1.72385	8.4	3.18237	1.82188
2.2	0.07061	1.71135	8.6	3.45547	1.36092
2.4	0.07002	1.69646	8.8	3.64657	0.84898
2.6	0.06513	1.67934	9.0	3.74474	+ 0.30523
2.8	0.05501	1.66036	9.2	3.74419	- 0.24878
3.0	0.03868	1.64002	9.4	3.64524	0.79039
3.2	+ 0.01529	1.61914	9.6	3.45443	1.29802
3.4	- 0.01593	1.59875	9.8	3.18243	1.75263
3.6	0.05555	1.58018	10.0	2.84610	2.13917
3.8	0.10382	1.56504	10.2	2.46396	2.44754
4.0	0.16062	1.55523	10.4	2.05607	2.67288
4.2	0.22530	1.55286	10.6	1.64252	2.81553
4.4	0.29644	1.56027	10.8	1.24177	2.88057
4.6	0.37171	1.57987	11.0	0.86985	2.87702
4.8	0.44761	1.61416	11.2	0.53948	2.81687
5.0	0.51943	1.66555	11.4	0.25965	2.71390
5.2	0.58119	1.73626	11.6	+ 0.03549	2.58273
5.4	0.62601	1.82790	11.8	- 0.13169	2.43765
5.6	0.64631	1.94106	12.0	0.24406	2.29164
5.8	0.63441	2.07458	12.2	0.30670	2.15574
6.0	0.58286	2.22517	12.4	0.32713	2.03855
6.2	- 0.48513	+ 2.38690	12.6	- 0.31469	- 1.94615

t	ξ	η	t	ξ	η
12.8	— 0.27960	— 1.88214	14.0	— 0.17062	— 2.05776
13.0	0.23275	1.84806	14.2	0.24701	2.14044
13.2	0.18485	1.84353	14.4	0.36302	2.21842
13.4	0.14604	1.86653	14.6	0.51818	2.28180
13.6	0.12563	1.91355	14.8	— 0.70916	— 2.32039
13.8	— 0.13168	— 1.97948			

Bahn 23.
 $\eta_0 = 1.74748$

t	ξ	η	t	ξ	η
0.0	0.00000	+ 1.74748	4.2	— 0.22736	+ 1.55087
0.2	+ 0.00441	1.74983	4.4	0.29930	1.55824
0.4	0.00982	1.75181	4.6	0.37544	1.57792
0.6	0.01620	1.75318	4.8	0.45229	1.61241
0.8	0.02346	1.75372	5.0	0.52503	1.66417
1.0	0.03142	1.75312	5.2	0.58766	1.73542
1.2	0.03980	1.75112	5.4	0.63320	1.82788
1.4	0.04823	1.74744	5.6	0.65400	1.94211
1.6	0.05625	1.74180	5.8	0.64232	2.07697
1.8	0.06325	1.73398	6.0	0.59062	2.22912
2.0	0.06855	1.72380	6.2	0.49228	2.39260
2.2	0.07134	1.71118	6.4	0.34211	2.55894
2.4	0.07075	1.69615	6.6	— 0.13689	2.71739
2.6	0.06584	1.67888	6.8	+ 0.12391	2.85541
2.8	0.05563	1.65970	7.0	0.43777	2.95947
3.0	0.03918	1.63917	7.2	0.79865	3.01590
3.2	+ 0.01558	1.61807	7.4	1.19700	3.01188
3.4	— 0.01592	1.59745	7.6	1.61981	2.93657
3.6	0.05590	1.57866	7.8	2.05111	2.78198
3.8	0.10463	1.56331	8.0	2.47263	2.54393
4.0	— 0.16201	+ 1.55335	8.2	+ 2.86480	+ 2.22291

t	ξ	η	t	ξ	η
8.4	+ 3.20802	+ 1.82428	12.6	- 0.55555	- 1.94575
8.6	3.48406	1.35855	12.8	0.53101	1.84592
8.8	3.67751	0.84107	13.0	0.48569	1.77015
9.0	3.77725	+ 0.29083	13.2	0.42808	1.71809
9.2	3.77736	- 0.27042	13.4	0.36619	1.68812
9.4	3.67798	0.82012	13.6	0.30693	1.67784
9.6	3.48505	1.33659	13.8	0.25611	1.68421
9.8	3.20992	1.80072	14.0	0.21821	1.70368
10.0	2.86812	2.19730	14.2	0.19664	1.73232
10.2	2.47810	2.51591	14.4	0.19348	1.76574
10.4	2.05969	2.75128	14.6	0.20961	1.79942
10.6	1.63261	2.90320	14.8	0.24456	1.82861
10.8	1.21523	2.97608	15.0	0.29653	1.84860
11.0	0.82366	2.97825	15.2	0.36231	1.85482
11.2	0.47076	2.92095	15.4	0.43726	1.84312
11.4	+ 0.16603	2.81726	15.6	0.51538	1.80981
11.6	- 0.08481	2.68123	15.8	0.58933	1.75199
11.8	0.27954	2.52660	16.0	0.65044	1.66735
12.0	0.41919	2.36606	16.2	0.68888	1.55420
12.2	0.50754	2.21050	16.4	0.69379	1.41065
12.4	- 0.55053	- 2.06843	16.6	- 0.65361	- 1.23340

Bahn 24.

$$\eta_0 = + 1.752$$

(Forts. zu Publ. 64).

t	ξ	η	t	ξ	η
11.4	- 2.16324	- 4.48347	12.4	- 4.62024	- 1.40955
11.6	2.86370	4.05416	12.6	4.73404	- 0.63047
11.8	3.47678	3.51228	12.8	4.70942	+ 0.14388
12.0	3.98337	2.87600	13.0	4.55208	0.88643
12.2	- 4.36816	- 2.16690	13.2	- 4.27331	+ 1.57283

t	ξ	η	t	ξ	η
13.4	- 3.88942	+ 2.18201	14.6	- 0.62184	+ 3.66020
13.6	3.42064	2.69741	14.8	- 0.12307	3.56100
13.8	2.88996	3.10731	15.0	+ 0.31726	3.39331
14.0	2.32155	3.40628	15.2	0.69032	3.17388
14.2	1.73947	3.59400	15.4	+ 0.99120	+ 2.91986
14.4	- 1.16621	+ 3.67552			

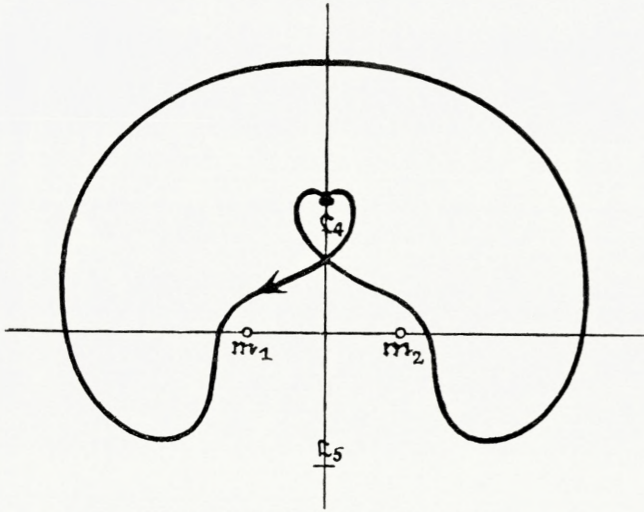


Fig. 1. η_0 etwas grösser als 1.72025.

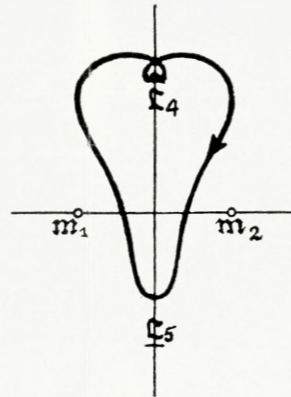


Fig. 2. η_0 sehr nahe = 1.7008.

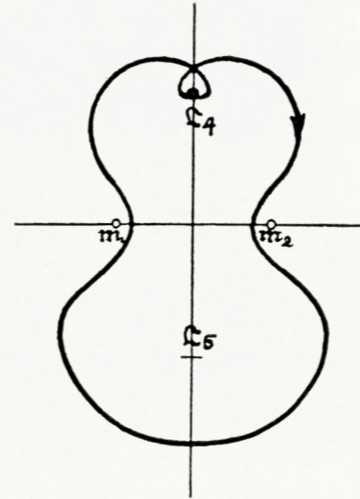


Fig. 3. η_0 zwischen 1.7370 und 1.7375.

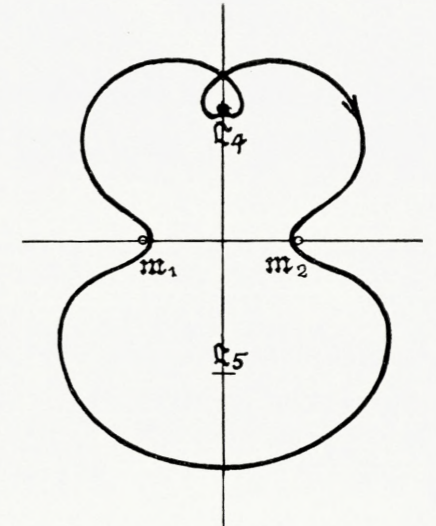


Fig. 4. η_0 sehr nahe = 1.7392.

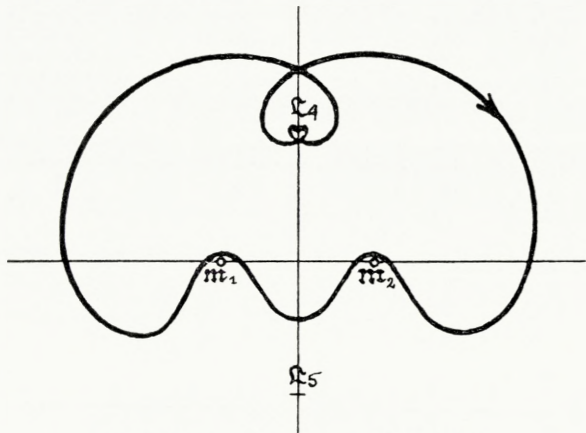


Fig. 5. η_0 sehr nahe = 1.74427.

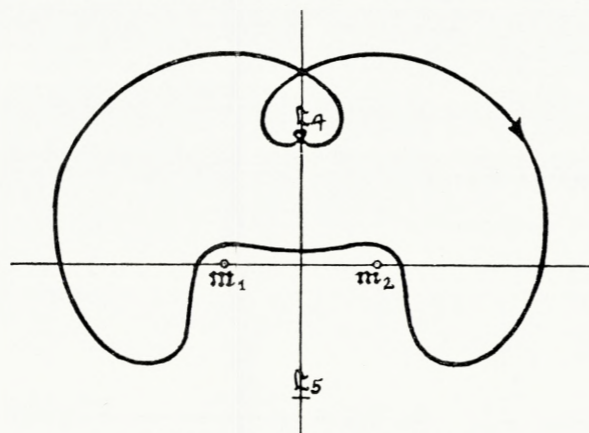


Fig. 6. η_0 sehr nahe = 1.74484.

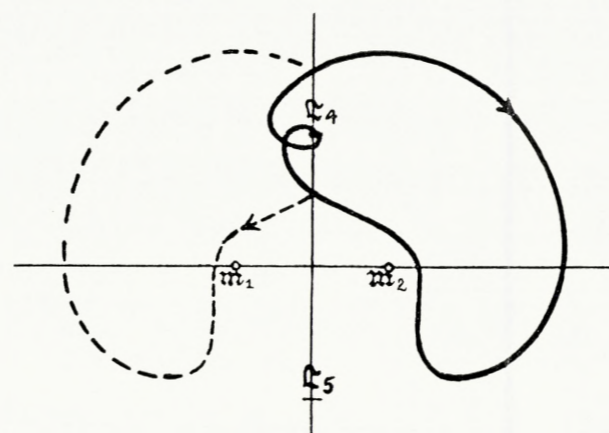


Fig. 7—8. η_0 zwischen 1.745100 und 1.745115 (rechts) und zwischen 1.7200 und 1.7202 (links).

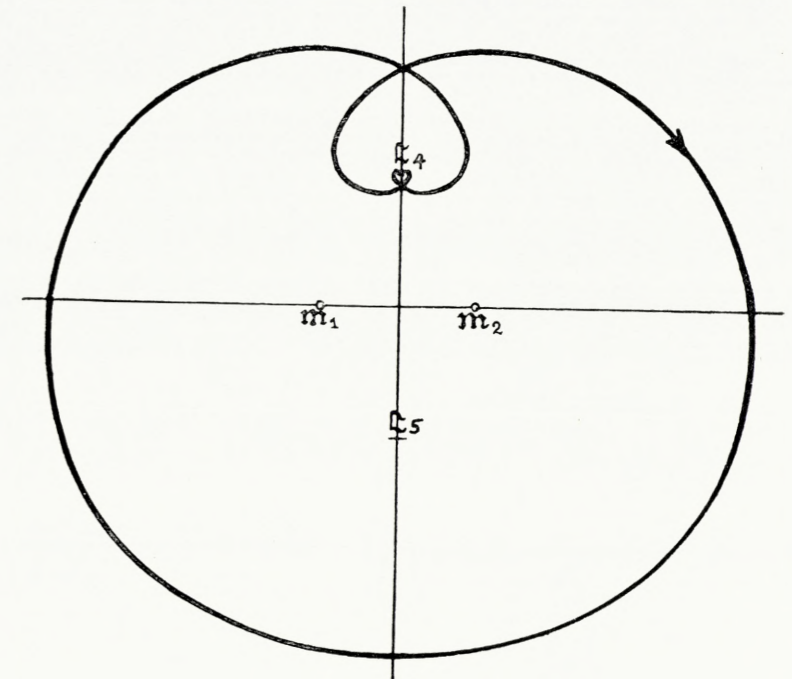
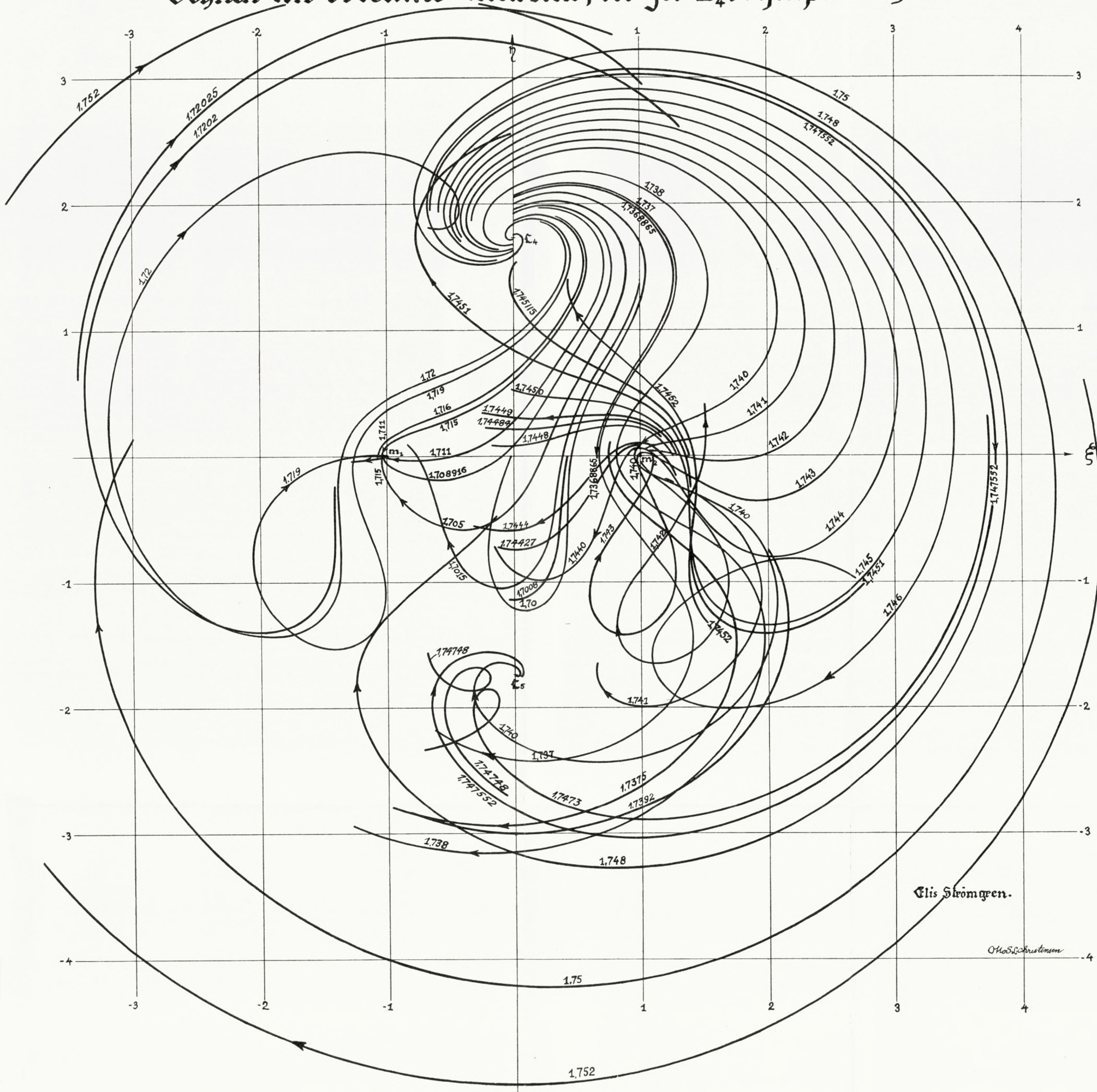


Fig. 9. η_0 zwischen 1.750 und 1.752.

Bahnen im Probleme Restreint, die zu C_4 asymptotisch sind.



Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.

Mathematisk-fysiske Meddelelser. **X**, 8.

STUDIES OF CELLS WITH LIQUID- LIQUID JUNCTIONS

PART III.

CELLS WITH A BRIDGE OF CONCENTRATED POTASSIUM CHLORIDE

BY

A. UNMACK AND E. A. GUGGENHEIM



KØBENHAVN

HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL

BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI A/S

1930

In a recent paper BJERRUM and UNMACK¹ have published the results of measurements, extending over several years of numerous cells of the type



in which the solution S was either dilute hydrochloric acid, dilute alkali or a Sørensen buffer mixture, in each case made up to various total salt concentrations by the addition of alkaline chloride. The reproducibility of the E. M. F. measured varied from one or two tenths of a millivolt for most of the buffer solutions to about half a millivolt for some of the solutions of hydrochloric acid. For the latter cells this uncertainty was undoubtedly due to the non-reproducibility of the liquid-liquid junction. As, at the time these measurements were made, it was not known what factors determined the stability of the E. M. F. of cells with liquid-liquid junctions, all measurements were for the sake of consistency made as quickly as possible after making the junction.

Since the completion of these measurements a study has been made in the same laboratory by GUGGENHEIM² of the conditions for both the reproducibility and the stability of cells with liquid-liquid junctions. In these measure-

¹ BJERRUM and UNMACK, Kgl. Danske Vid. Selsk., Mat.-fys. Med. **9** (1) 1929.

² GUGGENHEIM J. A. C. S. **52** 1315 1930.

ments it was found convenient to use a calomel electrode in tenth normal hydrochloric acid and no special precautions were taken for the exclusion of air. For this reason the absolute values of the E.M.F.s measured are uncertain, although the conclusions regarding stability and reproducibility hold good because the electrodes used agreed amongst themselves.

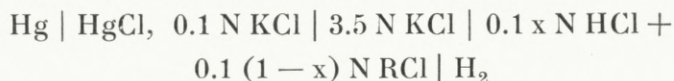
It seemed to us that it would be of interest to make some new measurements of the type of BJERRUM and UNMACK's in the light of GUGGENHEIM's conclusions and so find out to what extent, if any, the E. M. F. values are effected.

In BJERRUM and UNMACK's measurements the junction was made by dipping the side-tube of the hydrogen electrode vessel into a U-tube containing 3.5 N KCl, and in order to avoid contamination of the bridge solution, the liquid levels were so adjusted that on opening the tap between the electrode and the side-tube there was always an upward flow of liquid into the side-tube. Thus the junction was within the side-tube and not at its tip and so there was a fair approach to the cylindrical symmetry which GUGGENHEIM found to be such an important factor contributing not only to reproducibility but also to stability. In the present measurements the junction was made in the same manner except that extra care was exercised to get the junction about half way up the side-tube, so as more perfectly to obtain the desired cylindrical symmetry. It was found that the initial values of the E. M. F. agreed with those previously recorded by BJERRUM and UNMACK within their experimental uncertainty of several tenths of a millivolt, occasionally as much as half a millivolt. The E. M. F. however generally changed to the extent of a few tenths of a millivolt in the first fifteen to thirty minutes but always reached a steady

value reproducible to about one tenth of a millivolt and stable for a whole day. The sharper the initial junction the quicker was the steady state reached; the theoretical explanation of this has been given by GUGGENHEIM. In a large number of cases the junction was also made by means of the apparatus designed by GUGGENHEIM for making the junction which he calls of the "free diffusion type". For details of the various types of reproducible junctions the original paper must be referred to.¹ In all such cases the steady values obtained by the two arrangements agreed to within about one tenth of a millivolt. It is these stable reproducible values that are here recorded, as opposed to the initial values previously recorded by BJERRUM and UNMACK. It thus appears possible to obtain reproducibility and stability with a considerably simpler arrangement than GUGGENHEIM'S.

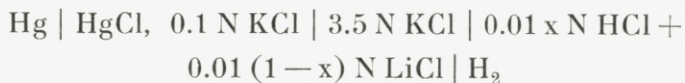
By way of contrast we made a few measurements with junctions in which cylindrical symmetry was deliberately avoided by making the junction where a narrow tube joined a wider one. There was no sign of stability and the E. M. F. values recorded were erratic to the extent of several millivolts.

The cells chosen for study may conveniently be divided into two classes A and B. The former were all of the type



where R denotes an alkali metal and x was varied from 0.05 to 1.00. This series was particularly suitable for comparison with BJERRUM and UNMACK'S measurements and for determining the reproducibility and stability of the liquid-liquid junction. The cells of class B were all of the type

¹ GUGGENHEIM J. A. C. S. 52 1315 1930.



were x was varied from 0.10 to 1.00. In these cells we may safely assume that any uncertainty due to the liquid-liquid junction will be no greater than in the type A cells and the accuracy is determined by the care in the preparation of the hydrogen electrode solutions. The primary object of these latter measurements was so far as possible to compare the observed values with those calculated theoretically. Why a similar calculation for cells of class A is not possible to the same degree of accuracy will be clear later.

For the hydrogen electrode solutions ordinary distilled water was used in the type A experiments, but conductivity water (specific conductivity less than $10^{-6} \text{ ohm}^{-1} \text{ cms}^{-1}$) for all the type B experiments. In all cases the hydrogen ion concentration was checked by titration. The hydrogen was prepared by electrolysis of a potassium hydroxide solution and freed from oxygen by passage over palladium at 300°C .

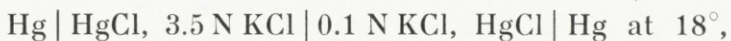
The calomel electrodes were prepared according to the directions of GJALDBAEK¹, the calomel being made by precipitation from mercurous nitrate and hydrochloric acid. The potassium chloride was fused before weighing and the chloride content of the 0.1 N KCl solution checked gravimetrically. Ordinary distilled water was used.

We always had in use about ten calomel electrodes prepared at various times. The greatest deviation found at any time between two electrodes was about 0.3 millivolts. There was no definite systematic difference between freshly prepared and old electrodes. All measurements were there-

¹ GJALDBAEK, Kgl. Danske Vid. Selsk., Mat -fys. Med. **5** (9) 1924.

fore corrected to correspond to the mean of the calomel electrodes. The probable error due to the calomel electrodes is thus not more than ± 0.15 millivolts.

We also prepared a number of Hg|HgCl, 3.5 N KCl electrodes and in agreement with BJERRUM and UNMACK found these to be less stable and slightly less reproducible than the Hg|HgCl, 0.1 N KCl electrodes. The E. M. F. found for the combination



as long as the left hand electrode was fairly newly prepared, was 83.1 ± 0.2 mv as compared with the values 83.13 found by GJALDBAEK¹ and 83.1 mv found by BJERRUM and UNMACK². The electrode vessels and electrical apparatus were the same as those used in the previous measurements³. All the measurements were made at 18.0°C . Incidentally it was discovered that the temperature regulation of the air-thermostat previously used by GUGGENHEIM was defective. It was by remedying this that we reduced the erratic fluctuations of the "free diffusion" measurements from about ± 0.25 mv to about ± 0.1 mv.⁴

The results of our measurements are recorded in table I. The first column gives the composition of the hydrogen electrode solution "S" and the second the value of E, the measured E. M. F. corrected to a hydrogen pressure of one atmosphere and to the mean of the calomel electrodes. Each cell was set up about five to ten times and readings taken over a period varying from two to twenty four

¹ loc. cit.

² loc. cit.

³ BJERRUM and UNMACK loc. cit.

⁴ cf. GUGGENHEIM loc. cit.

Table I.
 Hg | HgCl, 0.1 N KCl | 3.5 N KCl | Solution S | H₂ at 18° C.

Composition of S in moles litre ⁻¹	E and R. M. S. deviation in m. v.	$E - \frac{RT}{F} \log_e CH +$ in m. v.	$E_D + E_S$ in m. v.	E_D in m. v.	E_S in m. v.	$\frac{RT}{F} \log_e \frac{f^{(S)}_{RCl}}{f^{(HCl)}_{RCl}}$ in m. v.	$\frac{RT}{F} \log_e \frac{f^{(S)}_{HCl}}{f^{(HCl)}_{HCl}} - E_S$ in m. v.
Type A:							
.1000 HCl.....	-400.35 ± 0.25 ¹	-342.60	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
.0750 HCl + .0250 LiCl .	-406.95 ± 0.10	-342.00	+ 0.60	+ 1.10	- 0.50	- 0.01	..
.0500 HCl + .0500 LiCl .	-416.30 ± 0.07	-341.20	+ 1.40	+ 2.35	- 0.95	- 0.02	..
.0250 HCl + .0750 LiCl .	-432.60 ± 0.10	-340.10	+ 2.50	+ 3.80	- 1.30	- 0.03	..
.0100 HCl + .0900 LiCl .	-454.95 ± 0.10	-339.45	+ 3.15	+ 4.80	- 1.65	- 0.04	..
.0050 HCl + .0950 LiCl .	-471.95 ± 0.15	-339.10	+ 3.50	+ 5.20	- 1.70	- 0.04	..
.100 LiCl ²	-338.85	+ 3.75	+ 5.60	- 1.85	- 0.04	+ 1.77
.0500 HCl + .0500 NaCl.	-416.40 ± 0.10	-341.30	+ 1.30	+ 2.20	- 0.90	- 0.12	..
.0100 HCl + .0900 NaCl.	-455.30 ± 0.12	-339.80	+ 2.80	+ 4.55	- 1.75	- 0.22	..
.1000 NaCl ²	-339.35	+ 3.25	+ 5.30	- 2.05	- 0.24	+ 1.57

.0500 HCl + .0500 KCl ..	-416.85 ± 0.09	-341.75	+ 0.85	+ 2.10	- 1.25	- 0.25	..
.0100 HCl + .0900 KCl ..	-456.20 ± 0.07	-340.70	+ 1.90	+ 4.05	- 2.15	- 0.44	..
.1000 KCl ²	-340.40	+ 2.20	+ 4.70	- 2.50	- 0.49	+ 1.52
.0100 HCl + .0900 CsCl ..	-456.95 ± 0.08	-341.45	+ 1.15	+ 4.05	- 2.90	- 0.76	..
.1000 CsCl ²	-341.25	+ 1.35	+ 4.70	- 3.35	- 0.85	+ 1.65
Type B:							
.01000 HCl	-455.50 ± 0.07	-340.00	0.00	0.00	0.00
.00700 HCl + .00300 LiCl	-464.25 ± 0.05	-339.85	+ 0.15	+ 0.25	- 0.10
.00500 HCl + .00500 LiCl	-472.15 ± 0.08	-339.30	+ 0.70	+ 0.45	+ 0.25
.00100 HCl + .00900 LiCl	-511.50 ± 0.05	-338.30	+ 1.70	+ 0.80	+ 0.90
.01000 LiCl ²	-338.00	+ 2.00	+ 0.85	+ 1.15

¹ The cell where the solution S was .100 N HCl was measured at two periods several months apart. The values during each period agreed to within 0.10 millivolts. The somewhat larger R. M. S. deviation recorded is therefore presumably due to a change of 0.1 to 0.2 m. v. in the mean of the calomel electrodes during the interval and is not due to any difficulty in obtaining a satisfactory liquid-liquid junction.

² Values obtained by a slight extrapolation, vide Fig. 1.

hours. The values recorded are the mean of all readings, only excluding those in the first few minutes before the steady state was reached. The total number of readings for each cell varied from about 25 to about 150. The root mean square deviation of the individual readings from the mean is also recorded; the root mean square deviation, rarely exceeds one tenth of a millivolt. The values in the third column are obtained by subtracting from the measured E. M. F. $57.74 \log_{10} C_{H^+}$ millivolts¹ representing the effect of the hydrogen ion concentration on the E. M. F., salt effects being for the moment neglected. That the values in this column are not the same for all the cells is due partly to the liquid-liquid junction potential and partly to salt effects. These effects will be discussed in detail below and the remaining columns of the table explained. In Fig. 1 the values of $E - \frac{RT}{F} \log_e C_{H^+}$ have been plotted against the ratio of the hydrogen ion concentration to total cation

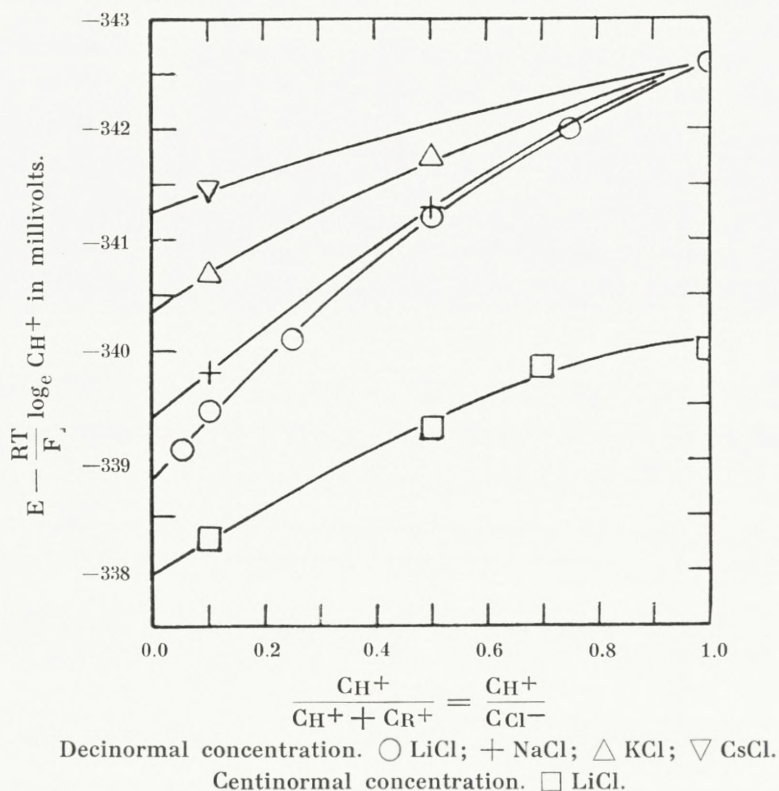
¹ The value 57.74×10^{-3} Int. Volts for $\frac{RT}{F} \log_e 10$ at 18°C. is obtained from the fundamental constants given in the *Handbuch der Physik*, Vol. II. In the *International Critical Tables* there is a slight inconsistency in the data:

- (1) 1.11800 mg Ag deposited per Int. Coulombs(a),
- (2) Atomic weight of Ag 107.880,
- (3) 1 Faraday = 96507 Int. Coulombs(a).

According to (1) and (2) 1 Faraday = 96494 Int. Coulombs(a). If we accept (1) and (2) and reject (3) the value obtained for $\frac{RT}{F} \log_e 10$ from the data of the *International Critical Tables* is identical with that given above. The true value of the fourth significant figure is not quite certain but for measurements, such as ours, confined to solutions containing HCl its effect on all computations fortunately corresponds to at most a tenth of a millivolt. Its effect is however appreciable on quantities obtained by combining measurements in alkaline solutions with measurements in acid solutions. For example the value of K_{H_2O} can be affected by about 1 to 2%.

or anion concentration. The regularity of the plots confirms the absence of any erratic fluctuations of more than 0.1 millivolts.

For a thermodynamic discussion of the significance of the E. M. F.s measured it is convenient to consider two of



the cells balanced against each other, the result being equivalent to the cell



It is well known that, if all mean activity coefficients were unity, the E. M. F. E' of such a cell containing only univalent ions could be written as

$$E' = E_{\text{E1}} + E_{\text{D}} \quad (1)$$

where E_{EI} denotes the difference in the "ideal" electrode potentials and E_D the "ideal" diffusion potential, these being given by

$$E_{EI} = \frac{RT}{F} \log_e \frac{C_{H^+}^{II}}{C_{H^+}^I} \quad (2)$$

and

$$E_D = -\frac{RT}{F} \int_I^{II} \sum_+ t_R d \log_e C_R + \frac{RT}{F} \int_I^{II} \sum_- t_X d \log_e C_X \quad (3)$$

where R denotes the gas constant, T the absolute temperature, F the Faraday, C_R , C_X the concentrations of each cation R and each anion X and t_R , t_X their transport numbers. \sum_+ , \sum_- denote summation for all cations or for all anions respectively. The integrals are to be evaluated through both transition layers from left to right. If the junctions are of the "continuous mixture type" the contribution of each junction to E_D is given by HENDERSON'S formula.¹ Even if the junction is of the "free diffusion type", HENDERSON'S formula will for the cells in question probably be accurate to within a few tenths of a millivolt.² Actually of course the mean activity coefficients of salts even in quite dilute solutions differ markedly from unity and so equation (1) is not applicable. It has been shown elsewhere that E' is given by the thermodynamically exact formula³

$$E' = E_{EI} + E_D + E_S \quad (4)$$

where E_{EI} and E_D are defined by equations (2) and (3), while E_S which may be called „the salt effect potential”, is given by

¹ HENDERSON Z. Ph. Ch. **59** 118 1907.

² GUGGENHEIM loc. cit.

³ GUGGENHEIM J. Ph. Ch. **34** 1930.

$$E_S = \frac{RT}{F} \int_I^{II} \sum_+ 2t_R d \log_e \frac{f_{HX}}{f_{RX}} + \frac{RT}{F} \int_I^{II} \sum_- 2t_X d \log_e f_{HX} \quad (5)$$

f_{RX} denoting the mean activity coefficient of the salt RX . It will be seen that E_S is a function of the mean activity coefficients of all the salts present throughout the cell and of the transport numbers of all the ions at all parts of the cell. It is not possible physically to split up E_S between the electrodes on the one hand and the liquid-liquid junction on the other. This important fact is closely related to the principle, first unambiguously stated by TAYLOR, that the conception of an individual ionic activity coefficient is thermodynamically undefined.¹

It is not unusual to compute hydrogen ion activities by the formula

$$E' = E_{E1} + \frac{RT}{F} \log_e \frac{f_{H^+}^{II}}{f_{H^+}^I} \quad (6.1)$$

or alternatively by the formula

$$E' = E_{E1} + E_D + \frac{RT}{F} \log_e \frac{f_{H^+}^{II}}{f_{H^+}^I}. \quad (6.2)$$

These are equivalent respectively to two different conventional definitions of f_{H^+} , namely

$$\frac{RT}{F} \log_e \frac{f_{H^+}^{II}}{f_{H^+}^I} = E_D + E_S \quad (7.1)$$

and

$$\frac{RT}{F} \log_e \frac{f_{H^+}^{II}}{f_{H^+}^I} = E_S. \quad (7.2)$$

As pointed out by BJERRUM and UNMACK the system (6.1), (7.1) has the advantage over (6.2), (7.2) that, according to

¹ TAYLOR J. Ph. Ch. **31** 1478 1927. Cf. GUGGENHEIM J. Ph. Ch. **33** 842 1929.

the former but not the latter, when both the electrode solutions become infinitely dilute the ratio $f_{\text{H}^+}^{\text{II}}/f_{\text{H}^+}^{\text{I}}$ becomes unity. They therefore make use of the conventional definition (6.2) [or (7.2)].¹ Even with this definition, however, the individual ionic activity coefficients will not behave similarly to mean activity coefficients. Thus, as an approximation, setting the mean activity coefficients of all the salts at each part of the cell as equal, that is to say

$$f_{\text{RX}} = f_{\text{HX}} = f_{\pm} \quad (8)$$

(5) becomes

$$E_{\text{S}} = \frac{RT}{F} \int_{\text{I}}^{\text{II}} \sum_{\pm} 2t_{\text{X}} d \log_e f_{\pm} \quad (9)$$

and so according to (7.2), in general

$$\frac{f_{\text{H}^+}^{\text{II}}}{f_{\text{H}^+}^{\text{I}}} \neq \frac{f_{\pm}^{\text{II}}}{f_{\pm}^{\text{I}}}, \quad (10)$$

unless by chance $\sum_{\pm} t_{\text{X}} = \frac{1}{2}$ throughout the cell, that is to say unless the mean mobility of the cations is equal to that of the anions.]

In order to compare these conclusions with our experimental results let solution II be the same as solutions S and let solution I be the solution of HCl, without added salt, at the same total concentration. The values of $E_{\text{D}} + E_{\text{S}}$ in the fourth column of table I are then obtained by subtracting from those in the third column the corresponding values for the solutions containing only acid. In column five are given the [values of E_{D} computed by HENDERSON'S formula, the use of which involves two inexact assump-

¹ BJERRUM and UNMACK loc. cit.

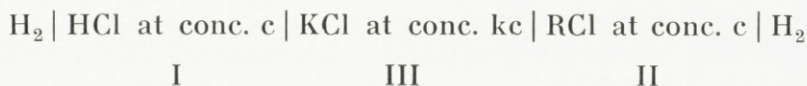
tions: firstly that the transition layers are of the "continuous mixture type" and secondly that from one part of the cell to another the mobilities of the various ions vary in a common ratio. Each assumption may involve an error of a few tenths of a millivolt but not more. Finally by subtracting these values from those in the fourth column the values of E_S recorded in the sixth column are obtained. According to the conventional definition (6.2) or (7.2) these are the values of $\frac{RT}{F} \log_e f_{H^+}^{(S)} / f_{H^+}^{(HCl)}$. For the sake of contrast we give in the seventh column for the type A experiments, the values of $\frac{RT}{F} \log_e f_{RCl}^{(S)} / f_{RCl}^{(HCl)}$ where $f_{RCl}^{(S)} / f_{RCl}^{(HCl)}$ is the ratio of the mean activity coefficient of the uni-univalent chloride RCl in the solution S and in 0.1 N HCl. That this ratio is the same for all uni-valent cations R there is abundant evidence both theoretical and experimental.¹ The values actually recorded are those obtained for HCl and for $[Co(NO_2)(SCN)(NH_3)_4]Cl$ in the very accurate experiments of GÜNTEMBERG.² It is clear that the conventional f_{H^+} ratios deviate from unity considerably more than the corresponding f_{RCl} ratios. This is particularly striking in the case of the solutions containing LiCl, for the ratio $f_{HCl}^{(LiCl)} / f_{HCl}^{(HCl)}$ differs from unity by less than 0.2 % while the conventional $f_{H^+}^{(LiCl)} / f_{H^+}^{(HCl)}$ differs from unity by 7 %. In this case the whole deviation of this ratio from unity or of E_S from zero is due to the difference in the mobilities of the H^+ and Li^+ ions and not at all to any difference in the thermodynamic properties of HCl and LiCl.

¹ BRØNSTED J. A. C. S. **44** 877 1922. BRØNSTED J. A. C. S. **45** 2898 1923. GÜNTEMBERG Z. Ph. Ch. **123** 199 1926. GUGGENHEIM Rep. of Scandinavian Science Congress Copenhagen 1929 p. 298.

² GÜNTEMBERG Z. Ph. Ch. **123** 199 1926.

It is unfortunately not practicable to compute E_S theoretically with any certainty for the type A experiments owing to our ignorance of the activity coefficients of HCl and RCl in the more concentrated parts of the transition layers. Such a computation is however possible with at least a moderate degree of accuracy in the case of the type B experiments, these having in fact been designed with this end in view. We shall now show how this computation can be carried out.

Let us consider the cell



We may, if desired, suppose that the RCl solution contains a trace of HCl to make the value of C_{H^+} definite. This value of C_{H^+} will of course determine E_{E1} but will clearly have no effect on E_S which according to (5) is given by

$$\begin{aligned} E_S = & \frac{RT}{F} \int_{\text{I}}^{\text{II}} 2t_{\text{R}} d \log_e \frac{f_{\text{HCl}}}{f_{\text{RCl}}} + \frac{RT}{F} \int_{\text{I}}^{\text{II}} 2t_{\text{K}} d \log_e \frac{f_{\text{HCl}}}{f_{\text{KCl}}} \\ & + \frac{RT}{F} \int_{\text{I}}^{\text{II}} 2t_{\text{Cl}} d \log_e f_{\text{HCl}} \end{aligned} \quad (11)$$

To evaluate these integrals we have to make use of certain approximations regarding the mean activity coefficients and mobilities. We therefore assume firstly that the mean activity coefficients of all chlorides are equal at each part of the cell, secondly that the ratios of the mobilities of the various ions are the same throughout the cell and thirdly that we

may treat the transition layers as of the "continuous mixture type". The first assumption, which may be written

$$f_{\text{HCl}} = f_{\text{RCl}} = f_{\text{KCl}} = f_{\pm}, \quad (12)$$

is certainly sufficiently accurate in the dilute parts of each transition layer and it is these that chiefly contribute to the integrals. For this very reason we shall eventually find that we may dispense with this assumption in the more concentrated parts of the transition layers, where it is least accurate. The first two assumptions are also involved in the application of HENDERSON'S formula to the evaluation of E_D .

By the first assumption (11) simplifies to

$$E_S = \frac{RT}{F} \int_I^{II} 2t_{\text{Cl}} d \log_e f_{\pm}. \quad (13)$$

According to the second assumption, since the mobilities of K^+ and Cl^- are so nearly equal, we may write

$$u_{\text{K}^+} = u_{\text{Cl}^-} = \frac{u_{\text{H}^+}}{\lambda} = \frac{u_{\text{R}^+}}{\lambda'}, \quad (14)$$

where u denotes a mobility and λ, λ' are constant throughout the cell. The third assumption then leads to

$$E_S = \frac{RT}{F} \int_{x=0}^{x=1} 2 \frac{(1-x) + kx}{(\lambda+1)(1-x) + 2kx} d \log_e f \\ + \frac{RT}{F} \int_{x=1}^{x=0} 2 \frac{(1-x) + kx}{(\lambda'+1)(1-x) + 2kx} d \log_e f' \quad (15)$$

where f is the value of f_{\pm} for a mixture of $(1-x)$ parts of the electrode solution I and x parts of the bridge solution

III, while f' is the value of f_{\pm} for a similar mixture of solution II with the bridge solution III. In so far as f_{\pm} depends only on the total salt concentration f and f' are identical for equal values of x . Now it may be possible (this must be verified a posteriori) to split up the range of each integral into two parts $0 \leq x \leq x_1$ and $x_1 \leq x \leq 1$, such that in the first f_{\pm} is some simple function of the total concentration and in the second the HCl or RCl present is negligible compared with the great excess of KCl and so t_{Cl^-} is practically $\frac{1}{2}$. The contribution of the latter range to the first integral in (15) will thus approximately cancel its contribution to the second integral and there remains

$$E_S = \frac{RT}{F} \int_{x=0}^{x=x_1} 2 \frac{(1-x) + kx}{(\lambda+1)(1-x) + 2kx} d \log_e f$$

$$- \frac{RT}{F} \int_{x=0}^{x=x_1} 2 \frac{(1-x) + kx}{(\lambda'+1)(1-x) + 2kx} d \log_e f. \quad (16)$$

Let y^2c denote the total concentration of a solution consisting of $(1-x)$ parts of either electrode solution and x parts of bridge solution, so that

$$y^2 = (1-x) + kx \quad \text{or} \quad x = \frac{y^2-1}{k-1} \quad (17)$$

and let y_1 be the value of y corresponding to $x = x_1$. Let us now suppose that for all concentration y^2c less than y_1^2c the mean activity coefficient can be expressed in the form¹

$$\log_e f_{\pm} = -\alpha \sqrt{y^2c} + \beta y^2c \quad (18.1)$$

¹ BRONSTED Trans. Far. Soc. **23** 416 1927.

$$\text{or} \quad d \log_e f_{\pm} = -\alpha \sqrt{c} dy + \beta c 2y dy. \quad (18.2)$$

Then substituting from (17) and (18.2) into (16) we get

$$\begin{aligned} E_s = & \frac{RT}{F} \int_1^{y_1} 2 \frac{(k-1)y^2(-\alpha\sqrt{c} + 2\beta cy)}{k(\lambda-1) + (2k-\lambda-1)y^2} dy - \\ & (19) \\ & - \frac{RT}{F} \int_1^{y_1} 2 \frac{(k-1)y^2(-\alpha\sqrt{c} + 2\beta cy)}{k(\lambda'-1) + (2k-\lambda'-1)y^2} dy. \end{aligned}$$

As $\lambda > 1$ whilst we shall want to set $\lambda' < 1$, we express the two integrals in different forms to avoid imaginary quantities. We obtain finally

$$\begin{aligned} \frac{FE_s}{RT} = & \frac{2(k-1)}{2k-\lambda-1} \left[-\alpha\sqrt{c} \left\{ y_1 - 1 \right. \right. \\ & - \sqrt{\frac{k(\lambda-1)}{2k-\lambda-1}} \left(\arctan \sqrt{\frac{2k-\lambda-1}{k(\lambda-1)}} y_1 \right. \\ & \left. \left. - \arctan \sqrt{\frac{2k-\lambda-1}{k(\lambda-1)}} \right) \right\} + \beta c \left\{ y_1^2 - 1 \right. \\ & \left. \left. - \frac{k(\lambda-1)}{2k-\lambda-1} \log_e \frac{(2k-\lambda-1)y_1^2 + k(\lambda-1)}{(2k-\lambda-1) + k(\lambda-1)} \right\} \right] \\ & (20.1) \\ & - \frac{2(k-1)}{2k-\lambda'-1} \left[-\alpha\sqrt{c} \left\{ y_1 - 1 \right. \right. \\ & - \sqrt{\frac{k(1-\lambda')}{2k-\lambda'-1}} \left(\operatorname{arctanh} \sqrt{\frac{2k-\lambda'-1}{k(1-\lambda')}} y_1 \right. \\ & \left. \left. - \operatorname{arctanh} \sqrt{\frac{2k-\lambda'-1}{k(1-\lambda')}} \right) \right\} + \beta c \left\{ y_1^2 - 1 \right. \\ & \left. \left. + \frac{k(1-\lambda')}{2k-\lambda'-1} \log_e \frac{(2k-\lambda'-1)y_1^2 - k(1-\lambda')}{(2k-\lambda'-1) - k(1-\lambda')} \right\} \right]. \end{aligned}$$

In the case that λ , λ' and unity are negligible compared with k , this simplifies to

$$\begin{aligned}
\frac{FE_s}{RT} = & \alpha \sqrt{c} \sqrt{\frac{\lambda-1}{2}} \left\{ \arctan \sqrt{\frac{2}{\lambda-1}} y_1 \right. \\
& - \arctan \sqrt{\frac{2}{\lambda-1}} \left. \right\} - \beta c \frac{\lambda-1}{2} \log_e \frac{2y_1^2 + \lambda - 1}{\lambda + 1} \\
& - \alpha \sqrt{c} \sqrt{\frac{1-\lambda'}{2}} \left\{ \operatorname{arctanh} \sqrt{\frac{2}{1-\lambda'}} y_1 \right. \\
& - \operatorname{arctanh} \sqrt{\frac{2}{1-\lambda'}} \left. \right\} - \beta c \frac{1-\lambda'}{2} \log_e \frac{2y_1^2 + \lambda' - 1}{\lambda' + 1}.
\end{aligned} \tag{20.2}$$

We shall now apply these formulae to the cell



Here $k = 350$, $\lambda = 5.0$, $\lambda' = 0.5$ so that the shorter formula (20.2) is almost as accurate as (20.1); we have however used the latter. We assign to α the value $0.50/\log_e 10$ corresponding to the DEBYE-HÜCKEL limiting law¹. For $\beta \log_e 10$ we have chosen the value 0.50 for the following reason. We shall find that almost the whole contribution to the integral comes from those parts of the transition layers where the concentration is less than 0.1 N. Up to this concentration the activity coefficients are given quite accurately by formulae of the type (18.1) with the following values of $\beta \log_e 10$: 0.40 for KCl in KCl, 0.60 for HCl or LiCl in HCl or LiCl and 0.50 for HCl or LiCl in KCl. Hence we have clearly to use a value between 0.40 and 0.60 and we have chosen the mean of these. Fortunately a difference of 0.10 in $\beta \log_e 10$ affects the final result by only 0.2 millivolts.

Finally remains the question what value to choose for y_1 and the verification of our assumption that practically the whole contribution to the integral comes from the

¹ DEBYE and HÜCKEL Ph. Z. **21** 185 1923.

Table II.

Computation of E_s for the cell $H_2 | 0.01 \text{ N HCl} | 3.5 \text{ N KCl} | 0.01 \text{ N LiCl} | H_2$ at 18° C .

Value of y_1	3.0	3.5	4.0	6.0	7.0	8.5	$\sqrt{350}$
Conc at limit of integral = $.01 y_1^2$09	.12	.16	.36	.49	.72	3.50
t_{Cl^-} at limit of integral on HCl side411	.417	.447	.476	.483	.489	.500
t_{Cl^-} at limit of integral on LiCl side514	.510	.507	.503	.502	.501	.500
Term in E_s proportional to $\alpha \sqrt{c}$ in mv	+ 2.65	+ 2.92	+ 3.14	+ 3.64	+ 3.79	+ 3.95	+ 4.37
Term in E_s proportional to βc in mv	- 0.93	- 1.11	- 1.26	- 1.75	- 1.95	- 2.20	- 3.22
E_s in millivolts	+ 1.72	+ 1.81	+ 1.88	+ 1.89	+ 1.84	+ 1.75	+ 1.15

range $1 \leq y \leq y_1$ while the remaining range $y_1 \leq y \leq \sqrt{k}$ may be neglected. This is best tested by computing with a series of values of y_1 and seeing to what extent the computed value of E_s is independent of the value chosen for y_1 . The results of this computation are given in Table II, which explains itself. We see that the computed value of E_s does not vary more than two tenths of a millivolt in a range of $y_1^2 c$ values extending from 0.1 to 0.7. It must however be admitted that even at the concentration 0.7 N the transport number of the chloride ion still differs appreciably from $1/2$. For the concentration 3.50 N the formula assumed for f_{\pm} will be very inaccurate so that we must not attach too great importance to the calculation with $y_1^2 = 350$. However the result in this case also is only 0.6 mv less than that for the concentration $y_1^2 c = 0.7$. It therefore seems fairly safe to take as the computed value 1.5 ± 0.4 mv. As the experimental value, obtained by a slight extrapolation (see Fig. 1 and Table I), is 1.2 m. v. the agreement is

quite as good as could be expected in view of the unavoidably approximate nature of the whole computation. Expressed in terms of the conventional f_{H^+} scale we may say that for the deviation of $f_{\text{H}^+}^{(\text{LiCl})} / f_{\text{H}^+}^{(\text{HCl})}$ from unity experiment gives 5 % and computation 5 to 7 %. It is especially satisfactory that our computation is able to account for the greatness of this deviation, which is here due entirely to the difference in mobilities of H^+ and Li^+ , since at 0.01 N concentration all typical uni-univalent salts have the same mean activity coefficient at least to within a fraction of 1 %. For HCl and LiCl this equality in fact holds even at 0.1 N concentration.

Considering the difficulty of computing E_s for the type B cells, it seems hopeless to attempt a similar computation for the type A cells. It is however perhaps worth while trying to explain why E_s has opposite signs in the two cases. Now it will be observed that formula (20.2) is independent of k , except in so far as the value to be used for y_1 depends on k . For $c = 0.01$ and $k = 350$ formulae (20.2) and (20.1), as already mentioned, are practically indistinguishable. For $c = 0.1$ and $k = 35$ the two formulae will differ somewhat more and both may be very inaccurate. We shall nevertheless apply (20.2) to the cell



merely to obtain rough qualitative information of the behaviour of E_s . We see then that the term in E_s proportional to $\alpha \sqrt{c}$ will be about 3 times greater than it was for the corresponding type B cell while the term proportional to βc will be about 10 times greater. Looking then at the figures given for these two terms in table II and remembering the extremely approximate nature of our

estimate, we find it at least reasonable to expect the negative βc term to be numerically greater than the $\alpha\sqrt{c}$ term, in which case the sign of E_S will be reversed.

Remembering that according to BJERRUM and UNMACK'S conventional definition of f_{H^+} the values of E_S in the sixth column of table I may be regarded as values of $\frac{RT}{F} \log_e f_{H^+}^{(S)}/f_{H^+}^{(HCl)}$, by subtracting these from twice the values in the seventh column we obtain the corresponding conventional values of $\frac{RT}{F} \log_e f_{Cl^-}^{(S)}/f_{Cl^-}^{(HCl)}$, given in the eighth column. It is noteworthy that the values of f_{Cl^-} are the same within 1% in the solutions of pure LiCl, NaCl, KCl and CsCl, but differ by no less than 6 to 7% from its value in the solution of pure HCl. This again is in accordance with the fact that these conventional ionic activity coefficients are not purely thermodynamic functions, but depend largely on the transport numbers of the various ions present.

We have shown that the conventional ionic activity coefficients may remain extremely specific even at concentrations of the electrode solutions so low that the mean activity coefficients are given with 1% accuracy by the non-specific limiting law of DEBYE and HÜCKEL, namely:

$$\log_{10} f_{\pm} = -0.50\sqrt{c},$$

for solutions containing only univalent ions. It might be argued that this effect is due to the exceptionally large proportion of hydrogen ions to other ions in one of the electrode solutions and that this complication would be absent as long as the electrode solutions were typical buffer solutions. This is indeed true as long as only univalent ions are present in the cell, for if they all have approxi-

mately equal mobilities E_D will be small and likewise the deviation of E_S from $\frac{RT}{F} \log_e f_{\pm}^{II}/f_{\pm}^I$. But there is no corresponding simple proposition holding for cells containing ions of several valencies. We shall refrain from giving here the more general formulae for E_D and E_S when ions of several valencies are present. If we make the simplest possible assumption namely that the KOHLRAUSCH mobilities are equal for all ions of the same valency and proportional to the valency for ions of different valencies, then the ideal liquid junction potential will be zero. But the further assumption that the activity coefficients at each part of the cell are the same for all salts of the same type is not sufficient to produce any notable simplification in the form of the "salt effect potential" E_S , except in the special case that in both electrode solutions the concentration of cations of each valency is equal to the concentration of anions of the same numerical valency. This last condition would in practice be difficult to fulfil in choosing a buffer solution owing to the general tendency of salts of symmetrical valence type to be insoluble except in the case of uni-univalent salts.

In conclusion we wish to express our gratitude to Professor BJERRUM for his friendly and helpful criticism. One of us (E. A. G.) is also indebted to the Rask-Ørsted Foundation for the award of a research grant.

Copenhagen March 1930.

The Royal Agricultural College Chemical Laboratory.

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.

Mathematisk-fysiske Meddelelser. **X**, 9.

DIE RETROGRADEN PERIODISCHEN
BAHNEN UM DIE BEIDEN ENDLICHEN
MASSEN IM PROBLÈME RESTREINT, MIT
DIREKTER ABSOLUTER BEWEGUNG
(KLASSE 1)

VON

ELIS STRÖMGREN

MIT 7 FIGUREN



KØBENHAVN

HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL

BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI A/S

1930

In der Publikation des Kopenhagener Observatoriums No. 30 (Astron. Nachr. 4968) ist mit Hilfe numerischer Integration die Entwicklung der retrograden periodischen Bahnen um die beiden endlichen Massen im problème restreint mit direkter absoluter Bewegung — Klasse l — vom Unendlichen bis zu Bahnen mit (nach Innen gerichteten) Einbuchtungen und Spitzen und schliesslich zu einer Bahn mit kleinen Schleifen ($K = 11.30665$) verfolgt worden. Für die äusseren Bahnen dieser Klasse wurde in derselben Publikation von Herrn P. PEDERSEN eine Theorie aufgestellt, die mit der numerischen Rechnung eine befriedigende Übereinstimmung zeigte.

Die Darstellung der Rechnungsergebnisse der erwähnten Untersuchung endete mit der folgenden Bemerkung: »Die weitere Verfolgung dieser Klasse würde zu komplizierten Bahnen führen«. Es stellte sich aber nachher bei der Klasse l — wie bei mehreren anderen Klassen — heraus, dass die Weiterführung der Untersuchung nicht, wie früher vermutet, in ein uferloses Gebiet nicht-einfachperiodischer Bahnen führte, sondern dass die Entwicklung in ganz einfacher Weise einen natürlichen Abschluss fand. Es war hier wieder — wie bei den Klassen k_1 und k_2 und bei den unsymmetrischen librationsähnlichen Bahnen (Vgl. z. B. Publ. 47,

60 und 61, »Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften« 1925 und »Tre Aartier Celest Mekanik paa Københavns Observatorium«) — das System der zu den Librationspunkten L_4 und L_5 asymptotischen Bahnen, das die Lösung brachte.

Die Entwicklung der Schleifen ist in den genannten Publikationen klargelegt worden, bis zu Bahnen, die asymptotisch in L_4 und L_5 hinein (bezw. von diesen Punkten hinaus) verlaufen. Die vorliegende Abhandlung gibt für die Klasse l das ganze nach Veröffentlichung der Publ. 30 erhaltene numerische Material, das schliesslich zu dieser Klärlegung führte.

Bei der Organisation der Arbeit bin ich vom Assistenten des Observatoriums Herrn Cand. Mag. JENS P. MÖLLER unterstützt worden. Die numerische Rechenarbeit ist in der Hauptsache von den Herren Dr. E. NOTEBOOM (Rathenow) und M. LÖKKEGAARD (Kopenhagen) ausgeführt worden. Eine Bahn der folgenden Zusammenstellung (Bahn No. 1) hat Herr Magister H. ERHARDT JENSEN (Kopenhagen) und eine (Bahn No. 17) Herr W. HARRIES (Göttingen) gerechnet. Die Zeichnungen zu den Figuren sind vom Herrn Ing. O. S. L. CHRISTENSEN ausgeführt worden.

Die gerechneten Bahnen sind alle im folgenden zusammengestellt. Wie aus dieser Zusammenstellung ersichtlich, ist das Problem von verschiedenen Ausgangspunkten aus in Angriff genommen worden. Das Hauptinteresse bieten selbstverständlich die Bahnen, wo in der (nach Innen gerichteten) Schleife die neue Einbuchtung (nach Aussen) auftritt, in zwei Fällen — den Bahnen 19 und 20 — fast

zu Spitzen weiterentwickelt. Hier liegt der Anfang der Entwicklung gegen die asymptotischen Bahnen hin ganz klar.

In den Figuren I—VII sind die Mehrzahl der Bahnen — ganz oder teilweise — eingezeichnet. Bei der Betrachtung dieser Figuren ist zu bemerken, dass η für den Librationspunkt L_4 den Wert $\sqrt{3} = 1.732 \dots$ hat.

Universitetsobservatorium, Kopenhagen, 1930, April 16.

ELIS STRÖMGREN.

Übersicht über die gerechneten Bahnen.

Gruppe	No.	ξ_c	ξ'_0	η_0	η'_0	K	Bemerkungen
I	1					9.2	$E_0 = \frac{\pi}{2}$ $F_0 = -1.0$ $F'_0 = 0$
II	2	0	-1.25	+1.0	0	10.7513	
	3	»	-1.35	»	»	10.4913	
	4	»	-1.65	»	»	9.5913	
III	5	0	-0.25	+1.8	0	10.9479	Periodisch
	6	»	-0.39	»	»	10.8683	
	7	»	-0.388736	»	»	10.8593	
	8	»	-0.4	»	»	10.8504	
IV	9	-4.5	0	0	+3.7	10.3002	
	10	»	»	»	+3.78	9.7018	
	11	»	»	»	+4.1	7.1802	
V	12	-4.0	0	0	+2.8	12.4266	
	13	»	»	»	+3.5	8.0166	
	14	»	»	»	+3.8	5.8266	
VI	15	0	-0.1	+1.5	0	11.1150	Einbuchtung
	16	»	-0.35	»	»	11.0025	
	17	»	-0.6	»	»	10.7650	ziemlich nahe periodisch
	18	»	-0.75	»	»	10.5625	
VII	19	0	-0.02	+1.65	0	11.0149	Einbuchtung } fast eine Einbuchtung } Spitze
	20	»	-0.025	»	»	11.0147	
	21	»	-0.035	»	»	11.0141	Einbuchtung
	22	»	-0.03722	»	»	11.013943	Einbuchtung. Periodisch
	23	»	-0.04	»	»	11.0137	Einbuchtung
	24	»	-0.07	»	»	11.0104	Einbuchtung

Bahn 1.

$$E_0 = \frac{\pi}{2} \quad F_0 = -1.0 \quad F'_0 = 0 \quad K = 9.2$$

ψ	E	F	ξ	η
0.00	+ 1.57080	— 1.00000	0.00000	+ 1.17520
0.02	1.62004	1.00226	— 0.07608	1.17725
0.04	1.66905	1.00903	0.15242	1.18344
0.06	1.71759	1.02033	0.22924	1.19383
0.08	1.76539	1.03619	0.30681	1.20858
0.10	1.81216	1.05666	0.38535	1.22790
0.12	1.85754	1.08178	0.46510	1.25216
0.14	1.90112	1.11164	0.54626	1.28190
0.16	1.94238	1.14636	0.62898	1.31793
0.18	1.98072	1.18608	0.71330	1.36141
0.20	2.01533	1.23097	0.79913	1.41404
0.22	2.04523	1.28129	0.88602	1.47826
0.24	2.06913	1.33734	0.97301	1.55752
0.26	2.08538	1.39951	1.05816	1.65677
0.28	2.09179	1.46827	1.13784	1.78296
0.30	2.08539	1.54420	1.20529	1.94588
0.32	2.06218	1.62800	1.24802	2.15895
0.34	2.01656	1.72043	1.24298	2.43973
0.36	1.94067	1.82228	1.14733	2.80845
0.38	1.82323	1.93422	0.88207	3.27971
0.40	1.64808	2.05644	— 0.30676	3.83362
0.42	+ 1.39221	— 2.18828	+ 0.80222	+ 4.33382

Bahn 2.

$$\xi'_0 = -1.25 \quad \eta_0 = +1.0$$

t	ξ	η	t	ξ	η
0.0	0.00000	+ 1.00000	2.5	- 1.30504	+ 3.62717
0.1	- 0.12518	1.00334	2.6	1.10078	3.83811
0.2	0.25216	1.01311	2.7	0.86520	4.03889
0.3	0.38194	1.02861	2.8	0.59865	4.22554
0.4	0.51536	1.04886	2.9	- 0.30198	4.39405
0.5	0.65229	1.07278	3.0	+ 0.02348	4.54042
0.6	0.79163	1.09963	3.1	0.37592	4.66073
0.7	0.93143	1.12945	3.2	0.75305	4.75121
0.8	1.06923	1.16326	3.3	1.15210	4.80829
0.9	1.20253	1.20307	3.4	1.56985	4.82864
1.0	1.32912	1.25142	3.5	2.00263	4.80926
1.1	1.44720	1.31097	3.6	2.44638	4.74754
1.2	1.55527	1.38406	3.7	2.89667	4.64127
1.3	1.65189	1.47251	3.8	3.34878	4.48875
1.4	1.73566	1.57751	3.9	3.79769	4.28878
1.5	1.80502	1.69963	4.0	4.23823	4.04070
1.6	1.85824	1.83887	4.1	4.66504	3.74445
1.7	1.89348	1.99470	4.2	5.07270	3.40056
1.8	1.90881	2.16607	4.3	5.45580	3.01014
1.9	1.90224	2.35151	4.4	5.80898	2.57496
2.0	1.87185	2.54911	4.5	6.12770	2.09738
2.1	1.81579	2.75657	4.6	6.40484	1.58038
2.2	1.73239	2.97123	4.7	6.63775	1.02750
2.3	1.62019	3.19011	4.8	6.82131	+ 0.44284
2.4	- 1.47802	+ 3.40993	4.9	+ 6.95148	- 0.16896

Bahn 3.

$$\xi'_0 = -1.35 \quad \eta_0 = +1.0$$

t	ξ	η	t	ξ	η
0.00	0.00000	+ 1.00000	0.08	- 0.10814	+ 1.00278
0.04	- 0.05402	+ 1.00070	0.12	- 0.16244	+ 1.00623

t	ξ	η	t	ξ	η
0.16	-0.21702	+1.01100	1.52	-1.76355	+1.95196
0.20	0.27193	1.01703	1.56	1.77473	2.01649
0.24	0.32725	1.02426	1.60	1.78256	2.08341
0.28	0.38300	1.03263	1.64	1.78692	2.15263
0.32	0.43921	1.04204	1.68	1.78768	2.22404
0.36	0.49584	1.05242	1.72	1.78473	2.29752
0.40	0.55287	1.06370	1.76	1.77795	2.37295
0.44	0.61021	1.07579	1.80	1.76722	2.45019
0.48	0.66777	1.08867	1.84	1.75243	2.52910
0.52	0.72543	1.10230	1.88	1.73347	2.60951
0.56	0.78303	1.11667	1.92	1.71024	2.69127
0.60	0.84043	1.13182	1.96	1.68262	2.77419
0.64	0.89744	1.14778	2.00	1.65053	2.85810
0.68	0.95390	1.16465	2.04	1.61388	2.94279
0.72	1.00961	1.18254	2.08	1.57260	3.02807
0.76	1.06442	1.20156	2.12	1.52660	3.11373
0.80	1.11816	1.22186	2.16	1.47583	3.19957
0.84	1.17067	1.24360	2.20	1.42021	3.28535
0.88	1.22181	1.26695	2.24	1.35972	3.37085
0.92	1.27145	1.29205	2.28	1.29431	3.45584
0.96	1.31947	1.31907	2.32	1.22395	3.54009
1.00	1.36576	1.34815	2.36	1.14861	3.62336
1.04	1.41021	1.37942	2.40	1.06830	3.70541
1.08	1.45272	1.41300	2.44	0.98302	3.78599
1.12	1.49319	1.44899	2.48	0.89276	3.86485
1.16	1.53153	1.48747	2.52	0.79756	3.94173
1.20	1.56765	1.52852	2.56	0.69745	4.01639
1.24	1.60143	1.57218	2.60	0.59249	4.08857
1.28	1.63277	1.61849	2.64	0.48273	4.15801
1.32	1.66157	1.66747	2.68	0.36823	4.22446
1.36	1.68772	1.71912	2.72	0.24909	4.28767
1.40	1.71111	1.77343	2.76	-0.12540	4.34738
1.44	1.73162	1.83037	2.80	+0.00273	4.40334
1.48	-1.74914	+1.88989	2.84	+0.13518	+4.45531

t	ξ	η	t	ξ	η
2.88	+ 0.27182	+ 4.50304	3.84	+ 4.26701	+ 3.86310
2.92	0.41250	4.54630	3.88	4.43386	3.74775
2.96	0.55708	4.58485	3.92	4.59799	3.62490
3.00	0.70538	4.61846	3.96	4.75906	3.49457
3.04	0.85721	4.64691	4.00	4.91671	3.35685
3.08	1.01239	4.66998	4.04	5.07061	3.21181
3.12	1.17072	4.68747	4.08	5.22042	3.05955
3.16	1.33199	4.69915	4.12	5.36581	2.90018
3.20	1.49596	4.70485	4.16	5.50645	2.73382
3.24	1.66240	4.70436	4.20	5.64199	2.56061
3.28	1.83105	4.69753	4.24	5.77211	2.38072
3.32	2.00168	4.68417	4.28	5.89650	2.19430
3.36	2.17401	4.66415	4.32	6.01483	2.00156
3.40	2.34776	4.63731	4.36	6.12680	1.80269
3.44	2.52266	4.60352	4.40	6.23211	1.59791
3.48	2.69841	4.56266	4.44	6.33056	1.38745
3.52	2.87470	4.51462	4.48	6.42155	1.17155
3.56	3.05124	4.45931	4.52	6.50513	0.95047
3.60	3.22772	4.39663	4.56	6.58092	0.72448
3.64	3.40381	4.32653	4.60	6.64866	0.49388
3.68	3.57919	4.24893	4.64	6.70810	0.25895
3.72	3.75354	4.16381	4.68	6.75901	+ 0.01999
3.76	3.92651	4.07114	4.72	+ 6.80117	- 0.22265
3.80	+ 4.09778	+ 3.97090			

Bahn 4.

$$\xi'_0 = - 1.65 \quad \eta_0 = + 1.0$$

t	ξ	η	t	ξ	η
0.0	0.00000	+ 1.00000	0.4	- 0.66455	+ 1.10782
0.1	- 0.16517	1.00731	0.5	0.82789	1.16307
0.2	0.33117	1.02870	0.6	0.98448	1.22899
0.3	- 0.49806	+ 1.06274	0.7	- 1.13071	+ 1.30729

t	ξ	η	t	ξ	η
0.8	-1.26350	+1.40023	2.7	+1.17713	+4.71889
0.9	1.38031	1.50983	2.8	1.59987	4.74814
1.0	1.47897	1.63736	2.9	2.03947	4.73561
1.1	1.55745	1.78329	3.0	2.49150	4.67844
1.2	1.61372	1.94721	3.1	2.95114	4.57423
1.3	1.64570	2.12801	3.2	3.41323	4.42115
1.4	1.65136	2.32392	3.3	3.87236	4.21792
1.5	1.62871	2.53267	3.4	4.32289	3.96386
1.6	1.57593	2.75144	3.5	4.75906	3.65894
1.7	1.49141	2.97700	3.6	5.17501	3.30378
1.8	1.37389	3.20577	3.7	5.56491	2.89969
1.9	1.22237	3.43385	3.8	5.92301	2.44861
2.0	1.03631	3.65713	3.9	6.24374	1.95316
2.1	0.81562	3.87130	4.0	6.52172	1.41661
2.2	0.56070	4.07196	4.1	6.75194	0.84287
2.3	-0.27245	4.25465	4.2	6.92970	+0.23641
2.4	+0.04770	4.41494	4.3	7.05080	-0.39773
2.5	0.39777	4.54849	4.4	+7.11152	-1.05400
2.6	+0.77526	+4.65112			

Bahn 5.

$$\xi'_0 = -0.25 \quad \eta_0 = +1.8$$

t	ξ	η	t	ξ	η
0.0	0.00000	+1.80000	0.9	-0.09316	+2.04009
0.1	-0.02482	1.80325	1.0	0.07065	2.08941
0.2	0.04851	1.81295	1.1	-0.03855	2.14073
0.3	0.06998	1.82898	1.2	+0.00368	2.19307
0.4	0.08813	1.85115	1.3	0.05641	2.24533
0.5	0.10190	1.87914	1.4	0.11990	2.29631
0.6	0.11024	1.91257	1.5	0.19424	2.34478
0.7	0.11216	1.95094	1.6	0.27937	2.38945
0.8	-0.10675	+1.99368	1.7	+0.37502	+2.42898

t	ξ	η	t	ξ	η
1.8	+0.48076	+2.46202	3.1	+2.24800	+1.82262
1.9	0.59596	2.48724	3.2	2.35336	1.67724
2.0	0.71982	2.50335	3.3	2.44410	1.52101
2.1	0.85133	2.50909	3.4	2.51822	1.35574
2.2	0.98931	2.50331	3.5	2.57389	1.18357
2.3	1.13238	2.48499	3.6	2.60943	1.00703
2.4	1.27901	2.45323	3.7	2.62335	0.82892
2.5	1.42749	2.40732	3.8	2.61441	0.65247
2.6	1.57601	2.34673	3.9	2.58157	0.48124
2.7	1.72261	2.27119	4.0	2.52406	0.31920
2.8	1.86524	2.18064	4.1	2.44127	0.17074
2.9	2.00179	2.07530	4.2	2.33263	+0.04076
3.0	+2.13010	+1.95569	4.3	+2.19737	-0.06508

Bahn 6.

$$\xi'_0 = -0.39 \quad \eta_0 = +1.8$$

t	ξ	η	t	ξ	η
0.0	0.00000	+1.80000	1.3	+0.03067	+2.43879
0.1	-0.03873	1.80464	1.4	0.11622	2.51188
0.2	0.07591	1.81853	1.5	0.21694	2.58130
0.3	0.10994	1.84148	1.6	0.33269	2.64516
0.4	0.13929	1.87321	1.7	0.46311	2.70155
0.5	0.16245	1.91329	1.8	0.60755	2.74855
0.6	0.17795	1.96120	1.9	0.76511	2.78428
0.7	0.18441	2.01624	2.0	0.93465	2.80689
0.8	0.18051	2.07757	2.1	1.11478	2.81466
0.9	0.16507	2.14422	2.2	1.30384	2.80599
1.0	0.13705	2.21503	2.3	1.49998	2.77947
1.1	0.09553	2.28872	2.4	1.70112	2.73390
1.2	-0.03981	+2.36384	2.5	+1.90502	+2.66832

t	ξ	η	t	ξ	η
2.6	+2.10928	+2.58205	3.3	+3.33407	+1.40735
2.7	2.31138	2.47469	3.4	3.45006	1.16937
2.8	2.50875	2.34618	3.5	3.54496	0.91913
2.9	2.69874	2.19676	3.6	3.61726	0.65912
3.0	2.87876	2.02704	3.7	3.66581	0.39198
3.1	3.04625	1.83797	3.8	3.68984	+0.12054
3.2	+3.19878	+1.63087	3.9	+3.68895	-0.15229

Bahn 7.

Periodische Bahn.

$$\xi'_0 = -0.388736 \quad \eta_0 = +1.8$$

t	ξ	η	t	ξ	η
0.00	0.00000	+1.80000	0.95	-0.15206	+2.17814
0.05	-0.01941	1.80116	1.00	0.13646	2.21389
0.10	0.03861	1.80463	1.05	0.11747	2.25036
0.15	0.05743	1.81041	1.10	0.09502	2.28738
0.20	0.07566	1.81848	1.15	0.06903	2.32476
0.25	0.09311	1.82880	1.20	0.03942	2.36230
0.30	0.10958	1.84137	1.25	-0.00613	2.39979
0.35	0.12489	1.85612	1.30	+0.03090	2.43704
0.40	0.13883	1.87301	1.35	0.07169	2.47383
0.45	0.15124	1.89199	1.40	0.11625	2.50994
0.50	0.16191	1.91298	1.45	0.16460	2.54512
0.55	0.17067	1.93593	1.50	0.21674	2.57917
0.60	0.17734	1.96076	1.55	0.27263	2.61182
0.65	0.18176	1.98737	1.60	0.33221	2.64286
0.70	0.18377	2.01565	1.65	0.39548	2.67202
0.75	0.18316	2.04551	1.70	0.46232	2.69910
0.80	0.17985	2.07681	1.75	0.53268	2.72383
0.85	0.17365	2.10945	1.80	0.60642	2.74598
0.90	-0.16443	+2.14328	1.85	+0.68345	+2.76532

t	ξ	η	t	ξ	η
1.90	+0.76360	+2.78162	2.95	+2.78381	+2.11375
1.95	0.84676	2.79466	3.00	2.87220	2.02666
2.00	0.93273	2.80419	3.05	2.95746	1.93473
2.05	1.02137	2.81003	3.10	3.03930	1.83814
2.10	1.11243	2.81195	3.15	3.11739	1.73705
2.15	1.20573	2.80977	3.20	3.19146	1.63164
2.20	1.30104	2.80332	3.25	3.26123	1.52213
2.25	1.39811	2.79241	3.30	3.32642	1.40878
2.30	1.49671	2.77689	3.35	3.38679	1.29181
2.35	1.59655	2.75660	3.40	3.44212	1.17151
2.40	1.69737	2.73146	3.45	3.49217	1.04814
2.45	1.79887	2.70132	3.50	3.53678	0.92203
2.50	1.90078	2.66608	3.55	3.57572	0.79348
2.55	2.00277	2.62569	3.60	3.60889	0.66283
2.60	2.10455	2.58006	3.65	3.63611	0.53039
2.65	2.20579	2.52918	3.70	3.65729	0.39655
2.70	2.30617	2.47302	3.75	3.67236	0.26164
2.75	2.40538	2.41157	3.80	3.68124	+0.12602
2.80	2.50307	2.34488	3.85	3.68391	—0.00992
2.85	2.59892	2.27295	3.90	+3.68034	—0.14584
2.90	+2.69263	+2.19589			

Bahn 8.

$$\xi'_0 = -0.4 \quad \eta_0 = +1.8$$

t	ξ	η	t	ξ	η
0.0	0.00000	+1.80000	0.6	—0.18274	+1.96468
0.1	—0.03974	1.80475	0.7	0.18951	2.02090
0.2	0.07786	1.81893	0.8	0.18572	2.08355
0.3	0.11278	1.84238	0.9	0.17015	2.15165
0.4	0.14292	1.87479	1.0	0.14173	2.22401
0.5	—0.16674	+1.91575	1.1	—0.09955	+2.29930

t	ξ	η	t	ξ	η
1.2	-0.04286	+2.37605	2.6	+2.14669	+2.59776
1.3	+0.02886	2.45261	2.7	2.35260	2.48792
1.4	0.11596	2.52726	2.8	2.55366	2.35644
1.5	0.21854	2.59815	2.9	2.74722	2.20360
1.6	0.33646	2.66335	3.0	2.93062	2.03001
1.7	0.46932	2.72092	3.1	3.10126	1.83663
1.8	0.61649	2.76888	3.2	3.25669	1.62476
1.9	0.77704	2.80528	3.3	3.39458	1.39604
2.0	0.94980	2.82827	3.4	3.51285	1.15246
2.1	1.13334	2.83609	3.5	3.60966	0.89621
2.2	1.32599	2.82711	3.6	3.68349	0.62977
2.3	1.52586	2.79989	3.7	3.73316	0.35582
2.4	1.73081	2.75319	3.8	3.75783	+0.07716
2.5	+1.93857	+2.68606	3.9	+3.75709	-0.20330

Bahn 9.

$$\xi_0 = -4.5 \quad \eta'_0 = +3.7$$

t	ξ	η	t	ξ	η
0.0	-4.50000	0.00000	1.3	-2.09142	+3.69444
0.1	4.48323	+0.36942	1.4	1.77687	3.81281
0.2	4.43310	0.73541	1.5	1.45776	3.90183
0.3	4.35021	1.09458	1.6	1.13704	3.96165
0.4	4.23555	1.44364	1.7	0.81759	3.99271
0.5	4.09047	1.77946	1.8	0.50218	3.99576
0.6	3.91666	2.09913	1.9	-0.19344	3.97178
0.7	3.71610	2.39993	2.0	+0.10613	3.92201
0.8	3.49106	2.67946	2.1	0.39425	3.84791
0.9	3.24402	2.93557	2.2	0.66877	3.75112
1.0	2.97767	3.16644	2.3	0.92776	3.63346
1.1	2.69482	3.37059	2.4	1.16952	3.49691
1.2	-2.39841	+3.54687	2.5	+1.39252	+3.34354

t	ξ	η	t	ξ	η
2.6	+ 1.59547	+ 3.17555	3.4	+ 2.40519	+ 1.58564
2.7	1.77726	2.99520	3.5	2.39977	1.39194
2.8	1.93701	2.80483	3.6	2.37039	1.20729
2.9	2.07403	2.60680	3.7	2.31689	1.03400
3.0	2.18779	2.40350	3.8	2.23876	0.87439
3.1	2.27794	2.19733	3.9	2.13488	0.73070
3.2	2.34428	1.99070	4.0	+ 2.00295	+ 0.60500
3.3	+ 2.38670	+ 1.78601			

Bahn 10.

$$\xi_0 = - 4.5 \quad \eta'_0 = + 3.78$$

t	ξ	η	t	ξ	η
0.0	- 4.50000	0.00000	2.0	+ 0.24190	+ 3.85651
0.1	4.48243	+ 0.37738	2.1	0.52814	3.76500
0.2	4.42992	0.75108	2.2	0.79844	3.65042
0.3	4.34313	1.11747	2.3	1.05076	3.51488
0.4	4.22312	1.47303	2.4	1.28329	3.36063
0.5	4.07137	1.81442	2.5	1.49444	3.19007
0.6	3.88969	2.13850	2.6	1.68291	3.00569
0.7	3.68028	2.44240	2.7	1.84755	2.81009
0.8	3.44558	2.72355	2.8	1.98750	2.60592
0.9	3.18829	2.97969	2.9	2.10209	2.39584
1.0	2.91134	3.20890	3.0	2.19084	2.18257
1.1	2.61779	3.40962	3.1	2.25340	1.96879
1.2	2.31084	3.58067	3.2	2.28957	1.75719
1.3	1.99374	3.72121	3.3	2.29920	1.55043
1.4	1.66975	3.83080	3.4	2.28211	1.35114
1.5	1.34213	3.90935	3.5	2.23801	1.16187
1.6	1.01410	3.95711	3.6	2.16626	0.98513
1.7	0.68877	3.97467	3.7	2.06554	0.82324
1.8	0.36913	3.96292	3.8	+ 1.93323	+ 0.67818
1.9	- 0.05801	+ 3.92305			

Bahn 11.

$$\xi_0 = -4.5 \quad \eta'_0 = +4.1$$

t	ξ	η	t	ξ	η
0.0	-4.50000	0.00000	1.7	-0.17609	+ 3.90609
0.1	4.47924	+ 0.40922	1.8	+ 0.16061	3.83614
0.2	4.41722	0.81377	1.9	0.48146	3.73379
0.3	4.31482	1.20904	2.0	0.78307	3.60136
0.4	4.17345	1.59058	2.1	1.06230	3.44150
0.5	3.99507	1.95419	2.2	1.31631	3.25715
0.6	3.78209	2.29592	2.3	1.54258	3.05151
0.7	3.53741	2.61220	2.4	1.73893	2.82802
0.8	3.26426	2.89985	2.5	1.90346	2.59030
0.9	2.96623	3.15612	2.6	2.03460	2.34209
1.0	2.64718	3.37873	2.7	2.13105	2.08727
1.1	2.31116	3.56588	2.8	2.19173	1.82977
1.2	1.96236	3.71628	2.9	2.21568	1.57358
1.3	1.60507	3.82911	3.0	2.20193	1.32270
1.4	1.24358	3.90409	3.1	2.14926	1.08110
1.5	0.88214	3.94139	3.2	2.05570	0.85263
1.6	-0.52496	+ 3.94169	3.3	+ 1.91757	+ 0.64093

Bahn 12.

$$\xi_0 = -4.0 \quad \eta'_0 = +2.8$$

t	ξ	η	t	ξ	η
0.0	-4.00000	0.00000	0.8	-3.33568	+ 2.06934
0.1	3.98899	+ 0.27964	0.9	3.17210	2.28044
0.2	3.95610	0.55718	1.0	2.99516	2.47650
0.3	3.90168	0.83055	1.1	2.80650	2.65669
0.4	3.82635	1.09775	1.2	2.60782	2.82040
0.5	3.73095	1.35690	1.3	2.40076	2.96723
0.6	3.61654	1.60625	1.4	2.18697	3.09696
0.7	-3.48432	+ 1.84420	1.5	-1.96807	+ 3.20954

t	ξ	η	t	ξ	η
1.6	— 1.74559	+ 3.30509	3.6	+ 1.96197	+ 2.52281
1.7	1.52099	3.38389	3.7	2.07257	2.39875
1.8	1.29561	3.44631	3.8	2.17421	2.27055
1.9	1.07073	3.49286	3.9	2.26661	2.13869
2.0	0.84747	3.52412	4.0	2.34949	2.00366
2.1	0.62688	3.54076	4.1	2.42249	1.86606
2.2	0.40986	3.54349	4.2	2.48526	1.72651
2.3	— 0.19722	3.53306	4.3	2.53741	1.58571
2.4	+ 0.01035	3.51021	4.4	2.57858	1.44447
2.5	0.21226	3.47572	4.5	2.60836	1.30366
2.6	0.40801	3.43035	4.6	2.62637	1.16430
2.7	0.59720	3.37483	4.7	2.63224	1.02754
2.8	0.77948	3.30986	4.8	2.62562	0.89464
2.9	0.95456	3.23611	4.9	2.60620	0.76700
3.0	1.12221	3.15423	5.0	2.57366	0.64617
3.1	1.28224	3.06481	5.1	2.52771	0.53386
3.2	1.43447	2.96839	5.2	2.46802	0.43195
3.3	1.57872	2.86550	5.3	2.39414	0.34247
3.4	1.71485	2.75663	5.4	+ 2.30539	+ 0.26770
3.5	+ 1.84266	+ 2.64225			

Bahn 13.

$$\xi_0 = - 4.0 \quad \eta'_0 = + 3.5$$

t	ξ	η	t	ξ	η
0.0	— 4.00000	0.00000	0.7	— 3.17291	+ 2.21358
0.1	3.98200	+ 0.34928	0.8	2.94095	2.45208
0.2	3.92830	0.69425	0.9	2.68935	2.66247
0.3	3.83976	1.03067	1.0	2.42179	2.84296
0.4	3.71779	1.35447	1.1	2.14212	2.99224
0.5	3.56432	1.66183	1.2	1.85427	3.10948
0.6	— 3.38176	+ 1.94925	1.3	— 1.56221	+ 3.19437

t	ξ	η	t	ξ	η
1.4	- 1.26986	+ 3.24706	2.75	+ 1.09440	+ 1.66253
1.5	0.98107	3.26817	2.80	1.08724	1.56586
1.6	0.69954	3.25876	2.85	1.07173	1.46929
1.7	0.42881	3.22027	2.90	1.04776	1.37284
1.8	- 0.17217	3.15454	2.95	1.01521	1.27642
1.9	+ 0.06731	3.06372	3.00	0.97400	1.17980
2.0	0.28685	2.95025	3.05	0.92409	1.08251
2.1	0.48398	2.81680	3.10	0.86551	0.98384
2.2	0.65651	2.66620	3.15	0.79854	0.88280
2.3	0.80256	2.50141	3.20	0.72383	0.77807
2.4	0.92052	2.32544	3.25	0.64266	0.66814
2.5	1.00903	2.14124	3.30	0.55713	0.55179
2.6	1.06697	1.95164	3.35	0.47007	0.42887
2.7	+ 1.09334	+ 1.75918	3.40	0.38409	0.30114
			3.45	+ 0.30019	+ 0.17233

Bahn 14.

$$\xi_0 = - 4.0 \quad \eta'_0 = + 3.8$$

t	ξ	η	t	ξ	η
0.0	- 4.00000	0.00000	1.3	- 1.20407	+ 3.29635
0.1	3.97901	+ 0.37912	1.4	0.87792	3.31759
0.2	3.91640	0.75298	1.5	0.55884	3.30135
0.3	3.81324	1.11642	1.6	- 0.25144	3.24909
0.4	3.67132	1.46449	1.7	+ 0.03992	3.16275
0.5	3.49301	1.79256	1.8	0.31112	3.04476
0.6	3.28134	2.09637	1.9	0.55835	2.89793
0.7	3.03979	2.37215	2.0	0.77809	2.72544
0.8	2.77231	2.61663	2.1	0.96917	2.53073
0.9	2.48319	2.82713	2.2	1.12272	2.31746
1.0	2.17699	3.00153	2.3	1.24212	2.08937
1.1	1.85849	3.13835	2.4	+ 1.32296	+ 1.85026
1.2	- 1.53255	+ 3.23671			

Bahn 15.

$$\xi'_0 = - 0.10 \quad \eta_0 = + 1.5$$

t	ξ	η	t	ξ	η
0.0	0.00000	+ 1.50000	3.3	- 2.22042	+ 2.38100
0.1	- 0.01013	1.49826	3.4	2.20004	2.59988
0.2	0.02105	1.49309	3.5	2.15262	2.83211
0.3	0.03352	1.48459	3.6	2.07587	3.07484
0.4	0.04833	1.47292	3.7	1.96777	3.32482
0.5	0.06621	1.45832	3.8	1.82663	3.57844
0.6	0.08790	1.44112	3.9	1.65109	3.83180
0.7	0.11410	1.42170	4.0	1.44025	4.08073
0.8	0.14551	1.40049	4.1	1.19363	4.32083
0.9	0.18276	1.37800	4.2	0.91129	4.54757
1.0	0.22648	1.35477	4.3	0.59380	4.75633
1.1	0.27725	1.33136	4.4	- 0.24230	4.94246
1.2	0.33564	1.30837	4.5	+ 0.14151	5.10134
1.3	0.40212	1.28635	4.6	0.55537	5.22851
1.4	0.47712	1.26583	4.7	0.99645	5.31964
1.5	0.56092	1.24724	4.8	1.46136	5.37070
1.6	0.65357	1.23093	4.9	1.94621	5.37797
1.7	0.75481	1.21717	5.0	2.44658	5.33813
1.8	0.86396	1.20624	5.1	2.95763	5.24831
1.9	0.97982	1.19857	5.2	3.47410	5.10615
2.0	1.10069	1.19496	5.3	3.99037	4.90987
2.1	1.22449	1.19680	5.4	4.50056	4.65829
2.2	1.34902	1.20607	5.5	4.99855	4.35090
2.3	1.47214	1.22526	5.6	5.47811	3.98783
2.4	1.59196	1.25710	5.7	5.93289	3.56995
2.5	1.70673	1.30415	5.8	6.35659	3.09884
2.6	1.81483	1.36863	5.9	6.74299	2.57680
2.7	1.91457	1.45227	6.0	7.08603	2.00684
2.8	2.00409	1.55619	6.1	7.37994	1.39268
2.9	2.08134	1.68097	6.2	7.61925	0.73871
3.0	2.14408	1.82662	6.3	7.79892	+ 0.04998
3.1	2.18988	1.99261	6.4	+ 7.91438	- 0.66786
3.2	- 2.21618	+ 2.17791			

Bahn 16.

$$\xi'_0 = -0.35 \quad \eta_0 = +1.5$$

t	ξ	η	t	ξ	η
0.0	0.00000	+ 1.50000	3.0	-0.01670	+ 2.54248
0.1	-0.03500	1.50077	3.1	+ 0.09009	2.59343
0.2	0.07001	1.50306	3.2	0.20718	2.63826
0.3	0.10503	1.50693	3.3	0.33414	2.67569
0.4	0.14004	1.51243	3.4	0.47036	2.70442
0.5	0.17499	1.51967	3.5	0.61505	2.72321
0.6	0.20981	1.52875	3.6	0.76726	2.73085
0.7	0.24439	1.53982	3.7	0.92588	2.72620
0.8	0.27856	1.55302	3.8	1.08958	2.70825
0.9	0.31211	1.56854	3.9	1.25692	2.67608
1.0	0.34476	1.58654	4.0	1.42627	2.62897
1.1	0.37620	1.60723	4.1	1.59590	2.56634
1.2	0.40604	1.63080	4.2	1.76393	2.48784
1.3	0.43385	1.65744	4.3	1.92843	2.39334
1.4	0.45911	1.68734	4.4	2.08734	2.28296
1.5	0.48127	1.72067	4.5	2.23862	2.15708
1.6	0.49974	1.75753	4.6	2.38018	2.01638
1.7	0.51388	1.79804	4.7	2.50998	1.86182
1.8	0.52305	1.84220	4.8	2.62604	1.69465
1.9	0.52655	1.88998	4.9	2.72650	1.51644
2.0	0.52372	1.94124	5.0	2.80963	1.32909
2.1	0.51386	1.99577	5.1	2.87391	1.13475
2.2	0.49633	2.05323	5.2	2.91806	0.93590
2.3	0.47049	2.11319	5.3	2.94107	0.73526
2.4	0.43575	2.17511	5.4	2.94228	0.53579
2.5	0.39160	2.23830	5.5	2.92139	0.34069
2.6	0.33755	2.30200	5.6	2.87847	+ 0.15333
2.7	0.27325	2.36530	5.7	2.81403	- 0.02278
2.8	0.19842	2.42722	5.8	+ 2.72903	- 0.18398
2.9	-0.11291	+ 2.48667			

Bahn 17.

$$\xi'_0 = - 0.6 \quad \eta_0 = + 1.5$$

t	ξ	η	t	ξ	η
0.0	0.00000	+ 1.50000	2.4	+ 0.48627	+ 2.79630
0.1	- 0.05988	1.50326	2.5	0.64906	2.82697
0.2	0.11898	1.51303	2.6	0.82154	2.84422
0.3	0.17652	1.52926	2.7	1.00232	2.84662
0.4	0.23167	1.55191	2.8	1.18979	2.83289
0.5	0.28354	1.58088	2.9	1.38218	2.80190
0.6	0.33122	1.61609	3.0	1.57753	2.75275
0.7	0.37375	1.65744	3.1	1.77376	2.68473
0.8	0.41013	1.70480	3.2	1.96864	2.59742
0.9	0.43938	1.75798	3.3	2.15986	2.49065
1.0	0.46049	1.81673	3.4	2.34506	2.36457
1.1	0.47249	1.88071	3.5	2.52185	2.21962
1.2	0.47447	1.94946	3.6	2.68787	2.05657
1.3	0.46557	2.02239	3.7	2.84081	1.87643
1.4	0.44500	2.09877	3.8	2.97847	1.68053
1.5	0.41209	2.17772	3.9	3.09881	1.47053
1.6	0.36628	2.25823	4.0	3.20002	1.24840
1.7	0.30710	2.33915	4.1	3.28051	1.01642
1.8	0.23426	2.41917	4.2	3.33902	0.77713
1.9	0.14759	2.49689	4.3	3.37460	0.53330
2.0	- 0.04710	2.57081	4.4	3.38673	0.28786
2.1	+ 0.06701	2.63935	4.5	3.37529	+ 0.04389
2.2	0.19436	2.70087	4.6	3.34059	- 0.19548
2.3	+ 0.33437	+ 2.75373	4.7	+ 3.28342	- 0.42712

Bahn 18.

Ziemlich nahe periodische Bahn.

$$\xi'_0 = - 0.75 \quad \eta_0 = + 1.5$$

t	ξ	η	t	ξ	η
0.0	0.00000	+ 1.50000	0.2	- 0.14835	+ 1.51899
0.1	- 0.07480	+ 1.50476	0.3	- 0.21939	+ 1.54261

t	ξ	η	t	ξ	η
0.4	— 0.28660	+ 1.57546	2.4	+ 0.95662	+ 3.08757
0.5	0.34858	1.61736	2.5	1.17724	3.09202
0.6	0.40390	1.66808	2.6	1.40666	3.07588
0.7	0.45113	1.72733	2.7	1.64269	3.03772
0.8	0.48883	1.79476	2.8	1.88252	2.97638
0.9	0.51559	1.86991	2.9	2.12382	2.89096
1.0	0.53009	1.95218	3.0	2.36368	2.78089
1.1	0.53109	2.04078	3.1	2.59921	2.64594
1.2	0.51749	2.13474	3.2	2.82749	2.48623
1.3	0.48829	2.23289	3.3	3.04555	2.30225
1.4	0.44265	2.33383	3.4	3.25051	2.09487
1.5	0.37991	2.43601	3.5	3.43955	1.86530
1.6	0.29959	2.53766	3.6	3.61001	1.61513
1.7	0.20142	2.63689	3.7	3.75944	1.34629
1.8	— 0.08536	2.73168	3.8	3.88560	1.06100
1.9	+ 0.04839	2.81992	3.9	3.98656	0.76176
2.0	0.19935	2.89945	4.0	4.06073	0.45133
2.1	0.36679	2.96809	4.1	4.10683	+ 0.13260
2.2	0.54971	3.02370	4.2	4.12400	— 0.19135
2.3	+ 0.74684	+ 3.06418	4.3	+ 4.11175	— 0.51741

Bahn 19.

$$\xi'_0 = - 0.02 \quad \eta_0 = + 1.65$$

t	ξ	η	t	ξ	η
0.00	0.00000	+ 1.65000	1.75	— 0.27139	+ 1.52984
0.25	— 0.00580	1.64542	2.00	0.37307	1.53377
0.50	0.01640	1.63223	2.25	0.48596	1.55954
0.75	0.03629	1.61204	2.50	0.60130	1.61372
1.00	0.06936	1.58755	2.75	0.70627	1.70284
1.25	0.11864	1.56244	3.00	0.78461	1.83269
1.50	— 0.18592	+ 1.54139	3.25	— 0.81813	+ 2.00585

t	ξ	η	t	ξ	η
3.50	-0.78833	+2.21949	5.25	+1.96759	+3.17787
3.75	0.67791	2.46341	5.50	2.60770	2.90500
4.00	0.47293	2.71937	5.75	3.21408	2.47190
4.25	-0.16489	2.96201	6.00	3.74127	1.88506
4.50	+0.24695	3.16092	6.25	4.14626	1.16432
4.75	0.75397	3.28341	6.50	+4.39268	+0.34198
5.00	+1.33719	+3.29790			

Bahn 20.

$$\xi'_0 = -0.025 \quad \eta_0 = +1.65$$

t	ξ	η	t	ξ	η
0.00	0.00000	+1.65000	3.50	-0.73367	+2.21766
0.25	-0.00701	1.64574	3.75	0.61997	2.45002
0.50	0.01855	1.63345	4.00	0.41535	2.69189
0.75	0.03888	1.61469	4.25	-0.11222	2.91890
1.00	0.07170	1.59200	4.50	+0.28950	3.10201
1.25	0.11984	1.56903	4.75	0.78091	3.21014
1.50	0.18488	1.55030	5.00	1.34320	3.21360
1.75	0.26683	1.54105	5.25	1.94802	3.08750
2.00	0.36354	1.54705	5.50	2.55895	2.81522
2.25	0.46998	1.57439	5.75	3.13433	2.39113
2.50	0.57757	1.62928	6.00	3.63098	1.82239
2.75	0.67398	1.71773	6.25	4.00810	1.12938
3.00	0.74374	1.84481	6.50	+4.23211	+0.34456
3.25	-0.76950	+2.01253			

Bahn 21.

$$\xi'_0 = -0.035 \quad \eta_0 = +1.65$$

t	ξ	η	t	ξ	η
0.000	0.00000	+1.65000	0.250	-0.00943	+1.64636
0.125	-0.00446	+1.64908	0.375	-0.01541	+1.64192

t	ξ	η	t	ξ	η
0.500	— 0.02289	+ 1.63592	3.750	— 0.50324	+ 2.41627
0.625	0.03233	1.62856	3.875	0.41322	2.52313
0.750	0.04415	1.62013	4.000	0.30148	2.62860
0.875	0.05874	1.61095	4.125	0.16748	2.72974
1.000	0.07641	1.60141	4.250	— 0.01111	2.82336
1.125	0.09744	1.59194	4.375	+ 0.16725	2.90608
1.250	0.12202	1.58304	4.500	0.36672	2.97444
1.375	0.15026	1.57526	4.625	0.58586	3.02498
1.500	0.18217	1.56918	4.750	0.82264	3.05433
1.625	0.21765	1.56543	4.875	1.07451	3.05931
1.750	0.25648	1.56463	5.000	1.33835	3.03706
1.875	0.29830	1.56747	5.125	1.61054	2.98513
2.000	0.34258	1.57463	5.250	1.88703	2.90153
2.125	0.38861	1.58679	5.375	2.16339	2.78489
2.250	0.43549	1.60466	5.500	2.43488	2.63449
2.375	0.48210	1.62891	5.625	2.69660	2.45034
2.500	0.52712	1.66019	5.750	2.94362	2.23321
2.625	0.56904	1.69912	5.875	3.17102	1.98466
2.750	0.60618	1.74625	6.000	3.37415	1.70706
2.875	0.63672	1.80199	6.125	3.54868	1.40352
3.000	0.65873	1.86658	6.250	3.69079	1.07786
3.125	0.67025	1.94001	6.375	3.79726	0.73453
3.250	0.66928	2.02199	6.500	3.86564	0.37845
3.375	0.65387	2.11185	6.625	3.89430	+ 0.01494
3.500	0.62218	2.20856	6.750	+ 3.88246	— 0.35049
3.625	— 0.57247	+ 2.31066			

Bahn 22.

Periodische Bahn.

$$\xi'_0 = - 0.03722 \quad \eta_0 = + 1.65$$

t	ξ	η	t	ξ	η
0.000	0.00000	+ 1.65000	0.250	— 0.00997	+ 1.64650
0.125	— 0.00473	+ 1.64912	0.375	— 0.01618	+ 1.64223

t	ξ	η	t	ξ	η
0.500	— 0.02385	+ 1.63646	3.750	— 0.47739	+ 2.40853
0.625	0.03344	1.62940	3.875	0.38744	2.51221
0.750	0.04533	1.62133	4.000	0.27630	2.61427
0.875	0.05990	1.61257	4.125	— 0.14345	2.71185
1.000	0.07746	1.60348	4.250	+ 0.01117	2.80182
1.125	0.09827	1.59452	4.375	0.18715	2.88091
1.250	0.12251	1.58615	4.500	0.38359	2.94574
1.375	0.15027	1.57891	4.625	0.59902	2.99296
1.500	0.18157	1.57338	4.750	0.83145	3.01931
1.625	0.21628	1.57015	4.875	1.07832	3.02169
1.750	0.25419	1.56987	5.000	1.33655	2.99738
1.875	0.29493	1.57318	5.125	1.60258	2.94402
2.000	0.33796	1.58075	5.250	1.87241	2.85973
2.125	0.38257	1.59326	5.375	2.14168	2.74322
2.250	0.42787	1.61137	5.500	2.40574	2.59387
2.375	0.47280	1.63575	5.625	2.65980	2.41175
2.500	0.51601	1.66702	5.750	2.89901	2.19773
2.625	0.55604	1.70578	5.875	3.11859	1.95342
2.750	0.59124	1.75251	6.000	3.31400	1.68124
2.875	0.61984	1.80762	6.125	3.48104	1.38436
3.000	0.63997	1.87130	6.250	3.61604	1.06664
3.125	0.64971	1.94351	6.375	3.71595	0.73256
3.250	0.64712	2.02393	6.500	3.77847	0.38708
3.375	0.63030	2.11189	6.625	3.80214	+ 0.03552
3.500	0.59749	2.20634	6.750	+ 3.78640	— 0.31661
3.625	— 0.54700	+ 2.30584			

Bahn 23.

$$\xi'_0 = - 0.04 \quad \eta_0 = + 1.65$$

t	ξ	η	t	ξ	η
0.000	0.00000	+ 1.65000	0.250	— 0.01064	+ 1.64667
0.125	— 0.00508	+ 1.64916	0.375	— 0.01715	+ 1.64261

t	ξ	η	t	ξ	η
0.500	— 0.02506	+ 1.63714	3.750	— 0.44501	+ 2.39884
0.625	0.03482	1.63046	3.875	0.35516	2.49853
0.750	0.04680	1.62284	4.000	0.24476	2.59632
0.875	0.06135	1.61459	4.125	— 0.11336	2.68944
1.000	0.07878	1.60608	4.250	+ 0.03907	2.77485
1.125	0.09931	1.59774	4.375	0.21207	2.84939
1.250	0.12312	1.59004	4.500	0.40471	2.90981
1.375	0.15029	1.58348	4.625	0.61551	2.95287
1.500	0.18081	1.57863	4.750	0.84248	2.97544
1.625	0.21457	1.57607	4.875	1.08309	2.97459
1.750	0.25133	1.57643	5.000	1.33430	2.94770
1.875	0.29071	1.58033	5.125	1.59261	2.89255
2.000	0.33217	1.58842	5.250	1.85410	2.80738
2.125	0.37501	1.60136	5.375	2.11449	2.69103
2.250	0.41836	1.61978	5.500	2.36926	2.54299
2.375	0.46115	1.64432	5.625	2.61372	2.36343
2.500	0.50210	1.67558	5.750	2.84315	2.15329
2.625	0.53976	1.71411	5.875	3.05293	1.91429
2.750	0.57254	1.76036	6.000	3.23867	1.64891
2.875	0.59871	1.81468	6.125	3.39633	1.36037
3.000	0.61648	1.87721	6.250	3.52244	1.05260
3.125	0.62398	1.94789	6.375	3.61412	0.73011
3.250	0.61936	2.02636	6.500	3.66930	0.39789
3.375	0.60079	2.11194	6.625	3.68673	+ 0.06129
3.500	0.56657	2.20356	6.750	+ 3.66610	— 0.27418
3.625	— 0.51511	+ 2.29980			

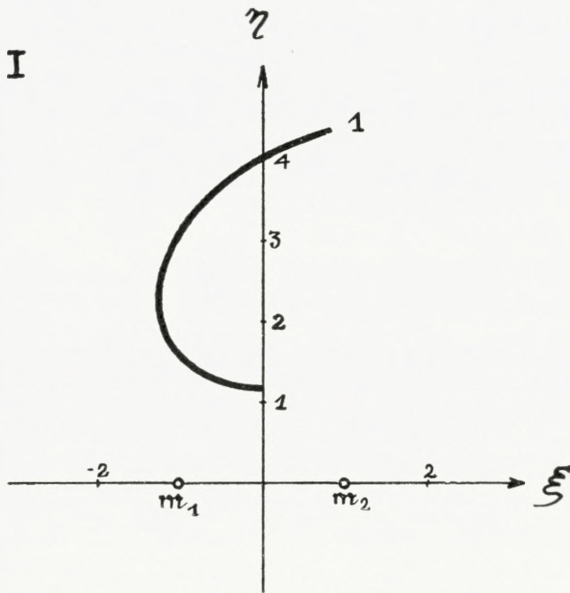
Bahn 24.

$$\xi'_0 = - 0.07 \quad \eta_0 = + 1.65$$

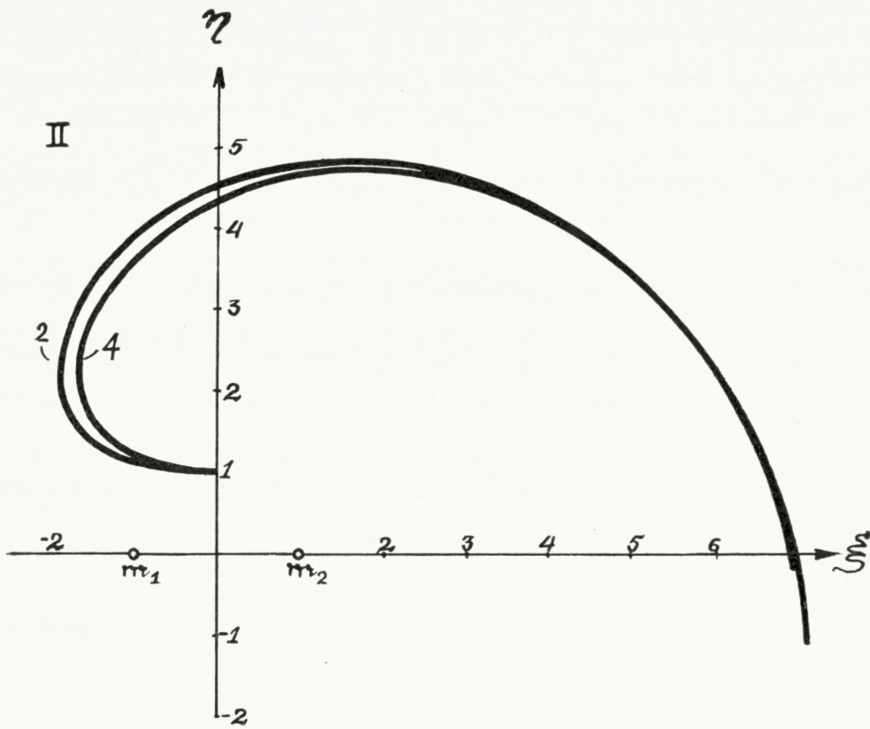
t	ξ	η	t	ξ	η
0.0	0.00000	+ 1.65000	0.2	— 0.01419	+ 1.64905
0.1	— 0.00702	+ 1.64976	0.3	— 0.02167	+ 1.64791

t	ξ	η	t	ξ	η
0.4	— 0.02958	+ 1.64637	3.6	— 0.20732	+ 2.21904
0.5	0.03806	1.64451	3.7	0.15131	2.26877
0.6	0.04724	1.64240	3.8	0.08657	2.31722
0.7	0.05723	1.64014	3.9	— 0.01298	2.36347
0.8	0.06812	1.63785	4.0	+ 0.06947	2.40655
0.9	0.08001	1.63566	4.1	0.16066	2.44545
1.0	0.09294	1.63372	4.2	0.26034	2.47911
1.1	0.10695	1.63220	4.3	0.36811	2.50646
1.2	0.12205	1.63125	4.4	0.48343	2.52644
1.3	0.13823	1.63108	4.5	0.60561	2.53799
1.4	0.15543	1.63187	4.6	0.73380	2.54012
1.5	0.17358	1.63381	4.7	0.86698	2.53189
1.6	0.19257	1.63714	4.8	1.00401	2.51245
1.7	0.21223	1.64207	4.9	1.14358	2.48107
1.8	0.23237	1.64881	5.0	1.28425	2.43716
1.9	0.25274	1.65757	5.1	1.42446	2.38027
2.0	0.27304	1.66855	5.2	1.56255	2.31015
2.1	0.29295	1.68197	5.3	1.69673	2.22672
2.2	0.31208	1.69801	5.4	1.82516	2.13017
2.3	0.33001	1.71685	5.5	1.94592	2.02087
2.4	0.34627	1.73863	5.6	2.05704	1.89950
2.5	0.36034	1.76346	5.7	2.15658	1.76699
2.6	0.37170	1.79141	5.8	2.24257	1.62457
2.7	0.37976	1.82253	5.9	2.31308	1.47375
2.8	0.38394	1.85680	6.0	2.36623	1.31637
2.9	0.38363	1.89412	6.1	2.40018	1.15459
3.0	0.37823	1.93437	6.2	2.41321	0.99091
3.1	0.36715	1.97731	6.3	2.40358	0.82818
3.2	0.34980	2.02267	6.4	2.36961	0.66964
3.3	0.32563	2.07005	6.5	2.30952	0.51899
3.4	0.29412	2.11897	6.6	2.22112	0.38037
3.5	— 0.25482	+ 2.16886	6.7	+ 2.10150	+ 0.25873

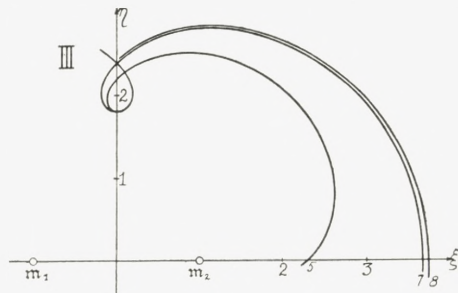
Forelagt paa Mødet den 15. November 1929.
Færdig fra Trykkeriet den 30. Juni 1930.



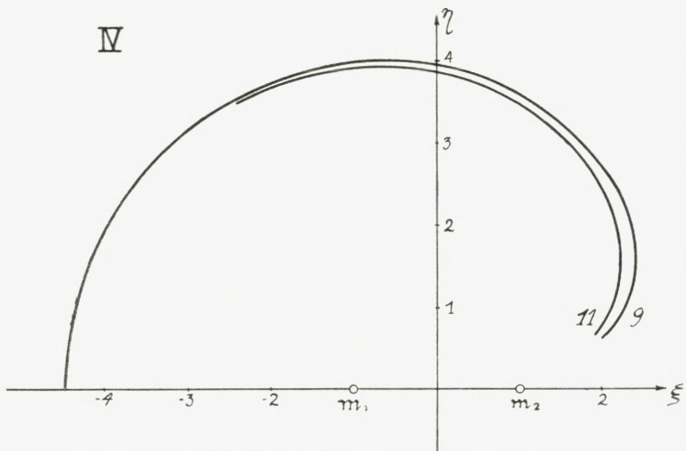
Bahn 1.



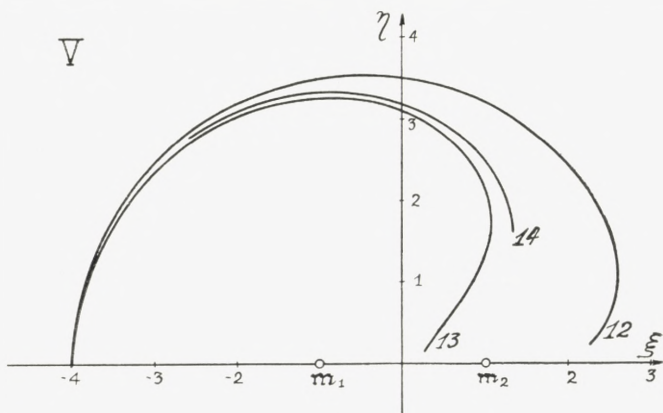
Bahnen 2 und 4.



Bahnen 5, 7 und 8.

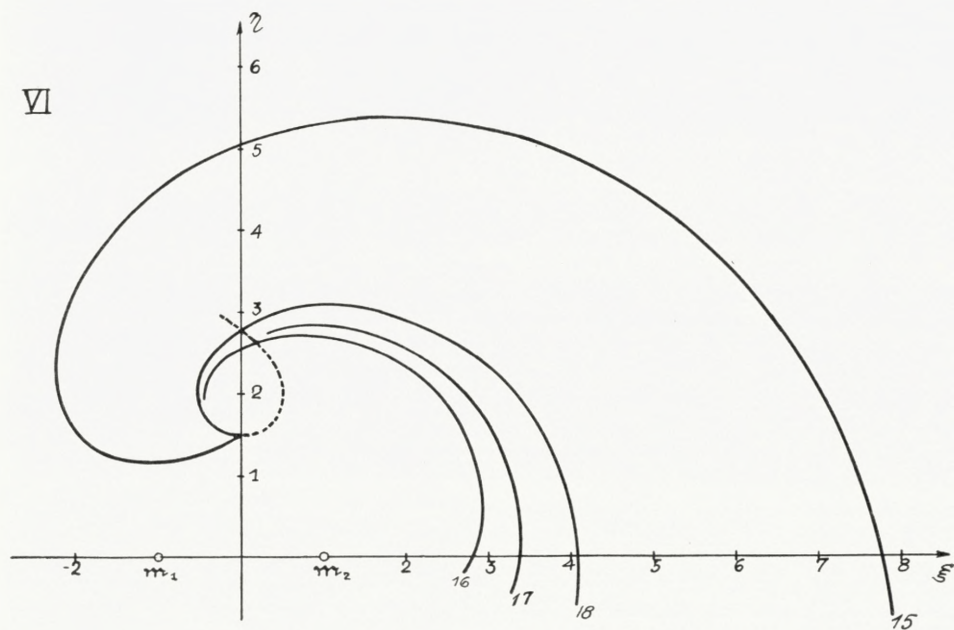


Bahnen 9 und 11.



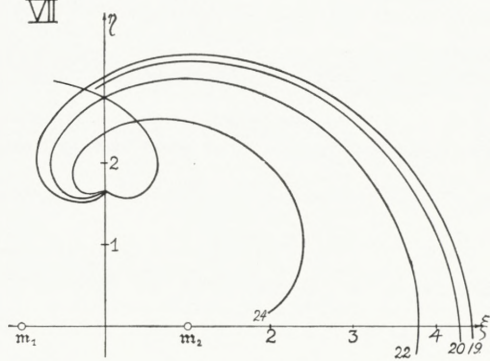
Bahnen 12, 13 und 14.

VI



Bahnen 15, 16, 17 und 18.

VII



Bahnen 19, 20, 22 und 24.

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser. **X**, 10.

KLEINERE BEITRÄGE ZUR
THEORIE DER FASTPERIODISCHEN
FUNKTIONEN

I—II

VON

HARALD BOHR



KØBENHAVN

HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUÑOS BOGTRYKKERI A/S

1930

In einigen kleineren Abhandlungen unter dem gemeinsamen Titel »Kleinere Beiträge zur Theorie der fast-periodischen Funktionen«, von denen ich hier die zwei ersten vorlege, werde ich verschiedene Einzelprobleme aus der genannten Theorie behandeln.

Dem Charakter dieser kleinen Abhandlungen entsprechend sind diese so abgefasst, dass ihr Verständniss die Kenntniss der Definition und der Haupteigenschaften der fastperiodischen Funktionen voraussetzt.

I.

Über die Argumentvariation einer fastperiodischen Funktion.

Das Ziel der vorliegenden Note ist der Beweis des folgenden von Herrn WINTNER für die Zwecke eines astronomischen Problems in einem speziellen, für die astronomische Fragestellung allerdings ausreichenden, Fall bewiesenen¹, im allgemeinen Fall als Vermutung hingestellten Satzes:

Es sei $f(x) = e^{i\varphi(x)}$ ($-\infty < x < \infty$) eine stetige und fastperiodische Funktion vom konstanten absoluten Betrage Eins; dann ist die durch die Forderung der Stetigkeit in Verbindung mit der normierenden Festsetzung $-\pi \leq \varphi(0) < \pi$ eindeutig bestimmte Funktion $\varphi(x) = \arg f(x)$ in der Gestalt

$$\varphi(x) = cx + \psi(x)$$

darstellbar, wobei c eine Konstante und $\psi(x)$ eine fastperiodische Funktion bedeutet.

Bemerken wir, dass die Umkehrung dieses Satzes trivial ist: Eine Funktion der Form $e^{i\varphi(x)}$, wobei $\varphi(x) =$

¹ A. WINTNER, Sur l'analyse anharmonique des inégalités séculaires, Rend. Accad. Lincei 1930, Marzo 3.

$cx + \psi(x)$ ist mit konstantem c und fastperiodischem $\psi(x)$, ist gewiss eine fastperiodische Funktion. Es folgt dies daraus, dass $e^{i\varphi(x)}$ das Produkt zweier fastperiodischen Funktionen ist, nämlich der periodischen Funktion e^{icx} und der (mit denselben Verschiebungszahlen wie $\psi(x)$) fastperiodischen Funktion $e^{i\psi(x)}$.

Um das Verständniss des folgenden zu erleichtern, führen wir den Beweis des aufgestellten Satzes zunächst für den einfachen Fall, wo $e^{i\varphi(x)}$ eine periodische Funktion ist, etwa mit der Periode p ; es wird sich herausstellen, dass in diesem Falle cp ein ganzes Multiplum von 2π und $\psi(x)$ eine periodische Funktion mit der Periode p ist.

Aus $e^{i\varphi(x+p)} = e^{i\varphi(x)}$ für alle x folgt zunächst, dass $\varphi(x+p) - \varphi(x) =$ einem ganzen Multiplum von 2π für jeden Wert von x ist, hieraus aber, da $\varphi(x)$ stetig ist, dass dieses Multiplum für alle x dasselbe ist. Es gibt also eine Konstante c , so dass für alle x

$$\varphi(x+p) - \varphi(x) = cp,$$

d. h.

$$\varphi(x) - cx = \varphi(x+p) - c(x+p)$$

wird; dies bedeutet aber, dass die Funktion $\varphi(x) - cx$ eine periodische Funktion mit der Periode p ist; nennen wir sie $\psi(x)$, so wird

$$\varphi(x) = cx + \psi(x).$$

Bemerken wir, dass der soeben bewiesene Satz auch in umgekehrter Richtung richtig ist: Eine Funktion der Form $e^{i\varphi(x)}$, wobei $\varphi(x) = cx + \psi(x)$ und $\psi(x)$ periodisch mit der Periode p ist, ist periodisch mit derselben Periode, sobald cp gleich einem ganzen Multiplum von 2π ist.

Um den behaupteten Satz im allgemeinen Fall einer fastperiodischen Funktion $e^{i\varphi(x)}$ zu beweisen, gehen wir von der folgenden Bemerkung aus: Besteht für irgendein $\varepsilon < 2$ und irgendwelche Zahlen x und τ die Ungleichung

$$(1) \quad \left| e^{i\varphi(x+\tau)} - e^{i\varphi(x)} \right| \leq \varepsilon,$$

dann gibt es eine eindeutig bestimmte ganze Zahl g , für die

$$(2) \quad \left| \varphi(x+\tau) - \varphi(x) - g \cdot 2\pi \right| \leq \varepsilon \cdot \frac{\pi}{2}$$

ist; ferner ist diese Zahl g , wegen der Stetigkeit von $\varphi(x)$, unabhängig von x und τ in jeder solchen zusammenhängenden Punktmenge der $x\tau$ -Ebene, auf welcher die Ungleichung (1) gilt. Von dieser Bemerkung ausgehend führen wir den Beweis des aufgestellten Satzes in drei Schritten: Zunächst wird die gleichmässige Stetigkeit der Funktion $\varphi(x)$ aus der der Funktion $e^{i\varphi(x)}$ gefolgert; sodann mit Hilfe der Existenz beliebig grosser Verschiebungszahlen von $e^{i\varphi(x)}$ die Konstante c definiert und endlich für diesen Wert von c , jetzt erst mit voller Ausnutzung der Fastperiodizität von $e^{i\varphi(x)}$, die Fastperiodizität der Funktion $\varphi(x) - cx$ bewiesen.

1°. Die gleichmässige Stetigkeit der Funktion $e^{i\varphi(x)}$ besagt folgendes: Es gibt zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, so dass, sobald $|\tau| \leq \delta$, gleichzeitig für alle x des ganzen Intervalles $-\infty < x < \infty$ die Ungleichung (1) gilt. Wir wählen $\varepsilon < 2$; nach dem soeben gesagten folgt dann aus dieser Ungleichung, ebenfalls für $|\tau| \leq \delta$ und für alle x , die Richtigkeit einer Ungleichung (2) mit einer passenden festen ganzen Zahl g ; diese muss aber gleich Null sein, weil für $\tau = 0$ die Ungleichung die Form $|g \cdot 2\pi| \leq \frac{\varepsilon}{2} \cdot \pi < \pi$ annimmt. Für $g = 0$ ist aber (2) eben die Bedingung der gleichmässigen Stetigkeit der Funktion $\varphi(x)$.

Aus der gleichmässigen Stetigkeit von $\varphi(x)$ folgt unmittelbar die folgende Eigenschaft der Funktion $\varphi(x)$: Zu jedem $\tau > 0$ gibt es ein $K = K(\tau) > 0$, so dass, sobald $|k| < \tau$ ist, gleichzeitig für alle x

$$|\varphi(x+k) - \varphi(x)| < K.$$

Wir brauchen nur für irgendein $\varepsilon < 2$ und ein entsprechendes δ eine natürliche Zahl n so gross zu wählen, dass $\frac{\tau}{n} < \delta$ wird; dann gilt wegen

$$|\varphi(x+k) - \varphi(x)| \leq \sum_{\nu=1}^n \left| \varphi\left(x + \frac{\nu k}{n}\right) - \varphi\left(x + \frac{(\nu-1)k}{n}\right) \right|$$

die Behauptung für $K = \varepsilon \cdot \frac{\pi}{2} \cdot n$.

2°. Um den Wert der Konstanten c zu definieren, betrachten wir für irgendein x und irgendein $t > 0$ den Quotienten

$$q(x, t) = \frac{\varphi(x+t) - \varphi(x)}{t};$$

wir werden beweisen, dass $q(x, t)$ für $t \rightarrow \infty$ gleichmässig in x einem bestimmten Grenzwert c zustrebt, d. h. dass es eine Zahl c gibt, so dass für jedes $\eta > 0$ gleichzeitig für alle x die Ungleichung

$$|q(x, t) - c| < \eta$$

besteht, sobald nur t grösser als eine nur von η abhängige Grösse $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\eta)$ ist; die hierdurch bestimmte Zahl c wird das c des Satzes sein. Wir werden den Beweis führen, indem wir zeigen, dass für hinreichend grosses \mathcal{A} der Unterschied zwischen der oberen und der unteren Grenze von $q(x, t)$ im Gebiete $-\infty < x < \infty$, $t > \mathcal{A}$ beliebig klein ist.

Sei $\varepsilon < 2$ eine positive Zahl und $\tau > 1$ eine zugehörige Verschiebungszahl der Funktion $e^{i\varphi(x)}$. Für alle x besteht dann die Ungleichung (1), also nach dem oben Gesagten auch eine Ungleichung (2) mit einer gewissen festen, d. h. von x unabhängigen, ganzen Zahl g . Sei jetzt $t > \tau$ eine beliebige Zahl; um den Quotienten $q(x, t)$ abzuschätzen, schreiben wir t in der Form $t = n\tau + k$ mit ganzem n und $0 \leq k < \tau$; dann folgt aus

$$\varphi(x+t) - \varphi(x) =$$

$$\varphi(x+t) - \varphi(x+n\tau) + \sum_{\nu=1}^n (\varphi(x+\nu\tau) - \varphi(x+(\nu-1)\tau))$$

in Verbindung mit der Schlussbemerkung von 1° und der Ungleichung (2) ohne weiteres für alle x

$$|\varphi(x+t) - \varphi(x) - n \cdot g \cdot 2\pi| \leq K(\tau) + n \cdot \varepsilon \cdot \frac{\pi}{2},$$

also, nach Division mit t , wegen $\frac{n}{t} \leq \frac{1}{\tau} < 1$

$$\left| q(x, t) - \frac{g \cdot 2\pi}{\tau + \frac{k}{n}} \right| \leq \frac{K(\tau)}{t} + \varepsilon \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Hieraus folgt aber, dass für hinreichend grosses \mathcal{A} der Unterschied zwischen der oberen und der unteren Grenze von $q(x, t)$ für $-\infty < x < \infty$ und $t > \mathcal{A}$ kleiner als z. B. $3 \cdot \varepsilon \cdot \frac{\pi}{2}$ sein muss, womit die aufgestellte Behauptung bewiesen ist.

3°. Mit der gefundenen Konstante c betrachten wir jetzt die Funktion $\psi(x) = \varphi(x) - cx$. Unsere Aufgabe ist, die Fastperiodizität von $\psi(x)$ zu beweisen. Bemerken wir

zunächst, dass es hierfür hinreichend ist, den Fall $c = 0$ zu betrachten, wo $\psi(x) = \varphi(x)$ ist; die Funktion $\psi(x)$ steht nämlich in derselben Beziehung zur fastperiodischen Funktion $e^{i\psi(x)} = e^{i\varphi(x)} e^{-icx}$ wie $\varphi(x)$ zur Funktion $e^{i\varphi(x)}$; und für $\psi(x)$ ist offenbar der Grenzwert von $\frac{\psi(x+t) - \psi(x)}{t}$ für $t \rightarrow \infty$ gleich Null.

Bei der Annahme $c = 0$ beweisen wir die Fastperiodizität von $\varphi(x)$ folgendermassen. Sei $\varepsilon < 2$; wie oben gezeigt, gibt es dann zu jeder zu ε gehörigen Verschiebungszahl τ von $e^{i\varphi(x)}$, d. h. zu jeder Zahl τ , für die die Ungleichung (1) für alle x besteht, eine von x unabhängige Zahl g , so dass die Ungleichung (2) für alle x besteht. Wir wollen beweisen, dass hierbei immer $g = 0$ sein muss; damit wird der Beweis vollendet sein, denn für $g = 0$ ist (2) eben die Bedingung für die Fastperiodizität von $\varphi(x)$. Dass immer $g = 0$ sein muss, ist aber unmittelbar klar; gäbe es nämlich eine Zahl τ , für die $g \neq 0$ wäre, so würde für dieses τ entweder für alle x die Ungleichung

$$\varphi(x + \tau) - \varphi(x) > \pi,$$

oder für alle x die Ungleichung

$$\varphi(x + \tau) - \varphi(x) < -\pi,$$

gelten, also beidemal für jede natürliche Zahl n die Ungleichung

$$\left| \varphi(x + n|\tau|) - \varphi(x) \right| > n\pi,$$

also

$$|c| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \varphi(x + n|\tau|) - \varphi(x) \right|}{n|\tau|} \geq \frac{\pi}{|\tau|} > 0,$$

gegen unsere Annahme.

Zum Schluss sei bemerkt, dass der bewiesene Satz, wonach für jede fastperiodische Funktion $f(x)$ vom konstanten absoluten Betrage Eins die durch die Forderung der Stetigkeit in Verbindung mit der normierenden Festsetzung $-\pi \leq \arg f(0) < \pi$ eindeutig bestimmte Funktion $\arg f(x)$ in ein lineares Glied cx und ein fastperiodisches $\psi(x)$ zerfällt, nicht allgemein für jede durchweg von Null verschiedene fastperiodische Funktion $f(x)$ richtig ist; dies zeigt z. B. die Funktion

$$f(x) = 2 + e^{ix} + e^{ix/2},$$

für die $\arg f(x)$, in derselben Weise wie oben eindeutig erklärt, nicht einmal gleichmässig stetig wird. Bemerken wir aber, dass der Satz richtig ist, sobald die Funktion $f(x)$ nicht beliebig nahe an Null herankommt, d. h. sobald $|f(x)|$ eine positive untere Grenze hat; dies folgt unmittelbar daraus, das in diesem Fall bei der Schreibweise

$$f(x) = |f(x)| e^{i\varphi(x)}$$

die Funktion $e^{i\varphi(x)} = \frac{f(x)}{|f(x)|}$, und somit nach dem obigen Satze auch die Funktion $\varphi(x) = \arg f(x)$ selbst, fastperiodisch wird.

II.

Eine Bemerkung über die Wertverteilung fast-periodischer Funktionen.

Es sei $f(x)$ ($-\infty < x < \infty$) eine stetige reellwertige periodische Funktion, etwa mit der Periode p . Bei einer beliebig gewählten festen reellen Grösse a bezeichnen wir mit $M(X)$ die Menge aller Punkte x des Intervalles $0 \leq x \leq X$, für welche $f(x) = a$ ist, und mit $L(X)$ das Mass dieser (abgeschlossenen) Menge. Aus der Periodizität von $f(x)$ folgt dann sofort, dass der Grenzwert

$$\lim_{X \rightarrow \infty} \frac{L(X)}{X}$$

existiert (und zwar gleich dem Werte $\frac{L(p)}{p}$ ist).

Für den Fall einer fastperiodischen Funktion hat Herr WINTNER¹ u. a. bewiesen, dass ein entsprechender Satz für alle Werte von a , mit eventueller Ausnahme von höchstens abzählbar vielen Werten, gilt. Die Frage, ob der Satz bei jedem a richtig ist, wurde dahingestellt gelassen. Der Zweck der vorliegenden Note ist, durch Angabe eines passenden Beispiels zu zeigen, dass solche Ausnahmewerte a tatsächlich existieren können.

¹ A. WINTNER, Diophantische Approximationen und Hermitsche Matrizen, Math. Zeitschr. Bd. 30.

Indem wir der Bequemlichkeit halber $\alpha = 0$ wählen, haben wir also zu zeigen:

Es gibt eine (reellwertige) fastperiodische Funktion $f(x)$ mit der folgenden Eigenschaft: Bezeichnet $L(X)$ das Mass der abgeschlossenen Menge aller Punkte x des Intervalles $0 \leq x \leq X$, in welchen $f(x)$ den Wert 0 annimmt, so strebt der Quotient

$$\frac{L(X)}{X}$$

für $X \rightarrow \infty$ **keinem** bestimmten Grenzwerte zu, d. h. es ist

$$\overline{\lim} \frac{L(X)}{X} > \underline{\lim} \frac{L(X)}{X}.$$

In der Tat können wir eine fastperiodische Funktion mit der gewünschten Eigenschaft durch das folgende Verfahren konstruieren.

Es sei $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ eine Folge positiver Grössen, so dass $\sum \varepsilon_n$ konvergiert. Ferner sei $(2 <) m_1 < m_2 \dots$ eine Folge positiver ganzer Zahlen, für welche

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{m_n}\right) > \frac{1}{2}$$

ist; zur Abkürzung setzen wir

$$p_0 = 1, p_1 = m_1, p_2 = m_1 m_2, \dots, p_n = m_1 m_2 \dots m_n, \dots$$

also

$$p_n = m_n p_{n-1} \quad (p_0 = 1).$$

Bei jedem $n = 1, 2, \dots$ bezeichnen wir mit $q_n(x)$ die stetige, nicht negative, reinperiodische Funktion mit der Periode p_n , welche im Periodizitätsintervall $0 \leq x \leq p_n$ durch die folgende Festlegung definiert ist (siehe Fig. 1):

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x \leq p_{n-1} \\ \sin \frac{\pi}{p_{n-1}} (x - p_{n-1}) & \text{für } p_{n-1} \leq x \leq 2p_{n-1} \\ 0 & \text{für } 2p_{n-1} \leq x \leq p_n \end{cases}$$

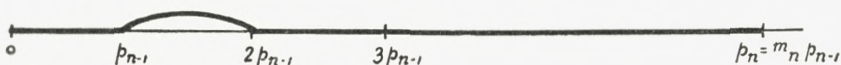


Fig. 1.

Wegen $0 \leq \varphi_n(x) \leq 1$ ist die Funktion

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \varphi_n(x),$$

als Summe einer für alle x gleichmässig konvergenten Reihe von fastperiodischen (sogar stetigen reinperiodischen) Funktionen, eine fastperiodische Funktion von x . Von dieser Funktion $f(x)$ wollen wir nachweisen, dass sie die im obigen Satz geforderte Eigenschaft besitzt.

Es bezeichne wie oben $L(X)$ das Mass der Menge aller x des Intervalles $0 \leq x \leq X$ mit $f(x) = 0$, d. h. die Gesamtlänge derjenigen Teilintervalle von $(0, X)$, in welchen $f(x)$ durchweg gleich 0 ist. Entsprechenderweise bezeichne $L_n(X)$ ($n = 1, 2, \dots$) die Gesamtlänge der Teilintervalle von $(0, X)$, wo die (mit der Periode p_n periodische) Funktion

$$f_n(x) = \sum_{\nu=1}^n \varepsilon_{\nu} \varphi_{\nu}(x)$$

den Wert 0 hat.

Da die Funktion $\varphi_{\nu}(x)$ für jedes $\nu > n$ im ganzen Intervalle $0 \leq x \leq p_n$ gleich Null ist, gelten offenbar (vgl. die Figur) für jedes $n \geq 2$ die beiden Gleichungen

$$L(p_n) = L_n(p_n) = (m_n - 1) L_{n-1}(p_{n-1})$$

und

$$L(2p_{n-1}) = L_n(2p_{n-1}) = L_n(p_{n-1}) = L_{n-1}(p_{n-1}).$$

Die letzte Gleichung ergibt

$$\frac{L(2p_{n-1})}{2p_{n-1}} = \frac{1}{2} \frac{L_{n-1}(p_{n-1})}{p_{n-1}} \leq \frac{1}{2}$$

also (für $n \rightarrow \infty$)

$$\underline{\lim} \frac{L(X)}{X} \leq \frac{1}{2}.$$

Die erste Gleichung liefert dagegen

$$\begin{aligned} \frac{L(p_n)}{p_n} &= \frac{L_n(p_n)}{p_n} = \frac{(m_n - 1) L_{n-1}(p_{n-1})}{m_n \cdot p_{n-1}} = \\ &= \left(1 - \frac{1}{m_n}\right) \frac{L_{n-1}(p_{n-1})}{p_{n-1}} \end{aligned}$$

und hieraus weiter

$$\begin{aligned} \frac{L(p_n)}{p_n} &= \left(1 - \frac{1}{m_n}\right) \left(1 - \frac{1}{m_{n-1}}\right) \frac{L_{n-2}(p_{n-2})}{p_{n-2}} = \dots = \\ &= \prod_{\nu=2}^n \left(1 - \frac{1}{m_\nu}\right) \frac{L_1(p_1)}{p_1} = \prod_{\nu=1}^n \left(1 - \frac{1}{m_\nu}\right). \end{aligned}$$

Der Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ ergibt

$$\underline{\lim} \frac{L(X)}{X} \geq \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{m_\nu}\right) > \frac{1}{2}.$$

Somit ist

$$\underline{\lim} \frac{L(X)}{X} > \underline{\lim} \frac{L(X)}{X},$$

womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Wir fügen noch einige Bemerkungen hinzu über die Werteverteilung fastperiodischer Funktionen, die komplexwertig sein dürfen, $f(x) = u(x) + iv(x)$, d. h. wo nicht ausdrücklich verlangt wird, dass die Funktionswerte alle reell sind. Für gewisse spezielle fastperiodische Funktionen — nämlich für die Riemann'sche Zetafunktion, auf vertikalen Geraden betrachtet — haben Herr Børge Jessen und ich in einer gemeinsamen Arbeit (Acta mathematica Bd. 54) die Wertverteilung genau studiert. Für diese Funktionen haben wir unter anderem gezeigt, dass es zu jedem achsenparallelen Rechteck R der komplexen Ebene eine bestimmte »Wahrscheinlichkeit« W_R in dem Sinne gibt, dass der Quotient

$$\frac{L_R(X)}{X},$$

wo $L_R(X)$ das Mass derjenigen Punktmenge des Intervalles $0 \leq x \leq X$ bezeichnet, in deren Punkten x der zugehörige Funktionswert dem Rechteck R angehört, für $R \rightarrow \infty$ gegen einen bestimmten Grenzwert W_R strebt. Das oben konstruierte Beispiel einer fastperiodischen Funktion $f(x)$ erlaubt nun unmittelbar zu zeigen, dass ein entsprechender Satz nicht für beliebige fastperiodische Funktionen gilt, und zwar weder wenn ein offenes Rechteck noch wenn ein abgeschlossenes Rechteck betrachtet wird. Genau ausgedrückt:

Es gibt eine fastperiodische Funktion $f(x)$ ($-\infty < x < \infty$) und dazu ein offenes (bzw. abgeschlossenes) Rechteck R in der komplexen Ebene, so dass der obige Quotient $\frac{L_R(X)}{X}$ **nicht** einem bestimmten Grenzwerte zustrebt.

In beiden Fällen (d. h. sei das Rechteck offen oder abgeschlossen) können wir zum Nachweis unserer Behauptung

tung die obige fastperiodische Funktion $f(x) = \sum \varepsilon_n \varphi_n(x)$ heranziehen.

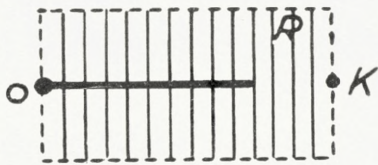


Fig. 2.

1°. Wir betrachten zunächst ein offenes Rechteck R , etwa das Rechteck $0 < u < K$, $-1 < \vartheta < 1$, wo K eine Konstante bezeichnet, die grösser

ist, als die obere Grenze von $f(x)$ (siehe Fig. 2). Die Punktmenge des Intervalles $0 \leq x \leq X$, in welcher der Funktionswert $f(x)$ unserem Rechteck R angehört, ist offenbar die Komplementärmenge derjenigen Punktmenge, in welcher $f(x) = 0$ ist. Mit den obigen Bezeichnungen ist also $L_R(X) + L(X) = X$, d. h.

$$\frac{L_R(X)}{X} = 1 - \frac{L(X)}{X}.$$

Nun strebt aber, wie wir oben gezeigt haben, $\frac{L(X)}{X}$ keinem Grenzwerte zu, und dies gilt somit auch für $\frac{L_R(X)}{X}$.

2°. Für den Fall eines abgeschlossenen Rechtecks R können wir noch einfacher verfahren. Wir brauchen nur (siehe Fig. 3) etwa das Rechteck $-1 \leq u \leq 0$, $-1 \leq v \leq 1$ zu betrachten. Hier gilt offenbar

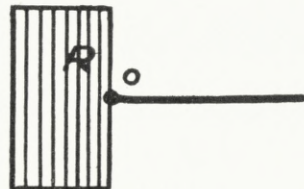


Fig. 3.

$L_R(X) = L(X)$ und es ist somit klar, dass ein Grenzwert von $\frac{L_R(X)}{X}$ nicht existiert.

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.

Mathematisk-fysiske Meddelelser. **X**, 11.

DAS KRITISCHE MASSENVERHÄLTNIS
BEI DER BEWEGUNG UM L_4 UND L_5
IM PROBLÈME RESTREINT

VON

ELIS STRÖMGREN

MIT 6 FIGUREN



KØBENHAVN

HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL

BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI A/S

1930

Es ist bekannt, dass es für Werte von μ ($m_2 : m_1 = \mu : 1 - \mu$), die zwischen 0 und etwa 0.0385 liegen, um die Librationspunkte L_4 und L_5 im problème restreint infinitesimale periodische Bahnen gibt, für grössere Werte von μ aber nicht. Mit μ wird hier immer die kleinere Masse bezeichnet; wir haben also: $\mu \leq \frac{1}{2}$.

Der kritische Wert von μ , den wir im folgenden μ_0 nennen werden, ist durch die Gleichung:

$$1 - 27 \mu_0 (1 - \mu_0) = 0$$

definiert. Es ergibt sich hieraus:

$$\mu_0 = 0.038\ 5208\ 96 \dots$$

und entsprechend für das Verhältnis zwischen den zwei Massen:

$$\frac{m_2}{m_1} = 0.040\ 0642\ 05 \dots$$

Wenn $\mu > \mu_0$, gibt es infinitesimale asymptotische (spiralförmige) Bahnen in L_4 (L_5) hinein und aus diesen Librationspunkten hinaus. Die infinitesimale Theorie dieser asymptotischen Bahnen sind in A. N. 4015 und in den Publikationen der Kopenhagener Sternwarte 47, 61 und 67 skizziert und für das spezielle Kopenhagener Massenverhältnis $\mu = \frac{1}{2}$ näher ausgeführt worden. Wie diese infinite-

simalen asymptotischen Lösungen sich ins endliche Gebiet verfolgen lassen, und wie aus ihnen die Klassifizierung einer grossen Anzahl Klassen periodischer Bahnen aufbauen lässt, ist in den Publ. 47, 60, 61, 64 und 67 gezeigt worden.

Die Existenz eines kritischen Massenwertes ist also eine Tatsache, die mit Notwendigkeit aus der infinitesimalen Theorie folgt. Eine anschauliche Vorstellung von dem Zusammenhang der Lösungen für μ -Werte grösser, bzw. kleiner als μ_0 hat aber bis jetzt gefehlt. In der vorliegenden Abhandlung werden wir dies Problem behandeln.

In der Publikation 67 (Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskabs Mathematisk-fysiske Meddelelser X, 7) habe ich die Theorie der infinitesimalen asymptotischen Lösungen für $\mu = \frac{1}{2}$ ausgeführt. Bei diesem speziellen Massenverhältnis sind die in L_4 hineingehenden und aus L_4 hinausgehenden asymptotischen Bahnen Spiegelbilder von einander: man erhält die Formeln der einen Gruppe aus den Formeln der anderen durch einfaches Wechseln von Vorzeichen. Bei anderen Werten von μ ist dies aber nicht der Fall; hier muss die Theorie für die hineinwandernden und für die hinauswandernden asymptotischen Bahnen gesondert behandelt werden, was im folgenden geschehen soll.

Die Differentialgleichungen der infinitesimalen Bewegung in der Nähe von L_4 lauten (s. Publ. 67, Seite 4):

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - 2 \frac{dy}{dt} &= \frac{3}{4}x + \frac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\mu)y \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} &= \frac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\mu)x + \frac{9}{4}y. \end{aligned} \tag{1}$$

Wenn wir der in Publ. (67) skizzierten Entwicklung folgen, erhalten wir zunächst für die beiden Fälle, I (in L_4 hineingehende Bewegung) und II (aus L_4 hinausgehende Bewegung), gemeinsam:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} > \mu > \mu_0 \\ \alpha &= +\sqrt{27\mu(1-\mu)-1} \\ a &= \frac{\alpha}{2\sqrt{1+\sqrt{1+\alpha^2}}} \\ b &= \frac{\sqrt{1+\sqrt{1+\alpha^2}}}{2} \quad (2) \\ \left(\text{woraus: } b^2 - a^2 &= \frac{1}{2}; ab = \frac{\alpha}{4}\right) \\ \sigma &= \frac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\mu) = \frac{\sqrt{23-4\alpha^2}}{4} \\ \varrho &= -\frac{5}{4} \\ T &= \frac{2\pi}{b} \end{aligned}$$

(woraus die Werte von e^{aT} und $e^{\frac{1}{2}aT}$ berechnet werden können).

Von jetzt an verläuft die Entwicklung für I und II getrennt. Wir erhalten für die hineingehende Bewegung:

I.

$$\begin{aligned} \eta &= -2a + \sigma \\ M &= \frac{\varrho\eta - 4ab^2}{\eta^2 + 4b^2} \quad (3) \\ N &= \frac{2(ab\eta + b\varrho)}{\eta^2 + 4b^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x &= x_0 e^{-at} \cos bt + \left(\frac{M}{N} x_0 - \frac{1}{N} y_0 \right) e^{-at} \sin bt \\
 y &= y_0 e^{-at} \cos bt + \left(\frac{M^2 + N^2}{N} x_0 - \frac{M}{N} y_0 \right) e^{-at} \sin bt
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

oder, wenn wir $x_0 = 0$ setzen:

$$\begin{aligned}
 x &= -\frac{1}{N} y_0 e^{-at} \sin bt \\
 y &= y_0 e^{-at} \cos bt - \frac{M}{N} y_0 e^{-at} \sin bt.
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

Für den Winkel (φ), den die Tangente der Bewegung im Punkte $0, y_0$ mit der x -Achse bildet, ergibt sich:

$$tg \varphi = M + \frac{a}{b} N.$$

Für die hinausgehende Bewegung ergibt sich:

II.

$$\theta = 2a + \sigma$$

$$P = \frac{\varrho\theta + 4ab^2}{\theta^2 + 4b^2} \tag{6}$$

$$Q = \frac{2(ab\theta - b\varrho)}{\theta^2 + 4b^2}$$

$$\begin{aligned}
 x &= x_0 e^{at} \cos bt - \left(\frac{P}{Q} x_0 - \frac{1}{Q} y_0 \right) e^{at} \sin bt \\
 y &= y_0 e^{at} \cos bt - \left(\frac{P^2 + Q^2}{Q} x_0 - \frac{P}{Q} y_0 \right) e^{at} \sin bt
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

und, für $x_0 = 0$:

$$x = \frac{1}{Q} y_0 e^{at} \sin bt \quad (8)$$

$$y = y_0 e^{at} \cos bt + \frac{P}{Q} y_0 e^{at} \sin bt.$$

Für den Winkel (χ), den die Tangente der Bewegung im Punkte 0, y_0 mit der x -Achse bildet, erhalten wir:

$$\operatorname{tg} \chi = P + \frac{a}{b} Q.$$

Wenn wir nun die Entwicklung der einen Gruppe von Bewegungen, z. B. der hinausgehenden Spiralbewegungen, (II) verfolgen, sehen wir, dass der Faktor e^{at} für einen ganzen Umlauf, also e^{aT} (für einen halben Umlauf $e^{\frac{1}{2}aT}$), bei abnehmenden Werten von μ gegen 1 konvergiert, und dass dieser Wert bei $\alpha = 0$, d. h. bei $\mu = \mu_0$, erreicht wird. Der Faktor e^{aT} bedeutet aber das Verhältnis, in dem die von einer spiralförmigen Bahn mit einer Zwischenzeit von einem ganzen Umlauf abgeschnittenen zwei Stücke der y -Achse zu einander stehen. Gleichzeitig konvergiert φ gegen denselben Wert wie χ .

Der Verlauf der numerischen Werte von e^{aT} , φ und χ bei abnehmendem μ besagt also, dass **die spiralförmigen Bewegungen**, die in verschiedenen vorgegebenen Punkten 0, y_0 einsetzen, **für $\mu = \mu_0$ in geschlossene Bahnen zerfallen**. Diese Bahnen sind Ellipsen und zwar konvergieren die hinaus- und hineingehenden Spiralbahnen für $\mu = \mu_0$ gegen dieselbe Ellipsenschar:

$$\alpha = 0$$

$$a = 0$$

$$b = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sigma = \frac{\sqrt{23}}{4}$$

$$\varrho = -\frac{5}{4}$$

$$T = 2\sqrt{2}\pi.$$

I.

$$\eta = \sigma = \frac{\sqrt{23}}{4}$$

$$M = \frac{\varrho\sigma}{\sigma^2 + 2} = -\frac{\sqrt{23}}{11}$$

$$N = \frac{\varrho\sqrt{2}}{\sigma^2 + 2} = -\frac{4\sqrt{2}}{11}$$

II.

$$\theta = \sigma$$

$$P = \frac{\varrho\sigma}{\sigma^2 + 2} = M$$

$$Q = -\frac{\varrho\sqrt{2}}{\sigma^2 + 2} = -N$$

und, für $x_0 = 0$, bei I und II identisch gleich:

$$x = \frac{11}{4\sqrt{2}} y_0 \sin \frac{1}{\sqrt{2}} t$$

$$y = y_0 \cos \frac{1}{\sqrt{2}} t - \frac{\sqrt{23}}{4\sqrt{2}} y_0 \sin \frac{1}{\sqrt{2}} t.$$

Für den Winkel ($\varphi = \chi$), den die Tangente der Bahn im Punkte 0, y_0 mit der x -Achse bildet, erhalten wir:

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{\sqrt{23}}{11}; \quad \varphi = -23^\circ 33'.39.$$

Für den Winkel (Ω), den die kleine Achse der Ellipse mit der x -Achse macht, ergibt sich durch eine einfache Rechnung:

$$\operatorname{tg} \Omega = \frac{3 + 4\sqrt{2}}{\sqrt{23}}; \quad \Omega = 61^\circ 0'.83$$

und für das Verhältnis der zwei Halbachsen der Ellipsen:
 $\frac{A}{B} = 1 + \sqrt{2}$.

Es kann noch erwähnt werden, dass die Bewegung in den Ellipsen in dem benutzten rotierenden Achsensystem unter konstanter Flächengeschwindigkeit vor sich geht, und zwar so, dass diese Bewegung (in dem rotierenden System) einer Zentralkraft entspricht, die dem Radiusvektor proportional ist. Dasselbe ist übrigens auch mit der später unten (S. 11 und 14) besprochenen allgemeineren Ellipsenbewegung für $\mu_0 > \mu > 0$ der Fall.

Im folgenden stelle ich eine Reihe numerischer Werte zusammen, die den Entwicklungsgang von $\mu = \frac{1}{2}$ bis zu $\mu = \mu_0$ erläutern. Für einige der gegebenen μ -Werte sind die entsprechenden Bahnbewegungen in den Figuren 1—6 dargestellt (vgl. S. 14). Das Hauptinteresse knüpft sich an die Entwicklung der Grössen $e^{\frac{1}{2}aT}$, φ und χ .

μ	a	b	T	$e^{\frac{1}{2}aT}$
0.50	+ 0.63208	+ 0.94843	6.6248	8.1148
0.45	+ 0.62949	+ 0.94672	6.6368	8.0755
0.40	+ 0.62160	+ 0.94150	6.6736	7.9580
0.35	+ 0.60793	+ 0.93252	6.7375	7.7514
0.30	+ 0.58761	+ 0.91942	6.8340	7.4472
0.25	+ 0.55903	+ 0.90136	6.9707	7.0172
0.20	+ 0.51924	+ 0.87728	7.1622	6.4201
0.15	+ 0.46244	+ 0.84490	7.4365	5.5811

μ	a	b	T	$e^{\frac{1}{2}aT}$
0.10	+ 0.37378	+ 0.79982	7.8558	4.3414
0.05	+ 0.18199	+ 0.73015	8.6054	2.1880
0.04	+ 0.06754	+ 0.71015	8.8476	1.2897
0.039	+ 0.03857	+ 0.70816	8.8726	1.1867
0.0387	+ 0.02358	+ 0.70750	8.8808	1.1104
0.0386	+ 0.01569	+ 0.70729	8.8836	1.0722
μ_0	0.00000	+ 0.70711	8.8857	1.0000

μ	I			II		
	M	N	φ	P	Q	χ
0.50	- 0.13357	- 0.74800	- 32°18'	+ 0.13357	+ 0.74800	+ 32°18'
0.45	- 0.17396	- 0.76390	- 34 17	+ 0.09442	+ 0.72930	+ 30 5
0.40	- 0.21600	- 0.77664	- 36 5	+ 0.05603	+ 0.70858	+ 27 39
0.35	- 0.26005	- 0.78540	- 37 40	+ 0.01779	+ 0.68551	+ 24 55
0.30	- 0.30630	- 0.78900	- 39 2	- 0.02106	+ 0.66039	+ 21 51
0.25	- 0.35484	- 0.78558	- 40 6	- 0.06160	+ 0.63295	+ 18 19
0.20	- 0.40522	- 0.77227	- 40 46	- 0.10557	+ 0.60304	+ 14 7
0.15	- 0.45560	- 0.74393	- 40 47	- 0.15632	+ 0.57006	+ 8 51
0.10	- 0.49966	- 0.69033	- 39 26	- 0.22204	+ 0.53344	+ <u>1 34</u>
0.05	- 0.50150	- 0.57950	- 32 52	- 0.34092	+ 0.49807	- 12 14
0.04	- 0.46523	- 0.53287	- 27 17	- 0.40314	+ 0.50255	- 19 34
0.039	- 0.45317	- 0.52404	- 25 43	- 0.41754	+ 0.50673	- 21 18
0.0386	- 0.44314	- 0.51797	- 24 27	- 0.42861	+ 0.51093	- 22 39
μ_0	- 0.43598	- 0.51426	- 23 33.39	- 0.43598	+ 0.51426	- 23 33.39

Hiermit haben wir eine anschauliche Vorstellung von der Bedeutung des kritischen Massenwertes im System $\frac{1}{2} > \mu \geq \mu_0$ erreicht. Wenn wir uns nun dem Werte $\mu = \mu_0$ von der anderen Seite ($\mu_0 > \mu > 0$) her (s. z. B. CHARLIER'S

Mechanik des Himmels) nähern, zeigt es sich, dass die eben gefundene Ellipsenschar, in die die Spiralbahnen für $\mu = \mu_0$ entarten, mit einer Ellipsenschar identisch ist, gegen welche die bei $\mu < \mu_0$ existierenden zwei Klassen infinitesimaler *periodischer* Bahnen konvergieren.

Wir bauen die Theorie dieser Bahnen in analoger Weise auf wie oben für die Spiralbahnen und erhalten:

III.

$$\mu_0 > \mu > 0$$

$$\delta = \sqrt{1 - 27\mu + 27\mu^2}$$

$$\sigma = \frac{3\sqrt{3}}{4} (1 - 2\mu) = \frac{\sqrt{23 + 4\delta^2}}{4}$$

$$\beta_1 = \sqrt{\frac{1 - \delta}{2}} \quad \beta_2 = \sqrt{\frac{1 + \delta}{2}}.$$

Von jetzt an teilt sich die Rechnung in zwei Gruppen auf, die eine für β_1 , die andere für β_2 :

$$S = -\frac{\sigma\left(\beta^2 + \frac{3}{4}\right)}{\sigma^2 + 4\beta^2}$$

$$U = \frac{2\beta\left(\beta^2 + \frac{3}{4}\right)}{\sigma^2 + 4\beta^2}$$

$$x = x_0 \cos \beta t - \left(\frac{S}{U} x_0 - \frac{1}{U} y_0\right) \sin \beta t$$

$$y = y_0 \cos \beta t - \left(\frac{S^2 + U^2}{U} x_0 - \frac{S}{U} y_0\right) \sin \beta t$$

und, für $x_0 = 0$:

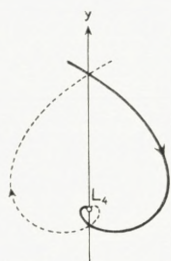


Fig. 1.
 $\mu = 0.5.$

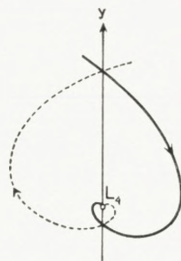


Fig. 2.
 $\mu = 0.3.$

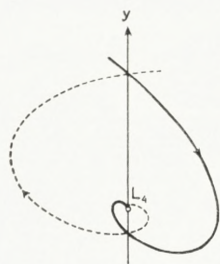


Fig. 3.
 $\mu = 0.15.$

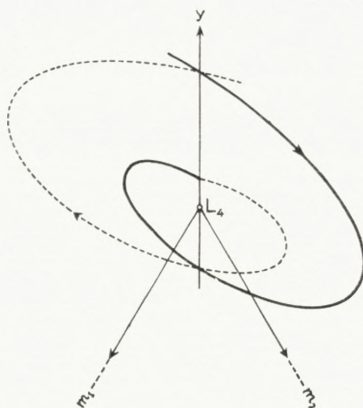


Fig. 4.
 $\mu = 0.05.$

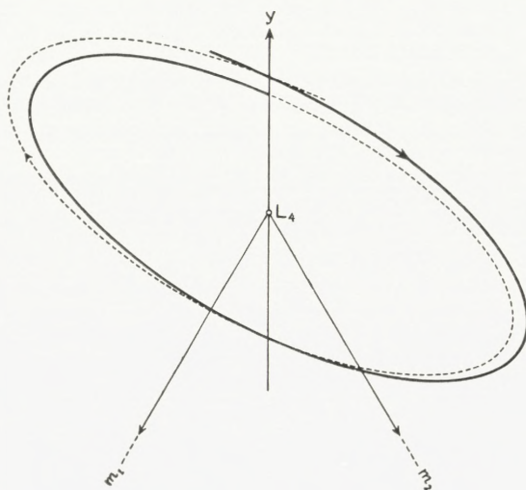


Fig. 5.
 $\mu = 0.0386.$

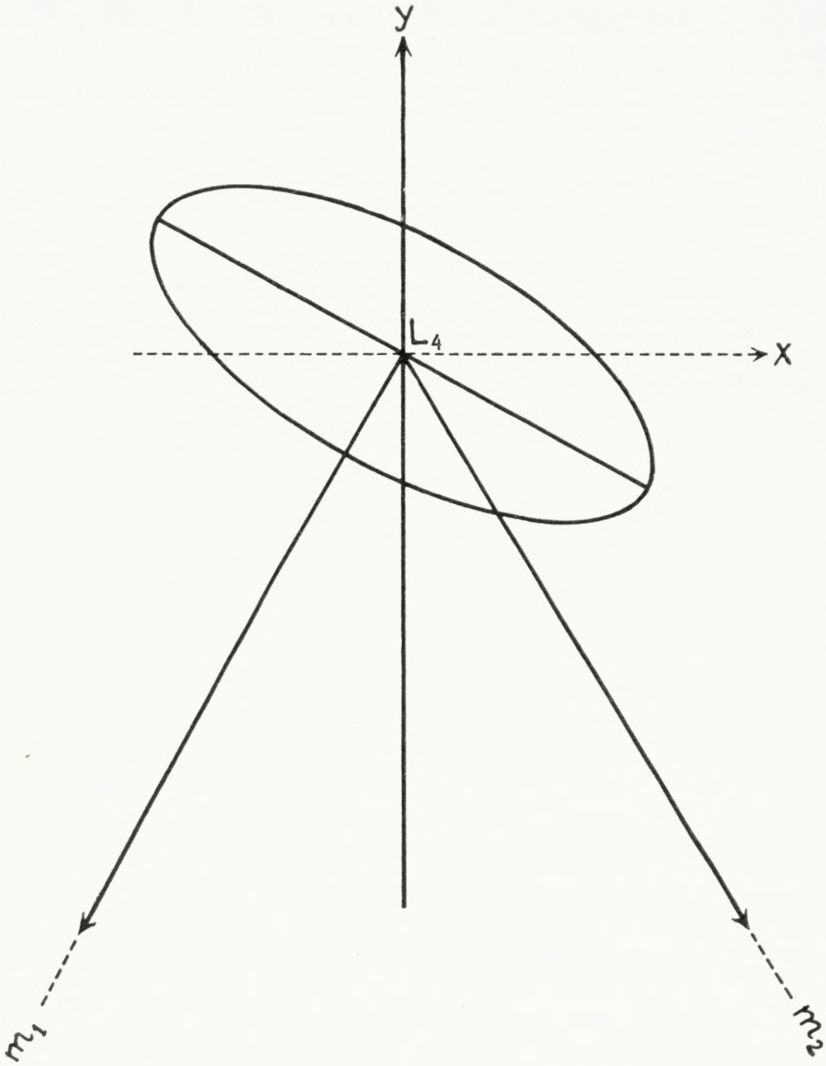


Fig. 6.
 $\mu = \mu_0$.

$$x = \frac{1}{U} y_0 \sin \beta t$$

$$y = y_0 \cos \beta t + \frac{S}{U} y_0 \sin \beta t.$$

Für den Winkel (ϑ), den die Tangente der Bahn im Punkte 0, y_0 mit der x -Achse macht, erhalten wir: $\operatorname{tg} \vartheta = S$.

Für $\mu = 0$ entarten diese zwei Lösungen in den Punkt L_4 ; für $\mu = \mu_0$ fallen die zwei Ellipsenscharen zusammen ($\beta_1 = \beta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$) und werden mit der oben (S. 8—9) angegebenen Ellipsenschar identisch, gegen welche — von der anderen Seite her kommend — die spiralförmigen asymptotischen Bahnen für $\mu = \mu_0$ konvergieren (so wird z. B. für beide Scharen $\vartheta_{\mu_0} = -23^\circ 33'.39$).

In den Figuren 1—6 ist die oben angegebene Entwicklung dargestellt. Fig. 1—5 geben die Entwicklung der asymptotischen Bahnen von $\mu = 0.5$ bis $\mu = 0.0386$; die in den Librationspunkt hineinwandernden Bahnen sind voll ausgezogen, die hinauswandernden gestrichelt. Fig. 6 stellt ein Individuum der Ellipsenschar für $\mu = \mu_0$ dar, gegen die einerseits diese infinitesimalen *asymptotischen* und andererseits auch die infinitesimalen *periodischen* Bahnen konvergieren.

Hiermit ist der Zusammenhang des Systems asymptotischer und periodischer infinitesimaler Bahnen in der Umgebung von L_4 (L_5) für alle Massenverhältnisse klargelegt.

Für einige Kontrollrechnungen habe ich Herrn Lektor N. BENNEDSEN zu danken, für die Ausführung der Zeichnungen zu den Figuren Herrn Cand. mag. JENS P. MÖLLER.

Universitets-Observatorium, Kopenhagen, 1930, Mai 26.

ELIS STRÖMGREN.

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.

Mathematisk-fysiske Meddelelser. **X**, 12.

KLEINERE BEITRÄGE ZUR
THEORIE DER FASTPERIODISCHEN
FUNKTIONEN

III—IV

VON

HARALD BOHR



KØBENHAVN

HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL

BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI A/S

1931

III.

Dirichletsche Reihen und fastperiodische Funktionen.

Es sei

$$f(s) = \sum_1^{\infty} \frac{a_n}{n^s} = \sum_1^{\infty} a_n e^{-s \log n}$$

eine gewöhnliche Dirichletsche Reihe mit endlicher Konvergenzabszisse λ . Dann besitzt sie auch eine endliche gleichmässige Konvergenzabszisse μ , und zwar ist $\lambda \leq \mu \leq \lambda + 1$. Die durch die Reihe dargestellte Funktion $f(s)$ ist offenbar fastperiodisch für $\sigma > \mu + \varepsilon$, dagegen nicht für $\sigma > \mu - \varepsilon$ (da sie in der Halbebene $\sigma > \mu - \varepsilon$ nicht einmal regulär und beschränkt ist).

Wir betrachten nunmehr eine Dirichletsche Reihe im ROGOSINSKI'schen Sinne, d. h. eine Reihe der Form

$$(1) \quad \sum_1^{\infty} a'_n n^s + \sum_2^{\infty} \frac{a''_n}{n^s} = \sum_1^{\infty} a'_n e^{s \log n} + \sum_2^{\infty} a''_n e^{-s \log n}.$$

Die erste Teilreihe $\sum a'_n n^s$ möge als Konvergenzabszisse, bzw. gleichmässige Konvergenzabszisse die Zahl λ_1 bzw. die Zahl μ_1 besitzen; entsprechenderweise bezeichnen wir die Konvergenzabszisse, bzw. gleichmässige Konvergenzabszisse der zweiten Teilreihe $\sum a''_n n^{-s}$ mit λ_2 bzw. μ_2 . Hierbei ist $\lambda_1 \geq \mu_1$, $\lambda_2 \leq \mu_2$. Wir nehmen an, dass $\lambda_1 > \lambda_2$

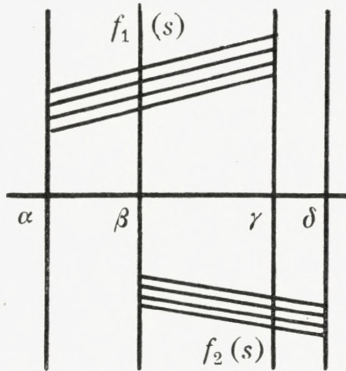
ist, so dass die Gesamtreihe (1) einen Konvergenzstreifen $\lambda_2 < \sigma < \lambda_1$ besitzt, in welchem sie alsdann eine reguläre Funktion $F(s)$ darstellt. Für $\lambda_2 + \varepsilon < \sigma < \lambda_1 - \varepsilon$ ist $F(s)$ bekanntlich gleich $O(|t|)$, gleichmässig in σ . Es sei nunmehr angenommen, dass es innerhalb des Konvergenzstreifens $\lambda_2 < \sigma < \lambda_1$ einen Teilstreifen $\eta_2 \leq \sigma \leq \eta_1$ gibt, in welchem die Funktion $F(s)$ beschränkt ist. In einem Gespräch mit Herrn ROGOSINSKI entstand die Frage, ob daraus die Fastperiodizität von $F(s)$ in $\eta_2 + \varepsilon < \sigma < \eta_1 - \varepsilon$ gefolgert werden kann. Diese Frage wäre sofort bejahend zu beantworten, wenn wir wüssten, dass nicht nur die Funktion $F(s)$, sondern jeder der beiden Summanden $f_1(s) = \sum a'_n n^s$ und $f_2(s) = \sum a''_n n^{-s}$ im Streifen $\eta_2 \leq \sigma \leq \eta_1$ beschränkt wäre; denn nach bekannten Sätzen wäre alsdann $\mu_1 \geq \eta_1$ und $\mu_2 \leq \eta_2$, und die Funktion $F(s)$ wäre somit im Streifen $\eta_2 + \varepsilon < \sigma < \eta_1 - \varepsilon$ einfach die Summe zweier fastperiodischer Funktionen $f_1(s)$ und $f_2(s)$.

In der vorliegenden Note soll nun gezeigt werden, dass in der Tat aus der Beschränktheit von $F(s) = f_1(s) + f_2(s)$ im Streifen $\eta_2 \leq \sigma \leq \eta_1$ die Beschränktheit jedes der beiden Summanden $f_1(s)$ und $f_2(s)$ im genannten Streifen $\eta_2 \leq \sigma \leq \eta_1$ gefolgert werden kann. Damit wird alsdann gezeigt sein, dass die obige Frage bejahend zu beantworten ist.

Die erwähnte Beschränktheit von $f_1(s)$ und $f_2(s)$ in $\eta_2 \leq \sigma \leq \eta_1$ ergibt sich als unmittelbares Corollar (man nehme etwa $\alpha = \eta_2 - 1$, $\beta = \eta_2$, $\gamma = \eta_1$, $\delta = \eta_1 + 1$) aus dem folgenden allgemeinen funktionentheoretischen Satze, der auch an und für sich ein gewisses Interesse darbietet.

Satz. Es seien (siehe Figur) $\alpha < \beta < \gamma < \delta$ vier reelle Zahlen, und es seien $f_1(s)$ eine im Streifen $\alpha \leq \sigma \leq \gamma$ analytische Funktion und $f_2(s)$ eine im

Streifen $\beta \leq \sigma \leq \delta$ analytische Funktion, welche den folgenden Bedingungen genügen:



1°. Es gibt eine positive Konstante K , so dass

$$f_1(s) = O(|t|^K) \quad \text{in } \alpha \leq \sigma \leq \gamma,$$

$$f_2(s) = O(|t|^K) \quad \text{in } \beta \leq \sigma \leq \delta.$$

2°. Es ist $f_1(s)$ auf der Geraden $\sigma = \alpha$, und $f_2(s)$ auf der Geraden $\sigma = \delta$ beschränkt, d. h. es gibt eine positive Konstante k , so dass

$$|f_1(\alpha + it)| < k, \quad |f_2(\delta + it)| < k \quad (-\infty < t < \infty).$$

3°. Im gemeinsamen Streifen $\beta \leq \sigma \leq \gamma$ ist die Summe $F(s) = f_1(s) + f_2(s)$ beschränkt, d. h. es gibt eine positive Konstante c , so dass

$$|F(s)| < c \quad \text{für } \beta \leq \sigma \leq \gamma.$$

Dann ist $f_1(s)$ beschränkt im Streifen $\alpha \leq \sigma \leq \gamma$, und $f_2(s)$ ist beschränkt im Streifen $\beta \leq \sigma \leq \delta$.

Beweis. Es genügt offenbar zu beweisen, dass $f_1(s)$ auf der Geraden $\sigma = \gamma$ beschränkt ist; denn $f_1(s)$ ist

alsdann auf den beiden Begrenzungsgeraden des Streifens $\alpha \leq \sigma \leq \gamma$ beschränkt und daher, nach einem klassischen Satze von PHRAGMÉN und LINDELÖF, auch im Innern dieses Streifens beschränkt; hieraus ergibt sich dann weiter, dass $f_2(s) = F(s) - f_1(s)$ auf der Geraden $\sigma = \beta$ beschränkt ist und somit auch, wiederum nach dem PHRAGMÉN-LINDELÖF-schen Satze, im ganzen Streifen $\beta \leq \sigma \leq \delta$ beschränkt ausfällt. Aus Symmetriegründen genügt es natürlich auch — statt der Beschränktheit von $f_1(s)$ auf der Geraden $\sigma = \gamma$ — die Beschränktheit von $f_2(s)$ auf der Geraden $\sigma = \beta$ nachzuweisen.

Wir führen den Beweis indirekt, nehmen also an, dass $f_1(s)$ auf der Geraden $\sigma = \gamma$ und $f_2(s)$ auf der Geraden $\sigma = \beta$ nicht beschränkt sind, und haben daraus einen Widerspruch herzuleiten.

Aus Bequemlichkeitsgründen wollen wir annehmen, dass $\alpha > 0$ ist (so dass der ganze Streifen $\alpha \leq \sigma \leq \delta$ der Halbebene $\sigma > 0$ angehört), was natürlich keine Beschränkung der Allgemeinheit bedeutet.

Es bezeichne N die kleinste positive ganze Zahl grösser als K , und es bezeichne η eine positive Grösse, die wir nachher über alle Grenzen werden wachsen lassen. Wir bilden, bei beliebigem festgehaltenem $\eta > 0$, die beiden analytischen Hilfsfunktionen

$$g_1(s) = f_1(s) \cdot \frac{\eta^N}{(s + \eta)^N} \quad (\text{für } \alpha \leq \sigma \leq \gamma),$$

$$g_2(s) = f_2(s) \cdot \frac{\eta^N}{(s + \eta)^N} \quad (\text{für } \beta \leq \sigma \leq \delta).$$

Wegen $N > K$ ist $g_1(s)$ beschränkt in $\alpha \leq \sigma \leq \gamma$, und $g_2(s)$ beschränkt in $\beta \leq \sigma \leq \delta$. Wir führen, stets bei festgehaltenem η , die Bezeichnungen ein:

$$L_1(\sigma) = \text{Ob. Gr.} \left| g_1(\sigma + it) \right| \quad \text{für jedes } \sigma \text{ in } \alpha \leq \sigma \leq \gamma$$

$$L_2(\sigma) = \text{Ob. Gr.} \left| g_2(\sigma + it) \right| \quad \text{für jedes } \sigma \text{ in } \beta \leq \sigma \leq \delta.$$

Wir werden beweisen, dass

$$(2a) \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} \{ L_1(\gamma) - L_1(\beta) \} = +\infty$$

und

$$(2b) \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} \{ L_2(\beta) - L_2(\gamma) \} = +\infty.$$

Aus Symmetriegründen genügt es, eine dieser beiden Limesgleichungen (2 a) und (2 b) zu beweisen. Beweisen wir etwa (2 a).

Nach dem Dreigeradensatz von DOETSCH ist $\log L_1(\sigma)$ eine konvexe Funktion von σ im Intervalle $\alpha \leq \sigma \leq \gamma$. Somit ist

$$\log L_1(\beta) \leq q_1 \log L_1(\gamma) + q_2 \log L_1(\alpha),$$

wo $q_1 = \frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha}$ und $q_2 = \frac{\gamma - \beta}{\gamma - \alpha}$ zwei positive (von η unabhängige) Konstanten < 1 bezeichnen. Nun gilt aber in der ganzen Halbebene $\sigma > 0$ (bei festgehaltenem $\eta > 0$) die Ungleichung

$$\left| \frac{\eta^N}{(s + \eta)^N} \right| \leq \frac{\eta^N}{(\sigma + \eta)^N} < 1,$$

und es ist somit

$$L_1(\alpha) \leq \text{Ob. Gr.} \left| f_1(\alpha + it) \right| \leq k$$

d. h.

$$\log L_1(\alpha) \leq \log k.$$

Wir erhalten somit die Ungleichung

$$\log L_1(\beta) \leq q_1 \log L_1(\gamma) + q_2 \log k$$

oder anders geschrieben

$$(3) \quad \log L_1(\gamma) - \log L_1(\beta) \geq (1 - q_1) \log L_1(\gamma) - q_2 \log k.$$

Nunmehr lassen wir $\eta \rightarrow \infty$. Aus der vorausgesetzten Nicht-Beschränktheit von $f_1(s)$ auf der Geraden $\sigma = \gamma$ folgt alsdann — und dies ist der springende Punkt des Beweises — dass $L_1(\gamma)$ über alle Grenzen wächst; in der Tat können wir zu einem beliebig gegebenen $C > 0$ zunächst einen Punkt $s_0 = \gamma + it_0$ so wählen, dass $|f_1(s_0)| > C$ ist, und danach, wegen $\frac{\eta^N}{(s_0 + \eta)^N} \rightarrow 1$ für $\eta \rightarrow \infty$, ein η_0 so wählen, dass für jedes $\eta > \eta_0$

$$|g_1(s_0)| = |f_1(s_0)| \cdot \left| \frac{\eta^N}{(s_0 + \eta)^N} \right| > C$$

und also a fortiori

$$L_1(\gamma) > C$$

ist.

Aus $L_1(\gamma) \rightarrow \infty$ für $\eta \rightarrow \infty$ folgt nunmehr nach (3) die Gleichung

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \{ \log L_1(\gamma) - \log L_1(\beta) \} = \infty$$

und also a fortiori die zu beweisende Gleichung

$$(2a) \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} \{ L_1(\gamma) - L_1(\beta) \} = \infty.$$

Nachdem die beiden (symmetrischen) Limesgleichungen

$$(2a) \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} \{ L_1(\gamma) - L_1(\beta) \} = +\infty$$

und

$$(2b) \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} \{ L_2(\gamma) - L_2(\beta) \} = -\infty$$

somit dargetan sind, können wir sofort den Beweis vollenden, d. h. den gewünschten Widerspruch herleiten. In der Tat gilt bei jedem $\eta > 0$ im Streifen $\beta \leq \sigma \leq \gamma$ die Ungleichung

$$\begin{aligned} & \left| |g_1(s)| - |g_2(s)| \right| \leq |g_1(s) + g_2(s)| = \\ & = \left| (f_1(s) + f_2(s)) \cdot \left| \frac{\eta^N}{(s+\eta)^N} \right| \right| = |F(s)| \cdot \left| \frac{\eta^N}{(s+\eta)^N} \right| < c \cdot 1 = c, \end{aligned}$$

also speziell (für $\sigma = \beta$ und $\sigma = \gamma$)

$$|L_1(\beta) - L_2(\beta)| \leq c, \quad |L_1(\gamma) - L_2(\gamma)| \leq c;$$

somit ist für jedes $\eta > 0$

$$L_1(\gamma) - L_1(\beta) \leq L_2(\gamma) - L_2(\beta) + 2c,$$

welche letztere Ungleichung in offenkundigem Widerspruch zu (2 a) und (2 b) steht.

IV.

Über die Funktionalgleichung $t = f(t) + \varphi(f(t))$ bei einer gegebenen fastperiodischen Funktion $\varphi(x)$.

Bei einer allgemeinen Untersuchung über die Umkehrung fastperiodischer Funktionen einer komplexen Veränderlichen wurde ich auf ein Problem geführt, dessen Analogon für fastperiodische Funktionen einer reellen Veränderlichen ich in der vorliegenden Note kurz besprechen werde.

Es sei $\varphi(x)$ eine, für $-\infty < x < \infty$ definierte, reelle Funktion der reellen Veränderlichen x , welche für alle x differentiierbar ist, und deren Differentialquotient für alle x einer Ungleichung der Form $|\varphi'(x)| < k < 1$ genügt. Ich betrachte die Funktion

$$t = g(x) = x + \varphi(x) \quad (-\infty < x < \infty).$$

Wegen $\frac{dt}{dx} = 1 + \varphi'(x) > 1 - k (> 0)$ ist $t = g(x)$ eine monoton wachsende Funktion von x , welche sämtliche Werte $-\infty < t < \infty$ annimmt. Somit gibt es zu der Funktion $t = g(x)$ eine, für $-\infty < t < \infty$ definierte, inverse Funk-

tion $x = f(t)$, welche ebenfalls monoton wachsend ist und alle Werte $-\infty < x < \infty$ annimmt. Wir schreiben diese inverse Funktion in der Form

$$x = f(t) = t - \psi(t).$$

Unser Problem ist nun das folgende: Was lässt sich über die Natur der Funktion $\psi(t)$ aussagen, wenn die gegebene Funktion $\varphi(x)$ fastperiodisch ist? Dies Problem wird durch den folgenden Satz gelöst.

Satz. Es sei $\varphi(x)$ eine fastperiodische Funktion, die für alle x differentiierbar ist und der Ungleichung $|\varphi'(x)| < k < 1$ genügt. Wir betrachten die Funktion

$$t = x + \varphi(x) \quad (-\infty < x < \infty)$$

und schreiben die inverse Funktion in der Form

$$x = t - \psi(t) \quad (-\infty < t < \infty).$$

Dann ist $\psi(t)$ wieder eine fastperiodische Funktion. Ferner gehören die Fourierexponenten von $\psi(t)$ alle dem Modul M_φ der Funktion $\varphi(x)$ an (d. h. dem kleinsten Zahlenmodul, welcher die sämtlichen Fourierexponenten der Funktion $\varphi(x)$ enthält).

Beweis. Um die Fastperiodizität der Funktion $\psi(t)$ darzutun, wollen wir die zur Funktion $t = x + \varphi(x)$ inverse Funktion $x = t - \psi(t)$ mittels der Methode der sukzessiven Approximation berechnen. Zu diesem Zwecke

schreiben wir die zu lösende Gleichung $t = x + \varphi(x)$ in der Form

$$x = t - \varphi(x).$$

Als Ausgangsfunktion bei der Approximation benutzen wir die Funktion

$$x = f_0(t) = t = t - \psi_0(t),$$

wo $\psi_0(t)$ identisch Null bedeutet. Danach bilden wir, durch sukzessives Einsetzen in die rechte Seite der Gleichung $x = t - \varphi(x)$, die Funktionenfolge

$$f_1(t) = t - \varphi\{f_0(t)\} = t - \varphi\{t - \psi_0(t)\} = t - \psi_1(t),$$

$$f_2(t) = t - \varphi\{f_1(t)\} = t - \varphi\{t - \psi_1(t)\} = t - \psi_2(t),$$

$$\dots$$

$$f_{n+1}(t) = t - \varphi\{f_n(t)\} = t - \varphi\{t - \psi_n(t)\} = t - \psi_{n+1}(t),$$

Zunächst wollen wir beweisen, dass bei jedem festen n die Funktion $\psi_n(t)$ eine fastperiodische Funktion von t ist, und zwar wollen wir genauer beweisen, dass die Fastperiodizität von $\psi_n(t)$ sogar in dem Sinne von der Fastperiodizität der gegebenen Funktion $\varphi(x)$ »majorisiert« wird, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, derart, dass jede zu δ gehörige Verschiebungszahl der Funktion $\varphi(x)$ zugleich eine zu ε gehörige Verschiebungszahl von $\psi_n(t)$ darstellt. Wir führen den Beweis dieser Behauptung durch Induktion. Für $n = 0$ ist sie wahr, weil $\psi_0(t)$ identisch Null ist; wir nehmen an, dass sie für ein gewisses n wahr ist, und haben daraus ihre Gültigkeit für $n + 1$ abzuleiten. Aus der Gleichung

$$t - \psi_{n+1}(t) = t - \varphi \{ t - \psi_n(t) \}$$

folgt

$$\psi_{n+1}(t) = \varphi \{ t - \psi_n(t) \}.$$

Zu dem gegebenen ε bestimmen wir zunächst ein so kleines $\alpha > 0$, dass jede Zahl, welche von einer zu $\frac{\varepsilon}{2}$ gehörigen Verschiebungszahl der Funktion $\varphi(x)$ um höchstens α abweicht, jedenfalls eine zu ε gehörige Verschiebungszahl dieser Funktion $\varphi(x)$ darstellt. Und zu diesem α bestimmen wir dann weiter — was nach unserer Annahme über die Funktion $\psi_n(t)$ möglich ist — ein $\beta > 0$, so dass jede zu β gehörige Verschiebungszahl von $\varphi(x)$ zugleich eine zu α gehörige Verschiebungszahl von $\psi_n(t)$ darstellt. Dann, behaupte ich, erfüllt die Zahl $\delta = \text{Min} \left\{ \frac{\varepsilon}{2}, \beta \right\}$ unsere Forderung, d. h. falls τ eine beliebige zu δ gehörige Verschiebungszahl von $\varphi(x)$ ist, so ist sie gleichzeitig eine zu ε gehörige Verschiebungszahl von $\psi_{n+1}(t)$, d. h. es gilt für alle t die Ungleichung

$$\left| \psi_{n+1}(t + \tau) - \psi_{n+1}(t) \right| \leq \varepsilon$$

oder, anders geschrieben, die Ungleichung

$$\left| \varphi \{ t + \tau - \psi_n(t + \tau) \} - \varphi \{ t - \psi_n(t) \} \right| \leq \varepsilon.$$

Das Bestehen dieser letzten Ungleichung ist offenbar dargetan, wenn wir nachweisen können, dass bei jedem festen t die Argumentdifferenz

$$\{ t + \tau - \psi_n(t + \tau) \} - \{ t - \psi_n(t) \} = \tau - \{ \psi_n(t + \tau) - \psi_n(t) \}$$

eine zu ε gehörige Verschiebungszahl der Funktion $\varphi(x)$ ist, und dies ergibt sich daraus, dass die genannte Diffe-

renz von der zu $\delta \leq \frac{\varepsilon}{2}$ gehörigen Verschiebungszahl τ von $\varphi(x)$ um $\psi_n(t+\tau) - \psi_n(t)$ abweicht, welche letztere Grösse numerisch $\leq \alpha$ ist, weil τ ja (als eine zu δ , und somit a fortiori zu β , gehörige Verschiebungszahl von $\varphi(x)$) gewiss eine zu α gehörige Verschiebungszahl von $\psi_n(t)$ darstellt. — Wir fügen hinzu, dass aus der soeben bewiesenen »Majorisierung« der Fastperiodizität von $\psi_n(t)$ durch die Fastperiodizität von $\varphi(x)$ ein üblicher Weise gefolgert werden kann (durch Anwendung bekannter Sätze über die Beziehung der Fourierexponenten einer fastperiodischen Funktion zu ihren Verschiebungszahlen), dass die Fourierexponenten von $\psi_n(t)$ alle dem Modul M_φ angehören.

Wir führen nunmehr den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ aus und wollen beweisen, dass die Funktion $f_n(t) = t - \psi_n(t)$ gleichmässig in $-\infty < t < \infty$ gegen eine Grenzfunktion $f(t) = t - \psi(t)$ strebt, d. h. dass $\psi_n(t)$ gleichmässig gegen eine Grenzfunktion $\psi(t)$ strebt. Dies ergibt sich sofort aus der Ungleichung

$$\begin{aligned} |\psi_{n+1}(t) - \psi_n(t)| &= |\varphi\{t - \psi_n(t)\} - \varphi\{t - \psi_{n-1}(t)\}| = \\ &= |\psi_n(t) - \psi_{n-1}(t)| \cdot |\varphi'(\xi)| < k \cdot |\psi_n(t) - \psi_{n-1}(t)| < \\ &< k^2 |\psi_{n-1}(t) - \psi_{n-2}(t)| < \dots < k^n |\psi_1(t) - \psi_0(t)| = \\ &= k^n |\psi_1(t)| = k^n |\varphi(t)| \leq k^n \cdot G, \end{aligned}$$

wo G die obere Grenze der gegebenen fastperiodischen Funktion $|\varphi(x)|$ bezeichnet. Aus der Gleichmässigkeit des Grenzüberganges $\psi(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(t)$ folgt nun sofort, dass die Grenzfunktion $\psi(t)$ wieder fastperiodisch ist, und ferner, dass auch die zur Grenzfunktion $\psi(t)$ gehörigen Fourierexponenten in dem Modul M_φ enthalten sind.

Es bleibt noch zu zeigen, dass die gefundene Funktion $f(t) = t - \psi(t)$ tatsächlich die Gleichung

$$t = f(t) + \varphi \{ f(t) \}$$

befriedigt; dies ist aber evident; wir brauchen nur, bei beliebigem festen t , in der Gleichung

$$t = f_{n+1}(t) + \varphi \{ f_n(t) \}$$

den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ auszuführen.

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser. **X**, 13.

BESTIMMUNG DER BAHN
DES PERIODISCHEN KOMETEN
COMAS SOLÁ (1926 f).

VON

JULIE M. VINTER HANSEN



KØBENHAVN

HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI A/S

1931

Der Komet 1926 f wurde den 4. November 1926 von Professor COMAS SOLÁ in Barcelona entdeckt. Der Komet war bei der Entdeckung von der 12ten Grössenklasse. Es liegen 199 Beobachtungen innerhalb des Zeitraumes 1926 November 4 bis 1927 Mai 31 vor.

Es sind verschiedene vorläufige Bahnen gerechnet worden: von EBELL, CROMMELIN, MERTON, BRIGHAM und PRESCOTT, SMILEY und HOLBROOK, CUNNINGHAM, MELLO E SIMAS. Der Bahnverbesserung ist das von Mello e Simas berechnete Elementensystem (A.N.230, 109) zu Grunde gelegt.

Dr. CROMMELIN hat die Vermutung ausgesprochen, dass dieser Komet mit dem Kometen SPITALER (1890 VII) identisch sein sollte. Mit Hilfe des Tisserandschen Kriteriums kommt *Mello e Simas* (A.N.230, 110) zu dem Resultat, dass diese Identität nicht sehr wahrscheinlich ist.

Die Elemente von *Mello e Simas* lauten:

Epoche und Oskulation 1926 Nov. 30.0 Weltzeit.

$$\begin{array}{r}
 M = 347^{\circ} \ 2' \ 11''.4 \\
 \omega = 38 \ 27 \ 13.0 \\
 \Omega = 65 \ 37 \ 6.8 \\
 i = 13 \ 45 \ 43.4 \\
 \varphi = 35 \ 7 \ 20.3 \\
 \log a = 0.620 \ 551 \\
 \log q = 0.248 \ 610 \\
 \mu = 416'' .0830 \\
 U = 8.^a 52776 \ (\text{jul. Jahre}). \\
 T = 1927 \ \text{März} \ 22.1618 \ \text{Weltzeit.}
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} \omega \\ \Omega \\ i \end{array}} \right\} 1927.0$$

Mit diesen Elementen habe ich die in Tafel I gegebene Ephemeride berechnet.

Tafel I.
0^h Weltzeit.

1926—27	α vera	δ vera	$\log A$	Aberr.-Zeit
Nov. 1	3 ^h 0 ^m 22 ^s .45	+ 6° 22' 3''.8	0.092 416	10 ^m 17 ^s
5	2 56 40.30	6 32 36.1	83 812	10 5
9	52 45.55	6 45 23.3	76 546	9 55
13	48 43.70	7 0 39.4	70 688	9 47
17	44 40.55	7 18 35.3	66 281	9 41
21	40 41.89	7 39 17.1	63 335	9 37
25	36 53.36	8 2 48.9	61 836	9 35
29	33 20.67	8 29 12.5	61 747	9 35
Dez. 3	30 9.03	8 58 27.0	62 996	9 37
7	27 23.31	9 30 29.9	65 492	9 40
11	25 7.47	10 5 16.7	69 114	9 45
15	23 24.72	10 42 39.6	73 728	9 51
19	22 17.02	11 22 28.3	79 201	9 58
23	21 45.78	12 4 31.8	85 407	10 7
27	21 51.77	12 48 38.3	92 233	10 16
31	22 35.39	13 34 37.2	99 562	10 27
Jan. 4	23 56.80	14 22 17.2	107 298	10 38
8	25 55.58	15 11 28.6	115 334	10 50
12	28 31.03	16 1 59.3	123 587	11 3
16	31 41.95	16 53 34.1	131 982	11 16
20	35 27.19	17 46 1.2	140 460	11 29
24	39 45.69	18 39 6.7	148 985	11 43
28	44 36.38	19 32 38.4	157 517	11 56
Febr. 1	49 58.48	20 26 23.4	166 027	12 11
5	2 55 50.87	21 20 9.6	174 486	12 25
9	3 2 12.51	22 13 42.2	182 868	12 40
13	9 2.22	23 6 47.6	191 156	12 54
17	16 18.90	23 59 9.9	199 345	13 9
21	3 24 1.58	+ 24 50 34.1	0.207 434	13 24

1927	α vera	δ vera	$\log A$	Aberr.-Zeit
Febr. 25	3 ^h 32 ^m 9 ^s .35	+ 25° 40' 45".2	0.215 427	13 ^m 39 ^s
März 1	40 41.46	26 29 28.9	223 324	13 54
5	49 37.12	27 16 30.9	231 124	14 9
9	3 58 55.30	28 1 36.3	238 825	14 24
13	4 8 34.87	28 44 29.9	246 431	14 39
17	18 34.53	29 24 56.0	253 947	14 55
21	28 53.10	30 2 40.0	261 384	15 10
25	39 29.43	30 37 28.0	268 753	15 26
29	4 50 22.36	31 9 8.1	276 062	15 41
April 2	5 1 30.59	31 37 28.9	283 314	15 57
6	12 52.57	32 2 20.0	290 509	16 13
10	24 26.56	32 23 31.3	297 653	16 29
14	36 10.72	32 40 55.1	304 750	16 46
18	5 48 3.24	32 54 23.9	311 808	17 2
22	6 0 2.30	33 3 54.0	318 833	17 19
26	12 6.25	33 9 22.7	325 832	17 36
30	24 13.40	33 10 48.4	332 805	17 53
Mai 4	36 21.98	33 8 12.9	339 747	18 10
8	6 48 30.06	33 1 37.8	346 659	18 27
12	7 0 35.88	32 51 7.7	353 538	18 45
16	12 37.79	32 36 48.9	360 387	19 3
20	24 34.36	32 18 48.0	367 209	19 21
24	36 24.35	31 57 13.3	374 002	19 39
28	48 6.68	31 32 14.9	380 763	19 58
Juni 1	7 59 40.40	31 4 2.8	387 483	20 17
5	8 11 4.66	+ 30 32 48.9	0.394 157	20 35

Tafel II enthält das gesamte zur Verfügung stehende Beobachtungsmaterial, ferner die aus der Ephemeride interpolierten Positionen, die Werte für Beobachtung minus Rechnung ($A\alpha \cos \delta$ und $A\delta$) und die angewandten Gewichte, die mit Hilfe eines graphischen Vergleichs zwischen Beobachtung und Rechnung geschätzt sind.

Nr.	Beobacht.-Ort	Weltzeit—Aberr.-Z.	Beobachtung	
			α app. geoz.	δ app. geoz.
1	Simeis	1926 Nov. 4.9152	2 ^h 56 ^m 46 ^s .0-	+ 6° 32' 26''.-
2	Barcelona	4.9930	56 39.-	31 -
3	»	5.9930	55 43.3-	35 54.-
4	Wien	7.01903	54 44.74	38 49.7
5	»	8.88767	52 53.91	45 5.8
6	Bergedorf	9.9987	51 45.59	49 4.2
7	Yerkes	10.07450	51 42.55	49 18.4
8	Greenwich	10.1325	51 38.59	49 33.7
9	Barcelona	10.82181	50 57.4-	52 8.-
10	Heidelberg	10.86911	50 54.33	52 15.6
11	Uccle	10.89636	50 52.0-	52 27.1
12	Bergedorf	10.90941	50 51.85	52 26.0
13	»	10.94514	50 49.72	52 32.9
14	Besançon	10.99216	50 47.06	52 44.5
15	Yerkes	11.19648	50 34.39	6 53 31.8
16	Lisboa	12.90909	48 50.41	7 0 21.3
17	Greenwich	12.92277	48 49.44	0 23.9
18	Barcelona	13.98378	47 43.9-	4 53.-
19	Kingswood	14.93244	46 46.46	9 7.5
20	Lisboa	14.93692	46 46.78	9 4.7
21	Greenwich	14.9905	46 43.64	9 16.2
22	Yerkes	21.19145	40 32.23	40 24.5
23	Barcelona	21.74471	39 59.4-	43 33.-
24	Yerkes	22.01165	39 44.21	45 2.1
25	Barcelona	22.77640	39 0.2-	49 28.-
26	Santiago	23.07112	38 42.96	51 13.0
27	Nice	23.78784	38 2.68	55 27.3
28	Santiago	24.08559	37 46.06	7 57 13.4
29	Nice	24.78362	37 6.93	8 1 35.4
30	Torino	24.82655	37 3.76	1 27.8
31	Santiago	25.08554	36 49.71	3 24.0
32	Barcelona	25.79195	36 10.2-	7 51.-
33	Besançon	25.81195	2 36 9.85	+ 8 8 2.7

II.

Rechnung		B—R		Gew.	Nr.
α vera	δ vera	$A\alpha \cos \delta$	$A\delta$		
2 ^h 56 ^m 45 ^s .16	+ 6° 32' 21".4	+ 0 ^s .8 -	+ 5". -	1	1
56 40.75	32 34.8	- 2. -	-	0	2
55 43.00	35 33.4	+ 0.3 -	+ 21. -	0	3
54 43.04	38 45.6	+ 1.69	+ 4.1	2	4
52 52.27	44 59.8	+ 1.63	+ 6.0	2	5
51 45.60	48 57.7	+ 0.2 -	+ 6.5	0	6
51 41.04	49 14.3	+ 1.50	+ 4.1	2	7
51 37.55	49 27.1	+ 1.03	+ 6.6	2	8
50 55.93	52 1.4	+ 1.5 -	+ 7. -	2	9
50 53.07	52 12.2	+ 1.25	+ 3.4	2	10
50 51.42	52 18.4	+ 0.6 -	+ 8.7	1	11
50 50.63	52 21.4	+ 1.21	+ 4.6	2	12
50 48.47	52 29.5	+ 1.24	+ 3.4	2	13
50 45.63	52 40.3	+ 1.42	+ 4.2	2	14
50 33.25	6 53 27.2	+ 1.13	+ 4.6	2	15
48 49.24	7 0 16.8	+ 1.16	+ 4.5	2	16
48 48.40	0 20.2	+ 1.03	+ 3.7	2	17
47 43.80	4 49.0	+ 0.1 -	+ 4. -	0	18
46 46.04	8 58.8	+ 0.42	+ 8.7	0	19
46 45.76	9 0.0	+ 1.01	+ 4.7	2	20
46 42.51	9 14.4	+ 1.12	+ 1.8	1	21
40 30.68	40 20.8	+ 1.54	+ 3.7	1	22
39 58.40	43 27.0	+ 1.0 -	+ 6. -	2	23
39 42.91	44 58.0	+ 1.29	+ 4.1	2	24
38 58.82	49 23.0	+ 1.4 -	+ 5. -	2	25
38 41.94	51 6.8	+ 1.01	+ 6.2	2	26
38 1.20	55 23.0	+ 1.47	+ 4.3	1	27
37 44.41	7 57 11.1	+ 1.63	+ 2.3	1	28
37 5.37	8 1 28.1	+ 1.54	+ 7.3	1	29
37 2.98	1 44.1	+ 0.77	- 16.3	0	30
36 48.63	3 21.0	+ 1.07	+ 3.0	2	31
36 9.82	7 48.8	+ 0.4 -	+ 2. -	0	32
2 36 8.74	+ 8 7 56.5	+ 1.10	+ 6.2	2	33

Nr.	Beobacht.-Ort	Weltzeit—Aberr.-Z.	Beobachtung	
			α app. geoz.	δ app. geoz.
34	Padova	1926 Nov. 25.81297	2 ^h 36 ^m 9 ^s .38	+ 8° 8' 3''.5
35	Torino	25.83960	36 8.56	8 12.6
36	Alger	25.86110	36 6.95	8 17.3
37	Nice	25.86165	36 7.33	8 15.5
38	Padova	25.90769	36 3.54	8 29.6
39	Lisboa	25.95821	36 1.53	8 57.5
40	Santiago	26.05949	35 56.56	9 37.4
41	Padova	26.78252	35 15.80	14 24.8
42	Wien	26.83582	35 15.06	14 38.4
43	Alger	26.87395	35 12.30	14 51.5
44	Athen	26.88088	35 12.17	14 58.3
45	Lisboa	26.90002	35 11.20	15 5.3
46	Padova	26.91410	35 9.40	15 16.7
47	Lisboa	26.92120	35 9.87	15 12.3
48	Santiago	27.06948	35 1.74	16 17.7
49	Yerkes	27.13391	34 58.54	16 35.4
50	Wien	27.84372	34 21.38	21 21.5
51	Triest	27.89515	34 17.75	21 10.6
52	Lisboa	27.90150	34 18.35	21 43.4
53	Kingswood	27.9943	34 13.07	22 23.9
54	Santiago	28.09513	34 8.09	23 7.0
55	»	28.10190	34 7.63	23 8.7
56	Padova	29.82417	32 40.17	—
57	»	29.82623	—	35 2.3
58	Athen	29.88139	32 37.23	35 28.2
59	Lisboa	29.93138	32 35.01	35 49.8
60	Triest	29.93430	32 35.42	36 1.6
61	Santiago	30.10775	32 26.38	37 7.1
62	Yerkes	30.12506	32 25.48	37 11.9
63	Athen	Dez. 1.87438	31 1.34	8 49 59.9
64	Barcelona	3.77513	29 35.4 -	9 4 29. -
65	Kingswood	3.8843	29 30.82	5 19.1
66	Lisboa	3.91551	2 29 29.75	+ 9 5 36.8

Rechnung		B—R		Gew.	Nr.
α vera	δ vera	$A \alpha \cos \delta$	$A \delta$		
2 ^h 36 ^m 8. ^s 68	+ 8° 7'56".9	+ 0. ^s 69	+ 6".6	2	34
36 7.23	8 7.1	+ 1.32	+ 5.5	2	35
36 6.06	8 15.3	+ 0.88	+ 2.0	2	36
36 6.03	8 15.5	+ 1.29	0.0	1	37
36 3.52	8 33.2	+ 0.02	— 3.6	0	38
36 0.77	8 52.6	+ 0.75	+ 4.9	2	39
35 55.27	9 31.7	+ 1.28	+ 5.7	2	40
35 16.31	14 13.4	— 0.50	+ 11.4	0	41
35 13.46	14 34.4	+ 1.58	+ 4.0	1	42
35 11.43	14 49.5	+ 0.86	+ 2.0	2	43
35 11.06	14 52.2	+ 1.10	+ 6.1	2	44
35 10.04	14 59.7	+ 1.15	+ 5.6	2	45
35 9.28	15 5.3	+ 0.12	+ 11.4	0	46
35 8.90	15 8.1	+ 0.96	+ 4.2	2	47
35 1.02	16 6.8	+ 0.71	+ 10.9	0	48
34 57.59	16 32.4	+ 0.94	+ 3.0	2	49
34 19.90	21 17.1	+ 1.46	+ 4.4	1	50
34 17.54	21 38.0	+ 0.21	— 27.4	0	51
34 17.20	21 40.6	+ 1.14	+ 2.8	2	52
34 12.36	22 18.3	+ 0.70	+ 5.6	2	53
34 7.13	22 59.3	+ 0.95	+ 7.7	2	54
34 6.77	25 2.0	+ 0.85	+ 6.7	2	55
32 39.30	—	+ 0.86	—	2	56
—	35 1.0	—	+ 1.3	2	57
32 36.44	35 24.7	+ 0.78	+ 3.5	2	58
32 33.99	35 45.8	+ 1.01	+ 4.0	2	59
32 33.82	35 47.4	+ 1.58	+ 14.2	0	60
32 25.28	37 1.4	+ 0.99	+ 5.7	2	61
32 24.43	37 8.8	+ 1.04	+ 3.1	2	62
31 0.55	8 49 56.1	+ 0.78	+ 3.8	2	63
29 34.77	9 4 26.6	+ 0.6 -	+ 2. -	2	64
29 30.02	5 17.8	+ 0.79	+ 1.3	2	65
2 29 28.67	+ 9 5 32.4	+ 1.07	+ 4.4	2	66

Nr.	Beobacht.-Ort	Weltzeit—Aberr.-Z.	Beobachtung	
			α app. geoz.	δ app. geoz.
67	Santiago	1926 Dez. 4.08108	2 ^h 29 ^m 22 ^s .60	+ 9° 6' 52.''2
68	»	4.08469	29 22.72	6 53.6
69	»	4.08640	29 22.44	6 53.1
70	Athen	4.81467	28 51.28	12 43.2
71	Lisboa	4.89104	28 48.34	13 19.9
72	»	5.89381	28 7.18	21 26.0
73	Barcelona	5.9093	28 6.4 -	21 29. -
74	Lisboa	6.91827	27 27.11	29 50.4
75	Padova	7.76616	26 56.17	36 59.7
76	Torino	7.86286	26 52.46	37 40.1
77	Lisboa	7.87522	26 51.35	38 0.9
78	Padova	7.92914	26 51.75	38 2.5
79	Santiago	8.10550	26 43.44	39 52.0
80	Athen	8.81625	26 19.27	46 7.3
81	Padova	8.82473	26 18.47	46 6.9
82	Lisboa	8.87842	26 16.37	46 39.8
83	Besançon	9.79404	25 46.56	54 42.7
84	Alger	9.81475	25 45.16	54 43.6
85	Padova	9.82000	25 45.54	54 51.5
86	Barcelona	9.82404	25 44.8 -	54 50. -
87	Torino	9.85940	25 44.65	55 1.9
88	Lisboa	9.89634	25 42.57	9 55 28.3
89	Madrid	10.83177	25 12.4 -	10 3 43. -
90	»	10.92865	25 9.0 -	4 32. -
91	Lisboa	10.95412	25 9.78	4 54.1
92	Santiago	11.11639	25 5.25	6 24.9
93	»	11.11869	25 5.27	6 23.2
94	Lisboa	11.91021	24 41.79	13 41.5
95	Yerkes	14.30881	23 40.56	10 36 6.3
96	Madrid	18.78718	22 20.4 -	11 19 53. -
97	»	19.83542	22 8.2 -	30 53. -
98	»	20.81025	21 58.9 -	41 18. -
99	Yerkes	21.00918	2 21 57.24	+ 11 43 22.7

Rechnung		B—R		Gew.	Nr.
α vera	δ vera	$A \alpha \cos \delta$	$A \delta$		
2 ^h 29 ^m 21 ^s .52	+ 9° 6' 50".3	+ 1 ^s .07	+ 1".9	2	67
29 21.36	6 52.0	+ 1.34	+ 1.6	1	68
29 21.29	6 52.8	+ 1.14	+ 0.3	2	69
28 50.40	12 38.8	+ 0.87	+ 4.4	2	70
28 47.21	13 15.3	+ 1.12	+ 4.6	2	71
28 6.32	21 21.5	+ 0.85	+ 4.5	2	72
28 5.70	21 29.1	+ 0.7 -	0. -	2	73
27 26.41	29 48.9	+ 0.69	+ 1.5	2	74
26 54.88	36 57.2	+ 1.27	+ 2.5	1	75
26 51.29	37 46.5	+ 1.15	- 6.4	0	76
26 50.92	37 52.8	+ 0.42	+ 8.1	1	77
26 48.97	38 20.3	+ 2.74	- 17.8	0	78
26 42.64	39 50.6	+ 0.79	+ 1.4	2	79
26 17.73	45 57.6	+ 1.52	+ 9.7	0	80
26 17.44	46 2.0	+ 1.02	+ 4.9	2	81
26 15.60	46 29.9	+ 0.76	+ 9.9	0	82
25 45.08	54 30.8	+ 1.46	+ 11.9	0	83
25 44.42	54 41.7	+ 0.73	+ 1.9	2	84
25 44.25	54 44.5	+ 1.27	+ 7.0	1	85
25 44.11	54 46.6	+ 0.7 -	+ 3. -	2	86
25 42.97	55 5.4	+ 1.65	- 3.5	0	87
25 41.78	9 55 25.0	+ 0.78	+ 3.3	2	88
25 12.54	10 3 45.7	- 0.1 -	- 3. -	0	89
25 9.61	4 38.1	- 0.6 -	- 6. -	0	90
25 8.84	4 51.9	+ 0.93	+ 2.2	2	91
25 4.00	6 19.8	+ 1.23	+ 5.1	1	92
25 3.94	6 21.0	+ 1.31	+ 2.2	1	93
24 41.11	13 33.7	+ 0.67	+ 7.8	1	94
23 40.02	10 36 1.3	+ 0.53	+ 5.0	2	95
22 19.72	11 20 17.7	+ 0.7 -	- 25. -	0	96
22 7.46	31 4.6	+ 0.7 -	- 12. -	0	97
21 58.32	41 14.4	+ 0.6 -	+ 4. -	2	98
2 21 56.72	+ 11 43 19.7	+ 0.51	+ 3.0	2	99

Nr.	Beobacht.-Ort	Weltzeit—Aberr.-Z.	Beobachtung	
			α app. geoz.	δ app. geoz.
100	Lisboa	1926 Dez. 21.79519	2 ^h 21 ^m 52 ^s .14	+ 11° 51' 42".3
101	Madrid	21.84579	21 51.4 -	11 52 10. -
102	Barcelona	22.79687	21 46.3 -	12 2 22: -
103	Lisboa	22.80571	21 46.80	2 24.7
104	»	23.85426	21 44.31	13 47.0
105	Barcelona	24.79652	21 43.8 -	24 6. -
106	Kingswood	24.8186	21 44.42	24 19.4
107	Lisboa	24.87333	21 44.50	24 57.2
108	Greenwich	24.9062	21 44.58	25 16.3
109	Santiago	25.05687	21 44.66	26 58.3
110	»	25.05833	21 44.25	26 55.7
111	Yerkes	25.17794	21 44.92	28 18.1
112	Lisboa	25.90678	21 47.00	36 21.9
113	»	25.91833	21 46.97	36 38.2
114	»	27.79259	21 57.86	12 57 40.7
115	Santiago	28.11028	22 0.67	13 1 12.2
116	Yerkes	29.07522	22 10.04	12 18.1
117	Triest	29.85366	22 18.54	—
118	Santiago	30.08623	22 22.55	24 0.2
119	Barcelona	30.76763	22 31.7 -	31 55. -
120	Madrid	30.81012	22 33.5 -	32 27. -
121	Triest	30.85622	22 34.03	32 54.2
122	Wien	31.74493	22 48.13	43 22.3
123	»	31.82030	22 49.48	13 44 18.0
124	Lisboa	1927 Jan. 4.79907	24 17.97	14 32 0.3
125	»	5.81368	24 45.91	44 26.9
126	Santiago	6.09076	24 54.84	47 48.5
127	Torino	6.76325	25 15.34	55 51.4
128	Lisboa	6.87027	25 18.55	57 24.8
129	»	6.88419	25 19.00	14 57 32.4
130	Yerkes	7.10969	25 26.05	15 0 30.2
131	Lisboa	7.90917	25 52.47	10 25.9
132	»	7.92799	2 25 53.58	+ 15 10 32.3

Rechnung		B—R		Gew.	Nr.
α vera	δ vera	$A \alpha \cos \delta$	$A \delta$		
2 ^h 21 ^m 51 ^s .31	+ 11° 51' 35".6	+ 0 ^s .81	+ 6".7	1	100
21 51.01	11 52 10.5	+ 0.4 -	0. -	2	101
21 46.48	12 2 20.6	- 0.2 -	+ 1. -	0	102
21 46.44	2 26.3	+ 0.35	- 1.6	2	103
21 43.92	13 47.0	+ 0.38	0.0	2	104
21 43.84	24 5.8	0.0	0. -	1	105
21 43.86	24 20.3	+ 0.55	- 0.9	2	106
21 43.93	24 56.6	+ 0.56	+ 0.6	2	107
21 43.97	25 18.4	+ 0.60	- 2.1	2	108
21 44.19	26 58.0	+ 0.46	+ 0.3	2	109
21 44.19	26 59.0	+ 0.06	- 3.3	1	110
21 44.40	28 18.2	+ 0.51	- 0.1	2	111
21 46.41	36 23.4	+ 0.58	- 1.5	2	112
21 46.46	36 31.1	+ 0.50	+ 7.1	0	113
21 57.42	12 57 36.4	+ 0.43	+ 4.3	1	114
22 0.10	13 1 13.3	+ 0.56	- 1.1	2	115
22 9.69	12 16.3	+ 0.34	+ 1.8	2	116
22 19.04	—	- 0.49	—	0	117
22 22.10	23 57.7	+ 0.44	+ 2.5	2	118
22 31.82	31 54.0	- 0.1 -	+ 1. -	0	119
22 32.47	32 23.9	+ 1.0 -	+ 3. -	1	120
22 33.17	32 56.2	+ 0.84	- 2.0	2	121
22 47.70	43 22.4	+ 0.42	- 0.1	2	122
22 49.02	13 44 15.8	+ 0.45	+ 2.2	2	123
24 17.56	14 31 59.9	+ 0.40	+ 0.4	2	124
24 46.07	44 24.8	- 0.15	+ 2.1	1	125
24 54.27	47 49.2	+ 0.55	- 0.7	2	126
25 14.90	56 7.0	+ 0.43	- 15.6	0	127
25 18.29	57 26.4	+ 0.25	- 1.6	2	128
25 18.73	14 57 36.8	+ 0.26	- 4.4	1	129
25 25.94	15 0 24.4	+ 0.11	+ 5.8	0	130
25 52.47	10 20.6	0.00	+ 5.3	0	131
2 25 53.12	+ 15 10 34.7	+ 0.44	- 2.4	2	132

Nr.	Beobacht.-Ort	Weltzeit—Aberr.-Z.	Beobachtung	
			α app. geoz.	δ app. geoz.
133	Santiago	1927 Jan. 8.08988	2 ^h 25 ^m 59 ^s .20	+ 15° 12' 38".0
134	»	8.09202	25 59.18	12 38.4
135	Barcelona	8.8563	26 25.8—	22 10.—
136	Lisboa	8.94705	26 29.36	15 23 27.0
137	»	19.78286	35 14.23	17 43 11.7
138	»	21.81341	37 20.22	18 10 5.4
139	Santiago	22.08632	37 38.42	13 39.5
140	Lisboa	22.86700	38 29.25	24 2.2
141	»	22.89023	38 30.97	24 20.9
142	Santiago	23.06692	38 42.93	26 37.2
143	Besançon	24.76645	40 38.60	49 22.5
144	Santiago	25.06914	41 0.55	53 20.3
145	Yerkes	25.10967	41 3.31	18 53 52.2
146	Besançon	25.77845	41 51.45	19 2 49.7
147	Washington	26.05003	42 10.33	6 27.5
148	Santiago	26.05861	42 11.83	6 35.8
149	»	27.05045	43 25.19	19 49.1
150	»	27.05240	43 25.21	19 52.0
151	Besançon	27.77551	44 19.69	29 34.5
152	Greenwich	27.8559	44 25.79	30 42.7
153	Besançon	28.79524	45 38.27	43 16.6
154	Yerkes	29.20353	46 9.98	19 48 46.5
155	Lisboa	31.82209	49 43.54	20 23 56.2
156	Washington	Febr. 1.04934	50 2.67	26 58.2
157	Santiago	1.06230	50 4.20	27 12.9
158	Yerkes	2.13142	51 35.02	41 32.8
159	Besançon	2.76655	52 30.64	20 50 9.7
160	»	3.76458	53 59.06	21 3 32.7
161	Lisboa	3.87208	54 8.53	4 58.3
162	»	3.89119	54 10.59	5 15.0
163	Yerkes	4.02541	54 22.01	7 0.5
164	Santiago	4.05389	54 25.18	7 18.4
165	Lisboa	4.89669	2 55 41.54	+ 21 18 47.9

Rechnung		B—R		Gew.	Nr.
α vera	δ vera	$A \alpha \cos \delta$	$A \delta$		
2 ^h 25 ^m 58 ^s .68	+ 15° 12' 35".9	+ 0 ^s .50	+ 2."1	2	133
25 58.75	12 37.5	+ 0.41	+ 0.9	2	134
26 25.82	22 11.3	0.0 -	- 1.-	1	135
26 29.11	15 23 19.6	+ 0.24	+ 7.4	0	136
35 14.10	17 43 9.3	+ 0.12	+ 2.4	1	137
37 20.32	18 10 1.3	- 0.10	+ 4.1	1	138
37 37.94	13 38.7	+ 0.46	+ 0.8	2	139
38 29.16	24 1.2	+ 0.09	+ 1.0	2	140
38 30.70	24 19.8	+ 0.26	+ 1.1	2	141
38 42.48	26 40.8	+ 0.43	- 3.6	2	142
40 38.92	49 20.5	- 0.30	+ 2.0	1	143
41 0.27	53 23.1	+ 0.26	- 2.8	2	144
41 3.14	18 53 55.6	+ 0.16	- 3.4	2	145
41 51.00	19 2 52.2	+ 0.43	- 2.5	2	146
42 10.70	6 30.2	- 0.35	- 2.7	1	147
42 11.32	6 37.1	+ 0.48	- 1.3	2	148
43 24.50	19 54.3	+ 0.65	- 5.2	1	149
43 24.65	19 55.9	+ 0.53	- 3.9	1	150
44 19.23	29 37.7	+ 0.43	- 3.2	2	151
45 25.86	30 42.8	- 0.07	- 0.1	2	152
45 38.28	43 18.9	- 0.01	- 2.3	2	153
46 10.04	19 48 47.9	- 0.06	- 1.4	2	154
49 43.50	20 23 59.8	+ 0.04	- 3.6	2	155
50 2.64	27 3.2	+ 0.03	- 5.0	2	156
50 3.74	27 13.7	+ 0.43	- 0.8	2	157
51 35.13	41 36.5	- 0.10	- 3.7	2	158
52 30.44	20 50 8.9	+ 0.19	+ 0.8	1	159
53 58.86	21 3 34.0	+ 0.19	- 1.3	2	160
54 8.50	5 0.6	+ 0.03	- 2.3	2	161
54 10.21	5 16.0	+ 0.35	- 1.0	2	162
54 22.28	7 4.2	- 0.25	- 3.7	2	163
54 24.84	7 27.2	+ 0.32	- 8.8	1	164
2 55 41.39	+ 21 18 46.4	+ 0.14	+ 1.5	1	165

Nr.	Beobacht.-Ort	Weltzeit—Aberr.-Z.	Beobachtung	
			α app. geoz.	δ app. geoz.
166	Lisboa	1927 Febr. 4.90837	2 ^h 55 ^m 42 ^s .10	+ 21° 18' 56".8
167	Santiago	5.05181	2 55 56.26	21 20 51.6
168	Washington	8.06253	3 0 40.22	22 1 8.8
169	Yerkes	11.13482	5 47.50	42 3.3
170	»	12.08454	7 25.77	22 54 38.6
171	Lisboa	19.85164	21 46.08	24 35 51.7
172	»	19.86810	21 48.24	36 12.3
173	»	19.88417	21 49.97	36 15.5
174	Yerkes	20.10171	22 15.21	39 2.8
175	»	21.05784	24 8.13	24 51 14.2
176	Besançon	23.81983	29 42.82	25 26 3.9
177	»	24.78890	31 42.92	25 38 6.4
178	Yerkes	März 3.09131	45 18.37	26 54 12.9
179	Washington	4.05986	47 28.76	27 5 31.6
180	Besançon	4.80256	3 49 9.97	27 14 10.0
181	Yerkes	17.05640	4 18 42.60	29 25 23.3
182	Kingswood	23.8623	36 25.85	30 27 47.1
183	Yerkes	29.07966	50 35.07	31 9 41.4
184	Lisboa	30.83957	55 27.20	22 39.5
185	»	30.84984	55 29.02	22 41.1
186	»	30.86028	55 30.64	22 47.7
187	»	31.84149	58 15.15	29 44.2
188	»	31.85807	4 58 18.77	29 44.0
189	»	April 1.84264	5 1 3.50	31 36 26.5
190	Yerkes	22.13862	6 0 26.77	33 4 6.8
191	»	24.09588	6 20.88	7 13.5
192	»	30.11084	24 32.99	10 45.5
193	Greenwich	30.91099	26 58.79	10 33.8
194	»	Mai 1.90961	30 0.51	33 10 2.5
195	»	8.87139	6 51 8.06	32 59 36.9
196	Yerkes	20.11511	7 24 54.77	32 18 15.3
197	»	26.10655	42 35.07	31 44 25.7
198	»	27.10159	45 29.69	38 7.9
199	»	31.10448	7 57 5.76	+ 31 10 35.9

Rechnung		B—R		Gew.	Nr.
α vera	δ vera	$\Delta \alpha \cos \delta$	$\Delta \delta$		
2 ^h 55 ^m 42 ^s .46	+ 21° 18' 55".8	−0 ^s .34	+1".0	1	166
2 55 55.63	21 20 51.3	+ 0.59	+ 0.3	1	167
3 0 40.50	22 1 11.2	− 0.26	− 2.4	2	168
5 47.75	42 6.6	− 0.23	− 3.3	2	169
7 26.19	22 54 43.0	− 0.39	− 4.4	2	170
21 46.14	24 35 55.5	− 0.05	− 3.8	2	171
21 48.06	36 8.1	+ 0.16	+ 4.2	0	172
21 49.95	36 20.4	+ 0.02	− 4.9	2	173
22 15.46	39 7.3	− 0.23	− 4.5	2	174
24 8.51	24 51 18.2	− 0.34	− 4.0	2	175
29 43.61	25 26 5.2	− 0.71	− 1.3	1	176
31 42.99	25 38 8.3	− 0.07	− 1.9	2	177
45 18.65	26 54 18.0	− 0.25	− 5.1	2	178
47 29.16	27 5 37.6	− 0.36	− 6.0	2	179
3 49 10.14	27 14 14.2	− 0.15	− 4.2	2	180
4 18 43.12	29 25 29.1	− 0.45	− 5.8	2	181
36 26.72	30 27 52.8	− 0.75	− 5.7	2	182
50 35.52	31 9 44.0	− 0.39	− 2.6	2	183
55 27.86	22 36.0	− 0.56	+ 3.5	0	184
55 29.58	22 40.4	− 0.48	+ 0.7	1	185
55 31.33	22 44.8	− 0.59	+ 2.9	0	186
58 15.57	29 37.7	− 0.36	+ 6.5	0	187
4 58 18.35	29 44.6	+ 0.36	− 0.6	0	188
5 1 4.03	31 36 25.9	− 0.45	+ 0.6	1	189
6 0 27.32	33 4 9.4	− 0.46	− 2.6	2	190
6 21.13	7 16.4	− 0.21	− 2.9	2	191
24 33.58	10 47.3	− 0.49	− 1.8	2	192
26 59.28	10 34.1	− 0.41	− 0.3	2	193
30 1.16	33 10 4.1	− 0.54	− 1.6	2	194
6 51 8.43	32 59 40.3	− 0.31	− 3.4	2	195
7 24 54.89	32 18 13.7	− 0.10	+ 1.6	2	196
42 35.24	31 44 28.7	− 0.14	− 3.0	1	197
45 29.62	38 8.4	+ 0.06	− 0.5	2	198
7 57 5.88	+ 31 10 37.8	− 0.10	− 1.9	0	199

Die Störungen seitens Jupiter und Saturn sind nach der Enckeschen Methode berechnet worden. Die Beobachtungen

Tafel

N. O.	Beobacht.	Weltzeit—Aberr.-Z.	B—R	
			$A \alpha \cos \delta$	$A \delta$
I	1— 21	1926 Nov. 11.24089	+18".8	+4".7
II	22— 63	26.73030	+15.8	+4.5
III	64— 95	Dez. 7.40212	+13.2	+3.1
IV	96—115	24.20689	+ 7.2	+0.3
V	116—136	1927 Jan. 3.93346	+ 6.4	+0.2
VI	137—154	25.32095	+ 3.2	-1.3
VII	155—168	Febr. 3.43649	+ 1.2	-2.3
VIII	169—175	17.35245	- 3.0	-4.2
IX	176—180	März 1.47834	- 3.9	-4.0
X	181—182	20.45935	- 9.0	-5.8
XI	183—189	30.46295	- 6.4	-1.0
XII	190—193	April 26.81408	- 5.8	-1.9
XIII	194—195	Mai 5.39050	- 6.3	-2.5
XIV	196—199	24.10799	- 0.6	-0.2

Die Bedingungsgleichungen für die

+1.7908 $A\Omega'$	-0.34926 Ai'	+1.5857 $A\omega'$
1.7267	0.43444	1.5294
1.6152	0.47941	1.4309
1.3860	0.52297	1.2339
1.2377	0.53527	1.1116
0.9875	0.53161	0.9204
0.9037	0.51994	0.8632
0.8007	0.49057	0.8007
0.7328	0.45312	0.7667
0.6608	0.37208	0.7409
0.6370	0.31941	0.7360
0.6092	0.15558	0.7331
0.6086	0.10385	0.7314
+0.6149	-0.00192	+0.7223

sind zu 14 Normalörtern zusammengezogen. Tafel III gibt die unter Rücksicht auf die Störungen erhaltenen Normalörter.

III.

Störungen		B—R von Störungen befreit		\sqrt{p}	α 1925.0	δ 1925.0	N. O.
$\Delta \alpha \cos \delta$	$\Delta \delta$	$\Delta \alpha \cos \delta$	$\Delta \delta$				
0''0	0''0	+ 18''8	+ 4''7	2.8	42° 36' 45''.9	+ 6° 53' 21''.3	I
0.0	0.0	+ 15.8	+ 4.5	3.8	38 48 48.5	+ 8 13 34.4	II
0.0	0.0	+ 13.2	+ 3.1	3.2	36 46 1.1	+ 9 33 31.3	III
0.0	0.0	+ 7.2	+ 0.3	2.6	35 24 42.0	+ 12 17 12.5	IV
0.0	0.0	+ 6.4	+ 0.2	2.6	35 57 31.1	+ 14 21 2.8	V
+ 0.1	+ 0.1	+ 3.1	- 1.4	2.8	40 18 7.3	+ 18 56 17.8	VI
+ 0.2	+ 0.2	+ 1.0	- 2.5	2.4	43 20 53.8	+ 20 58 41.8	VII
+ 0.4	+ 0.3	- 3.4	- 4.5	1.8	49 13 0.4	+ 24 3 16.6	VIII
+ 0.8	+ 0.4	- 4.7	- 4.4	1.5	55 24 21.4	+ 26 34 47.1	IX
+ 1.5	+ 0.6	- 10.5	- 6.4	1.0	66 50 9.9	+ 29 57 23.2	X
+ 2.0	+ 0.6	- 8.4	- 1.6	1.0	73 34 19.0	+ 31 19 41.8	XI
+ 3.6	+ 0.2	- 9.4	- 2.1	1.4	93 36 28.3	+ 33 10 0.2	XII
+ 4.0	- 0.1	- 10.3	- 2.4	1.0	100 6 44.6	+ 33 6 26.8	XIII
+ 4.8	- 0.8	- 5.4	+ 0.6	1.1	114 8 54.0	+ 31 56 52.0	XIV

Elementenverbesserung lauten dann:

- 4.7267 Δe	+ 0.46340 Δa	- 0.0096376 ΔT	= + 18.8
4.6903	0.46358	93806	+ 15.8
4.4906	0.44551	88792	+ 13.2
3.9979	0.39759	79240	+ 7.2
3.6392	0.36185	73850	+ 6.4
2.9353	0.29125	67032	+ 3.1
2.6486	0.26265	65714	+ 1.0
2.2196	0.22027	65175	- 3.4
1.8445	0.18375	65739	- 4.7
1.2375	0.12554	67510	- 10.5
- 0.9059	0.09406	68401	- 8.4
+ 0.0048	+ 0.00793	68732	- 9.4
0.2742	- 0.01763	67897	- 10.3
+ 0.7987	- 0.06783	- 0.0064459	- 5.4

+ 0.0050 $A\Omega'$	+ 0.60755 Ai'	+ 0.9039 $A\omega'$
0.0445	0.73814	0.8972
0.0771	0.80476	0.8710
0.1307	0.86849	0.8060
0.1623	0.88812	0.7566
0.2123	0.89958	0.6531
0.2276	0.89876	0.6086
0.2440	0.89507	0.5402
0.2519	0.89064	0.4793
0.2530	0.87991	0.3792
0.2484	0.87045	0.3234
0.2192	0.81959	0.1621
0.2058	0.79413	0.1110
+ 0.1722	+ 0.72368	+ 0.0040

Durch Multiplikation mit den Quadratwurzeln der

$$\begin{aligned} x &= 6 A\Omega' & u &= 20 Ae \\ y &= 3 Ai' & v &= 2 Aa \\ z &= 6 A\omega' & t &= \frac{1}{25} AT \end{aligned}$$

erhält man das folgende

+ 0.83570 x	- 0.32598 y	+ 0.74000 z
1.09358	0.55029	0.96862
0.86143	0.51137	0.76315
0.60060	0.45324	0.53468
0.53635	0.46390	0.48170
0.46085	0.49617	0.42953
0.36148	0.41595	0.34527
0.24022	0.29434	0.24022
0.18320	0.22656	0.19167
0.11014	0.12403	0.12348
0.10616	0.10647	0.12266
0.14214	0.07260	0.17106
0.10143	0.03462	0.12190
+ 0.11274	- 0.00070	+ 0.13242

- 2.8175 Δe	+ 0.28038 Δa	- 0.0051951 ΔT	= + 4.7
2.7687	0.27406	54700	+ 4.5
2.6450	0.26075	55532	+ 3.1
2.3384	0.22902	55365	+ 0.3
2.0967	0.20462	54523	+ 0.2
1.5640	0.15189	51544	- 1.4
1.3287	0.12895	49735	- 2.5
0.9726	0.09454	46249	- 4.5
0.6769	0.06618	42389	- 4.4
0.2736	0.02765	34637	- 6.4
- 0.1069	+ 0.01169	29743	- 1.6
+ 0.1231	- 0.01084	14623	- 2.1
0.1218	- 0.01102	09823	- 2.4
+ 0.0006	+ 0.00003	- 0.0000394	+ 0.6

Gewichte (\sqrt{p}) und Ausführung der Substitutionen:

Fehlereinheit = 60

homogene Gleichungssystem:

- 0.66174 u	+ 0.64876 v	- 0.67462 t	= + 0.877
0.89116	0.88080	0.89115	+ 1.001
0.71850	0.71282	0.71032	+ 0.704
0.51972	0.51686	0.51505	+ 0.312
0.47310	0.47040	0.48002	+ 0.277
0.41094	0.40775	0.46922	+ 0.145
0.31783	0.31518	0.39428	+ 0.040
0.19976	0.19824	0.29330	- 0.102
0.13834	0.13781	0.24652	- 0.117
0.06188	0.06277	0.16878	- 0.175
- 0.04530	0.04703	0.17100	- 0.140
+ 0.00034	+ 0.00555	0.24056	- 0.219
0.01371	- 0.00881	0.16974	- 0.172
+ 0.04393	- 0.03731	- 0.17726	- 0.099

	+ 0.00233 x	+ 0.56705 y	+ 0.42182 z
	0.02816	0.93498	0.56825
	0.04112	0.85841	0.46450
	0.05664	0.75269	0.34925
	0.07033	0.76970	0.32785
	0.09908	0.83961	0.30478
	0.09104	0.71901	0.24345
	0.07321	0.53704	0.16207
	0.06298	0.44532	0.11984
	0.04217	0.29330	0.06321
	0.04140	0.29015	0.05390
	0.05115	0.38248	0.03783
	0.03428	0.26472	0.01846
	+ 0.03157	+ 0.26535	+ 0.00074

und hieraus die

+ 3.8320 x	- 1.9287 y	+ 3.5666 z
- 1.9287	+ 6.9388	+ 0.1633
+ 3.5666	+ 0.1633	+ 4.2238
- 3.2107	+ 0.0806	- 3.7573
+ 3.1775	- 0.0936	+ 3.7161
- 3.4770	- 0.2592	- 4.1378

und die Eliminations-

+ 3.8320 x	- 1.9287 y	+ 3.5666 z
	+ 5.9680	+ 1.9584
		+ 0.2617

- 0.39445 <i>u</i>	+ 0.39253 <i>v</i>	- 0.36365 <i>t</i>	+ 0.219
0.52605	0.52072	0.51965	+ 0.285
0.42318	0.41720	0.44425	+ 0.165
0.30399	0.29772	0.35988	+ 0.013
0.27257	0.26600	0.35440	+ 0.009
0.21896	0.21264	0.36080	- 0.065
0.15944	0.15474	0.29840	- 0.100
0.08753	0.08508	0.20812	- 0.135
0.05077	0.04964	0.15896	- 0.110
0.01363	0.01382	0.08659	- 0.107
- 0.00535	+ 0.00584	0.07436	- 0.027
+ 0.00861	- 0.00759	0.05118	- 0.049
0.00600	- 0.00545	0.02453	- 0.040
+ 0.00003	+ 0.00016	- 0.00108	+ 0.011

Normalgleichungen:

- 3.2107 <i>u</i>	+ 3.1775 <i>v</i>	- 3.4770 <i>t</i>	= + 2.686
+ 0.0806	- 0.0936	- 0.2592	- 1.204
- 3.7573	+ 3.7161	- 4.1378	+ 2.623
+ 3.4412	- 3.4016	+ 3.6292	- 2.561
- 3.4016	+ 3.3626	- 3.5902	+ 2.528
+ 3.6292	- 3.5902	+ 4.1066	- 2.345

gleichungen:

- 3.2107 <i>u</i>	+ 3.1775 <i>v</i>	- 3.4770 <i>t</i>	= + 2.686
- 1.5354	+ 1.5057	- 2.0092	+ 0.148
- 0.2652	+ 0.2646	- 0.2424	+ 0.075
+ 0.0872	- 0.0836	- 0.0466	- 0.196
	+ 0.0001	+ 0.0003	- 0.001
		+ 0.0252	+ 0.108

Die Auflösung gab das folgende Resultat:

$$\Delta\Omega' = +4''.37$$

$$\Delta i' = -0''.87$$

$$\Delta\omega' = +48''.85$$

$$\Delta e = -0.000214$$

$$\Delta a = -0.002235$$

$$\Delta T = +0^d.03110$$

Oskulation 1926 Nov. 30.0:

$$T = 1927 \text{ März } 22.1929 \text{ Weltzeit.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \omega = 38^\circ 27' 50''.8 \\ \Omega = 65 \ 35 \ 41.0 \\ i = 13 \ 45 \ 43.3 \end{array} \right\} 1925.0$$

$$\varphi = 35^\circ 6' 26''.4$$

$$\alpha = 4.17176$$

$$\mu = 416''.416$$

$$U = 8^a.52094 \text{ (jul. Jahre).}$$

Äquatorelemente:

$$\left. \begin{array}{l} \omega' = 82^\circ 15' 33''.8 \\ \Omega' = 24 \ 26 \ 23.8 \\ i' = 31 \ 34 \ 27.1 \end{array} \right\} 1925.0$$

Äquatoreale Konstanten:

$$x = -0.94555 \quad (\cos E - e) - 3.24074 \quad \sin E$$

$$y = +3.43871 \quad (\cos E - e) - 1.04261 \quad \sin E$$

$$z = +2.16444 \quad (\cos E - e) + 0.24068 \quad \sin E.$$

B—R

N. O.	Aus den Differentialgleichungen		Direkte Rechnung	
	$\Delta \alpha \cos \delta$	$\Delta \delta$	$\Delta \alpha \cos \delta$	$\Delta \delta$
I	+ 0".2	- 0".6	+ 1".9	+ 0".1
II	+ 0.2	+ 0.4	+ 1.0	+ 0.9
III	+ 0.1	+ 0.1	+ 2.0	+ 1.1
IV	- 1.8	- 0.9	- 1.8	- 0.3
V	+ 0.6	+ 0.1	+ 1.1	+ 0.5
VI	+ 1.2	+ 0.7	+ 0.2	+ 1.4
VII	+ 0.8	+ 0.3	+ 0.3	+ 1.6
VIII	- 1.0	- 0.8	- 1.1	- 0.3
IX	+ 0.8	- 0.3	+ 1.4	- 0.5
X	- 3.3	- 2.4	- 3.0	- 0.9
XI	- 0.1	+ 2.0	0.0	+ 2.8
XII	0.0	+ 0.5	+ 0.6	+ 0.1
XIII	- 1.2	- 1.4	0.0	- 0.2
XIV	+ 1.9	+ 0.6	+ 3.7	+ 1.0

Für die Opposition 1935 wird eine Ephemeride rechtzeitig veröffentlicht werden.

Universitäts-Sternwarte, Kopenhagen.

September 1930.

Julie M. Vinter Hansen.

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.

Mathematisk-fysiske Meddelelser. **X**, 14.

STUDIES OF CELLS WITH LIQUID-
LIQUID JUNCTIONS

PART IV.

CELLS WITH NO BRIDGE SOLUTION

BY

E. A. GUGGENHEIM AND A. UNMACK



KØBENHAVN

HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL

BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI A/S

1931

Pris: Kr. 1,20.

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskabs videnskabelige Meddelelser udkommer fra 1917 indtil videre i følgende Rækker:

Historisk-filologiske Meddelelser,
Filosofiske Meddelelser,
Mathematisk-fysiske Meddelelser,
Biologiske Meddelelser.

Hele Bind af disse Rækker sælges 25 pCt. billigere end Summen af Bogladepriserne for de enkelte Hefter.

Selskabets Hovedkommissionær er *Andr. Fred. Høst & Søn*, Kgl. Hof-Boghandel, København.

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser. **X**, 14.

STUDIES OF CELLS WITH LIQUID-
LIQUID JUNCTIONS

PART IV.

CELLS WITH NO BRIDGE SOLUTION

BY

E. A. GUGGENHEIM AND A. UNMACK



KØBENHAVN

HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL

BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI A/S

1931

Introduction.

In the first paper of the present series¹ one of us gave a detailed discussion of the conditions for the reproducibility and stability of cells with liquid-liquid junctions and of how these factors depend on the nature of the junction. These theoretical considerations were substantiated by experimental measurements of cells of the type

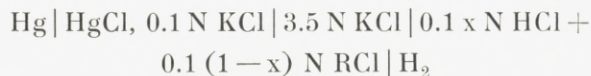


where the concentration c of the bridge solution was varied from 0.1 N to 3.5 N. Owing to the uncertainty of the effect of air on the calomel-hydrochloric acid electrode the absolute values of the E. M. F. measured were not reliable. But as the electrodes used agreed amongst themselves these measurements were sufficient to show that both reproducibility and stability over at least several hours were obtainable by junctions of two types, which were called respectively "free diffusion" and "continuous mixture layer", whereas junctions of a more indefinite type gave erratic fluctuations, sometimes amounting to as much as ten millivolts. The difference between the E. M. F.s given by the junctions of the "free diffusion" and "continuous mixture" types varied with the concentration of the "bridge" solution. There was a maximum difference of nearly one millivolt for a bridge concentration of 0.2 N. But for the

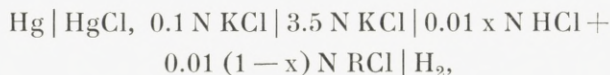
¹ GUGGENHEIM, *Journ. Amer. Chem. Soc.* **52**, 1315 (1930).

“bridge” concentration 0.1 N, and also for the most concentrated “bridge” solutions, the difference was of the same order as the experimental error.

In a more recent paper¹ an account was given of measurements of cells of the types



and



where R denotes an alkali metal.

Stability over several hours, or even days, and a reproducibility of about one tenth of a millivolt were obtained with junctions of the “free diffusion” type. It was also found that the same values for the E. M. F. were obtainable, also with a reproducibility of one tenth of a millivolt and a stability of several hours, by a considerably simpler technique, the junctions being prepared by simply sucking the bridge solution slowly about halfway up the side-tube of the electrode vessels and so ensuring the cylindrical symmetry, which appears to be such an important factor in determining the stability and reproducibility of the E. M. F.² Junctions prepared in this way may conveniently be referred to as “simple cylindrical”.

We shall now describe the results of a study of cells of the type



where R, R' represent two of the cations H⁺, Li⁺, K⁺.

¹ UNMACK and GUGGENHEIM, Kgl. Danske Vid. Selsk., Mat.-fys. Medd. **10**, No. 8. (1930).

² c. f. MAC LAGAN, Biochem. Journ., **23**, 309 (1929).

Experimental technique and results.

The Ag - AgCl electrodes were essentially of the type used with such success by GÜNTEMBERG ¹, to whom we are indebted for valuable advice on the treatment of the electrodes. The electrode vessels were of the form shown in Fig. 1. At A was a cotton plug covered with a mixture B

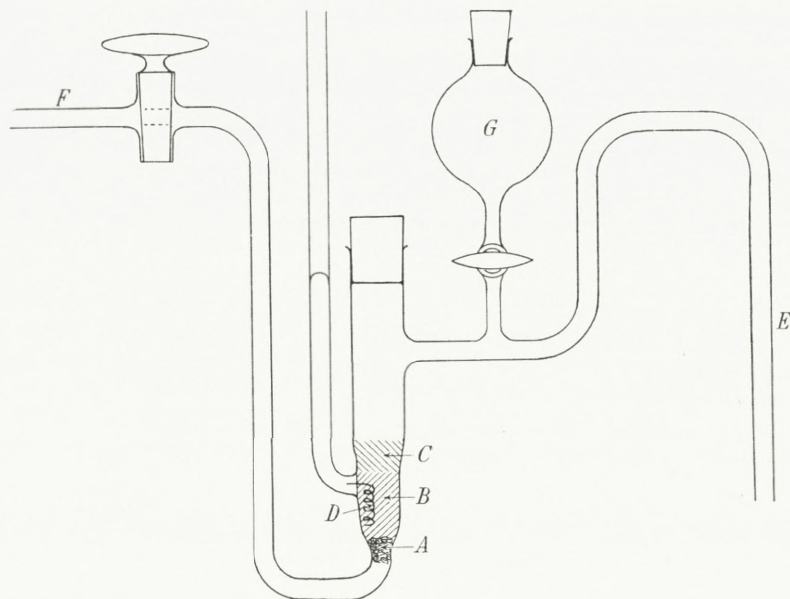


Fig. 1.

of silver (obtained by reduction of AgNO_3 with FeSO_4) and silver chloride (obtained by precipitation from AgNO_3 with HCl). Above this was a layer C of pure silver chloride. In some cases the platinum spiral D was silver plated, but it was found that this made no difference. The solutions were always pressed in through the side-tube E and out through the exit-tube F. The reservoir G was used only for rinsing the side-tube E before making a new junction. With this type of electrode vessel we could interchange

¹ GÜNTEMBERG, Z. physik. Chem. **123**, 199 (1926).

the electrode solutions, whilst using the same Ag - AgCl all the time. This seems to us far more satisfactory than using a different AgCl preparation for each new cell,¹ as for example by preparing the AgCl in situ by chloridising a silver electrode by electrolytic deposition. E. R. SMITH², who amongst others used this procedure, emphasises that, in order to obtain reproducibility, he had to chloridise each electrode in a solution of the same composition as that in which it was to be used. This suspiciously suggest that the state of the AgCl, and so its chemical potential, differs according to what solution is used for its electric deposition or even that there may occur something irreversible. Furthermore SMITH's electrodes were presumably not stable, since he emphasises the necessity of preparing them just before use.

Our experience completely confirms that of GÜNTEMBERG³ that, to obtain consistently reproducible results with these electrodes, it is essential rigorously to exclude access of oxygen. This we achieved by evacuating the space over each solution in its stock bottle until boiling commenced, cutting off the suction and allowing to stand several hours. The solution was next saturated with nitrogen, which had been passed over glowing copper filings. This whole procedure was repeated a second time. To fill an electrode vessel the air was first displaced by nitrogen and then the solution pressed over from the stock-bottle through the side-tube of the electrode vessel by means of nitrogen.

After standing twenty-four hours the electrodes prepared in this way were stable, anyhow for about a week. In

¹ c. f. BRONSTED, Kgl. Danske Vid. Selsk., Mat.-fys. Medd. **3**, No. 9. (1920).

² SMITH, Bureau of Standards Journal of Research **2**, 1137 (1929).

³ GÜNTEMBERG, Z. physik. Chem. **123**, 199 (1926).

contrast to calomel electrodes it is in acid solution that these electrodes seem least affected by the air. This may be connected with the impossibility of the existence of Ag_2O in the presence of acid.

The electrodes were entirely shielded from daylight, being prepared in a room lighted with electric light, then kept and used in a thermostat covered in with black cloth.

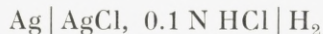
The hydrochloric acid solutions were prepared by dilution of a stock solution and the concentration controlled both by titration using $\text{Na}_2\text{C}_2\text{O}_4$ as standard¹ and by gravimetric estimation of the chloride as AgCl . The sodium chloride and potassium chloride solutions were made up from weighed amounts of the salts, previously fused in platinum, and the concentrations checked by gravimetric estimation of the chloride as AgCl . A further check on these concentrations was the conductivity measurements described later. We used two sources of lithium chloride a) MERCK'S preparation b) a concentrated solution kindly given us by GÜNTEMBERG made from salt purified by him as described in his paper.² In each case we made up the solutions to a correct chloride concentration determined gravimetrically as AgCl . No difference could be detected between the solutions prepared from the two sources either by electrometric or by conductivity measurements.

The measuring apparatus was identical with that used previously. All measurements were made with the electrodes in a water-thermostat at $18.0 \pm 0.02^\circ\text{C}$, the junctions being either in the same thermostat or in an air thermostat also at $18.0 \pm 0.1^\circ\text{C}$, according to the type of

¹ SØRENSEN, Oversigt over Kgl. Danske Vid. Selsk. Forh. No. 3 (1900). SØRENSEN and ANDERSEN, Z. anal. Chem. **44**, 217 (1905).

² loc. cit.

junction. As a control over our electrodes we however measured the E. M. F. of the cell



both at 18°C and also at 20°C for direct comparison with GÜNTEMBERG'S value. We obtained the value 352.95 ± 0.1 m. v. at 20°C as compared with GÜNTEMBERG'S value 353.05 m. v. (Actually he found 353.15 m. v. for a solution containing a deci-mole HCl in 1000 g H₂O, whereas our solutions contained a deci-mole in 1 litre solution). Our value at 18°C was 353.25 ± 0.2 m. v. The difference 0.3 m. v. for the range 18°C to 20°C is in good agreement with the results of NOYES and ELLIS¹.

We experimented with altogether three types of junction. The "free diffusion" junctions were made in the air thermostat exactly as described in the previous paper². A considerably simpler technique was however used for preparing junctions of the "continuous mixture" type. The vertical tube FG in the apparatus used for the "free diffusion" junctions³ was replaced by a straight glass-tube of length about 30 cm and internal diameter 3 mm to 5 mm and this was filled by means of a capillary pipette with about a dozen successive portions each of 0.2 to 0.4 ccm of mixtures of the two electrode solutions, the compositions of the successive portions varying steadily from that of the one pure electrode solution to that of the other. It need hardly be mentioned that the electrode vessel with the denser solution was connected to the lower end of the vertical tube. In the case of the "free diffusion" junction

¹ NOYES and ELLIS, *Journ. Amer. Chem. Soc.* **39**, 2532 (1917).

² GUGGENHEIM, *Journ. Amer. Chem. Soc.* **52**, 1329 (1930).

³ *Journ. Amer. Chem. Soc.* **52**, 1329, fig. 3. (1930).

there is a "lag" period before diffusion has annulled the inevitable irregularities associated with the initially "sharp" junction formed on opening the stopcock. In the case of the "continuous mixture" junctions there is no stopcock to open, but there is also a "lag" period before the temperature equilibrium is reached, as this is disturbed when the air-thermostat is opened to prepare the junction. In both cases however a steady value is reached after about half an hour, which is reproducible to within about 0.15 m. v. and stable for a whole day. For each cell set up readings were taken at irregular intervals spread over at least several hours.

The results are given below in table 1. The first column describes the nature of the cations R, R' in the two electrode solutions, the second gives the type of junction, "F. D." denoting "free diffusion" and C. M. "continuous mixture". The third column gives the mean of the values observed and the root-mean square deviation of the individual readings from the mean. The fourth column tells how often each cell was prepared and the fifth how many separate measurements made.

Owing to the great ease of preparing junctions of the "simple cylindrical" type and the conspicuous success obtained with them in the cells with a bridge of concentrated potassium chloride, it was natural to try to use them for the cells of the present type. It was however found extremely difficult to obtain consistent results when the two electrode solutions differ so little in density that only a very slight temperature difference is sufficient to start convection currents. By exercising great care one could generally obtain results agreeing with those given by the other two types of junction, but sometimes there were erratic

fluctuations of half a millivolt. We therefore cannot recommend this type of junction when the two solutions are so nearly of equal density and we are not giving the detailed results of these measurements.

Table 1.

Ag|AgCl, 0.1 N RCl|0.1 N R'Cl, AgCl|Ag at 18° C.

Nature of cations in electrode solutions		Type of junction	E. M. F. and R. M. S. deviation in m. v.	Number of cells	Number of readings
R	R'				
H	Li	F. D.	34.85 ± 0.15	11	47
		C. M.	34.85 ± 0.15	8	47
H	K	F. D.	28.25 ± 0.19	8	38
		C. M.	28.10 ± 0.08	3	12
K	Li	F. D.	7.00 ± 0.13	12	50

We have a check on the consistency of our measurements, as follows.

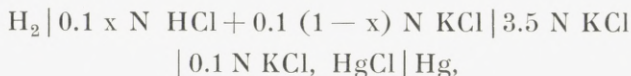
Firstly for the E. M. F. of the cell



we have

$$E = + 28.2 \pm 0.15 \text{ m. v.} \quad (\text{a})$$

Secondly in our previous paper¹, by a slight extrapolation from a series of cells of the type



we obtained for the cell

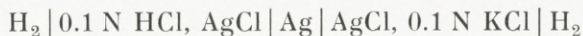


¹ UNMACK and GUGGENHEIM, Kgl. Danske Vid. Selsk., Mat-fys. Medd. **10**, No. 8 (1930).

$$E + \frac{RT}{F} \log_e c_{H^+}^{(KCl)} = +340.4 \pm 0.1 \text{ m. v.} \quad (b)$$

(R is the gas-constant, T the temperature, F the Faraday and $c_{H^+}^{(RCl)}$ the hydrogen-ion concentration in the solution of R Cl).

Thirdly we have, from GÜNTEMBERG'S¹ measurements for the cell²



$$E - \frac{RT}{F} \log_e \frac{c_{H^+}^{(KCl)}}{c_{H^+}^{(HCl)}} = -1.0 \pm 0.0 \text{ m. v.} \quad (c)$$

Finally we have measured the E. M. F. of the cell



using the same electrodes as in our previous paper. We obtained the value -425.5 ± 0.1 m. v. Hence

$$E - \frac{RT}{F} \log_e c_{H^+}^{(HCl)} = -367.8 \pm 0.1 \text{ m. v.} \quad (d)$$

Adding the values (a), (b), (c), (d), we obtain

$$\begin{aligned} &+ 28.2 + 340.4 - 1.0 - 367.8 \pm \sqrt{0.15^2 + 0.1^2 + 0.0^2 + 0.1^2} \\ &= -0.2 \pm 0.2 \text{ m. v.} \end{aligned}$$

As this sum should theoretically be zero the agreement is within the experimental accuracy.

¹ GÜNTEMBERG, Z. physik. Chem. **123**, 199 (1926).

² GÜNTEMBERG'S measurements were at 20° C, but the correction to 18° C for this cell must be less than 0.01 m. v.

Theoretical discussion.

Our measurements seem to establish definitely that the E. M. F.s given by the "free diffusion" junction and the "continuous mixture" junction are for these cells identical, at least to within an accuracy of 0.15 m. v. This is not altogether surprising, since it is just for cells of this type (two uni-univalent salts with one common ion both at the same concentration) that the ideal diffusion potential for the "continuous mixture" junction given by HENDERSON'S formula has identically the same value as the ideal diffusion potential given by PLANCK'S formula for yet another type of junction, namely the "constrained diffusion" type. As described elsewhere¹ this last type of junction is difficult to realise experimentally and the "free diffusion" type is mathematically intractable even in the simplest cases. P. B. TAYLOR² has attempted to compute approximately the concentration distribution for a "free diffusion" junction and in particular that between HCl and KCl of the same concentration. The accuracy claimed for this approximate computation has been challenged elsewhere by one of us³, but the distribution found by TAYLOR does at least give a qualitative picture of the deviations from a continuous mixture layer. As a final result he finds that these deviations cause a difference of only 0.3 m. v. in the computed diffusion potential, but this quantity is arrived at as the difference between two larger quantities contributed respectively by that part of the junction where the total concentration exceeds those of the electrode solutions and that part where the total concentration is less than those of

¹ GUGGENHEIM, *Journ. Amer. Chem. Soc.* **52**, 1315 (1930).

² TAYLOR, *Journ. Physic. Chem.* **31**, 1478 (1927).

³ GUGGENHEIM, *Journ. Amer. Chem. Soc.* **52**, 1315 (1930).

the electrode solutions. It is therefore quite possible that the true residual difference is still less, if not exactly zero as it is known to be in the case of "constrained diffusion". The large irregular fluctuations in the values obtainable for the E. M. F., when an indefinite type of junction is made, for instance by merely dipping the end of one electrode vessel into a U-tube containing a solution, are then perhaps explicable as follows. Somewhere in the transition layer are places of concentration defects (or excess) as compared with a continuous mixture layer, whilst the corresponding concentration excess (or defect) may occur somewhere in the U-tube outside the direct circuit and so there is not compensation. On the other hand in the junction of the "simple cylindrical" type, this will not occur, as long as convection currents are absent.

We shall now see to what extent the E. M. F. of the present cells can be computed theoretically. We shall naturally assume a "continuous mixture layer" because of its mathematical simplicity. We denote by I and II the electrode solutions containing the cations R and R' respectively. We shall further use the following notation: c for concentration, f for activity coefficient of a salt, t for transport number, T for absolute temperature, R for the gas-constant, F for the Faraday. The lower suffices will refer to components, the upper to phases, e. g. $t_{\text{Cl}^-}^{(\text{HCl})}$ is the transport number of Cl^- in a solution of HCl. Then, according to purely thermodynamic considerations and formulae given elsewhere¹, the E. M. F. of the present cells may be regarded as the sum of three terms:

$$E = E_{\text{E1}} + E_{\text{D}} + E_{\text{S}} \quad (1)$$

¹ GUGGENHEIM, Journ. Physic. Chem. **36**, 1758 (1930).

where the "ideal electrode potentials" E_{E1} are given by

$$E_{E1} = -\frac{RT}{F} \log_e \frac{c_{Cl^-}^{II}}{c_{Cl^-}^I} \quad (2)$$

the "ideal diffusion potentials" E_D by

$$E_D = -\frac{RT}{F} \int_I^{II} t_R d \log_e c_R - \frac{RT}{F} \int_I^{II} t_{R'} d \log_e c_{R'} + \frac{RT}{F} \int_I^{II} t_{Cl} d \log_e c_{Cl} \quad (3)$$

and the "salt effects potential" E_S by

$$E_S = -\frac{2RT}{F} \int_I^{II} t_R d \log_e f_{RCl} - \frac{2RT}{F} \int_I^{II} t_{R'} d \log_e f_{R'Cl}, \quad (4)$$

each of the above integrals to be evaluated through the transition layer.

As the two electrode solutions are of equal concentration the "ideal electrode potentials" E_{E1} is here clearly zero. For these cells, in contrast to those with a bridge of concentrated KCl, the "salt effects potential" E_S can be much more accurately evaluated than the "ideal diffusion potential" E_D . We shall therefore consider E_S before E_D . According to the "principle of ionic strength"¹ the value of f_{RCl} in mixtures of RCl and R'Cl is approximately constant at constant total concentration. To this degree of accuracy E_S becomes zero. This approximation is however not accurate for deci-normal solutions. In fact the very accurate measurements of GÜNTEMBERG² completely con-

¹ LEWIS and RANDALL, *Journ. Amer. Chem. Soc.* **43**, 1137 (1921).

² GÜNTEMBERG, *Z. physik. Chem.* **123**, 199 (1926).

firm the more exact "principle of linear variation" put forward by BRÖNSTED³, according to which for mixtures of $(1-x)$ parts of 0.1 N RCl and x parts of 0.1 N R'Cl the logarithms of the mean activity coefficients f vary linearly with x , so that

$$d \log_e f_{\text{RCl}} = d \log_e f_{\text{R'Cl}} = \beta \cdot dx. \quad (5)$$

where β is independent of x . We thus have

$$\frac{F}{RT} E_S = -2 \int_I^{II} (t_R + t_{R'}) \beta dx = -2 \beta \int_I^{II} (1 - t_{\text{Cl}}) dx. \quad (6)$$

Since transport numbers depend only on the ratios of the mobilities, we can for convenience take the mobility of the chloride ion as unity; in this scale we shall denote the mobilities of the other ions R and R' by λ and λ' respectively. Thus

$$t_{\text{Cl}} = \frac{1}{\lambda(1-x) + \lambda'x + 1} \quad (7)$$

and so finally

$$\begin{aligned} E_S &= -\frac{RT}{F} 2\beta \int_0^1 \left\{ 1 - \frac{1}{\lambda(1-x) + \lambda'x + 1} \right\} dx \\ &= -\frac{RT}{F} \cdot 2\beta \left\{ 1 - \frac{1}{\lambda - \lambda'} \log_e \frac{\lambda + 1}{\lambda' + 1} \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

In table 2 are given the data and results for the computation of E_S .

We have still to compute the integrals giving the "ideal diffusion potential" E_D and this is not so simple as might be supposed. As we are dealing with a "continuous mix-

³ BRÖNSTED, Journ. Amer. Chem. Soc. **45**, 2898 (1923).

ture layer" we use HENDERSON'S formula¹, which here takes the very simple form

$$E_D = \frac{RT}{F} \log_e \frac{\mathcal{A}_{RCl}}{\mathcal{A}_{R'Cl}} \quad (9)$$

where \mathcal{A} denotes equivalent conductivity. HENDERSON'S formula was originally derived on the assumption that each

Table 2.

Ag | AgCl, 0.1 N RCl | 0.1 N R'Cl, AgCl | Ag at 18°C.

Nature of cations:		Relative mobilities of cations:		$\frac{RT}{F} \cdot 2\beta$ in m.v.	E_S in m.v.
R	R'	λ	λ'		
H	Li	5.0	0.5	-0.08	+0.05
H	K	5.0	1.0	-1.00	+0.7
K	Li	1.0	0.5	+0.92	-0.4

ion's mobility was independent of the composition of the solution in which it was present. If however one makes the less drastic assumption that the ratio of the mobility of a given ion in one solution to its mobility in another solution is the same for all ions, it follows at once, from the fact that transport numbers depend only on the ratios of the mobilities, that one obtains a formula identical with HENDERSON'S. But in this formula one must introduce values for the equivalent conductivities all corresponding to the same solution. That is to say in our present case we have

$$E_D = \frac{RT}{F} \log_e \frac{\mathcal{A}_{RCl}^{(RCl)}}{\mathcal{A}_{R'Cl}^{(RCl)}} = \frac{RT}{F} \log \frac{\mathcal{A}_{RCl}^{(R'Cl)}}{\mathcal{A}_{R'Cl}^{(R'Cl)}} \quad (10)$$

¹ HENDERSON, Z. physik. Chem. **59**, 118 (1907); **63**, 325 (1908).

It is inaccurate to use the expression $\frac{RT}{F} \log_e \frac{A_{R'Cl}^{(R'Cl)}}{A_{RCl}^{(RCl)}}$ as is not

unusual¹. Unfortunately data are scarce for the behaviour of conductivities in even the simplest mixtures. According to the measurements of STEARN², for mixtures of the chloride, bromide or iodide of sodium with the corresponding potassium salt at decinormal concentration, deviations from the simple mixture law are always less than 0.2%. For various mixtures of 0.1 N NaCl and 0.1 N KCl the mixture law has been shown by MAC INNES, COWPERTHWAITTE and SCHEDLOWSKY³ to hold good within 0.1%. We have ourselves verified that this also holds for each pair of the three salts LiCl, NaCl, KCl at a decinormal concentration, the deviations being in each case less than 0.1%. But for mixtures of each of these salts with HCl there are appreciably greater deviations. Our results are given in table 3 on a scale in which the specific conductivity of the KCl solution is taken as unity. The deviations with HCl might conceivably be due to the presence of a trace of alkali in the salt solutions, but we verified by titration that this was not the case. Moreover, if this had been the case, the deviations would have varied with the composition of the mixtures in quite another way. This may be seen from Fig. 2 in which the dotted curve shows the type of deviation one should expect due to alkali in the salt solutions. As may be seen from the third column of table 3 the relative conductivities of our solutions of single chlorides

¹ LEWIS and SARGENT, *Journ. Amer. Chem. Soc.* **31**, 363 (1909). MAC INNES and YEH, *Journ. Amer. Chem. Soc.* **43**, 2563 (1921). E. R. SMITH, *Bureau of Standards Journal of Research* **2**, 1137 (1929).

² STEARN, *Journ. Amer. Chem. Soc.* **44**, 670 (1922).

³ MAC INNES, COWPERTHWAITTE, SCHEDLOWSKY, *Journ. Amer. Chem. Soc.* **51**, 2671 (1929).

are, except in the case of LiCl, in excellent agreement with the values found by Kohlrausch and his co-workers¹.

As regards lithium chloride our value is somewhat higher than that given in LANDOLT-BÖRNSTEIN. This may have been due to the presence of a trace of a foreign salt, though this is rendered improbable by the fact that the

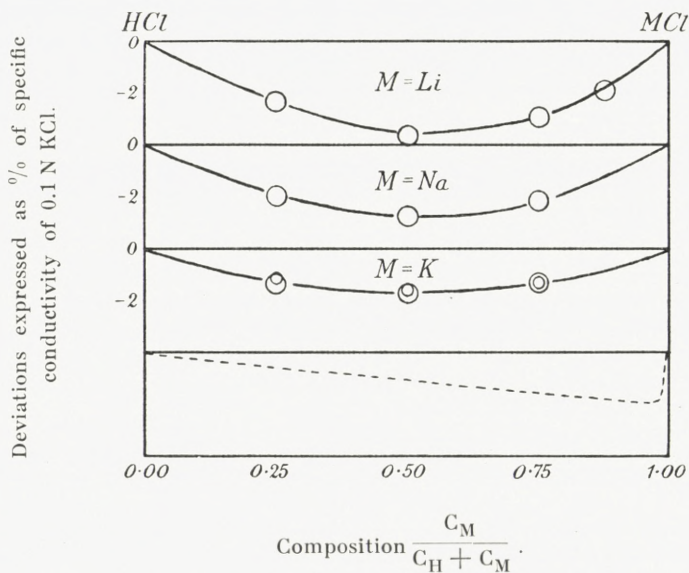


Fig. 2. Deviations of specific conductivities from mixture law in 0.1 N solutions. ○ Own measurements (18°C.). ◊ LONGSWORTH'S measurements (25°C.).

solutions made from the two different preparations were indistinguishable, both by electrometric and by conductivity measurements, when the chloride concentration was the same.

These measurements are of course not sufficient by themselves to determine the equivalent conductivities of the various components of the mixtures, but it seems plausible to expect a parallelism between on the one hand

¹ LANDOLT-BÖRNSTEIN, 5th edition p. 1079 (1923).

a lack of independence of the mobilities on the composition of the solution and on the other hand deviations from the simple mixture law for the conductivities.

Table 3.

Relative conductivities of mixtures of univalent chlorides at a total concentration 0.1 N and at 18° C.

Composition of solution.	Observed conductivity.	Conductivity according to Landolt-Börnstein.	Conductivity calculated according to mixture-law.	Deviation from mixture-law.
KCl	Unity	Unity		
HCl	3.133	3.133		
LiCl	0.740 ₈	0.735 ₇		
NaCl	0.821 ₃	0.821 ₄		
CsCl	1.017	1.014		
$\frac{1}{2}$ KCl + $\frac{1}{2}$ LiCl	0.869 ₆		0.870 ₄	-0.000 ₈
$\frac{1}{2}$ KCl + $\frac{1}{2}$ NaCl	0.910 ₄		0.910 ₇	-0.000 ₃
$\frac{1}{2}$ NaCl + $\frac{1}{2}$ LiCl	0.780 ₇		0.781 ₁	-0.000 ₄
$\frac{3}{4}$ HCl + $\frac{1}{4}$ KCl	2.587		2.600	-0.013
$\frac{1}{2}$ HCl + $\frac{1}{2}$ KCl	2.049		2.066	-0.017
$\frac{1}{4}$ HCl + $\frac{3}{4}$ KCl	1.520		1.533	-0.013
$\frac{3}{4}$ HCl + $\frac{1}{4}$ LiCl	2.512		2.535	-0.023
$\frac{1}{2}$ HCl + $\frac{1}{2}$ LiCl	1.901		1.937	-0.036
$\frac{1}{4}$ HCl + $\frac{3}{4}$ LiCl	1.310		1.339	-0.029
$\frac{1}{8}$ HCl + $\frac{7}{8}$ LiCl	1.021		1.040	-0.019
$\frac{3}{4}$ HCl + $\frac{1}{4}$ NaCl	2.536		2.555	-0.019
$\frac{1}{2}$ HCl + $\frac{1}{2}$ NaCl	1.950		1.977	-0.027
$\frac{1}{4}$ HCl + $\frac{3}{4}$ NaCl	1.378		1.399	-0.021

Just as these orientating conductivity measurements were completed, there appeared a paper by LONGSWORTH¹

¹ LONGSWORTH, Journ. Amer. Chem. Soc. 52, 1897 (1930).

giving accurate data not only for the total conductivities, but also the various transport numbers and so the ionic conductivities in mixtures of HCl and KCl at a total concentration 0.1 N. These measurements were made at 25° C., but, as far as the conductivities of the HCl-KCl mixtures are concerned, the deviations from the mixture-law expressed as percentages of the conductivity of the KCl solution are in almost exact agreement with those found by us at 18° C. This is clear from Fig. 2, where LONGSWORTH'S measurements are included. For the determination of transport numbers the method used by LONGSWORTH was that of the moving boundary and his calculation involves the same assumption as that mentioned above as a condition for the application of HENDERSON'S formula, namely that the ratio of the mobility of a given ion in two different solutions is the same for the various ions. We shall hereafter for the sake of brevity refer to this as "LONGSWORTH'S assumption". The actual values found by LONGSWORTH for the transport numbers show that the assumption is not exact within his experimental accuracy, but the deviations are less than from the more drastic assumption of independent mobilities.

To compute the ideal "diffusion potential" we proceed as follows. We rewrite (10) in the form:

$$E_D = E_{L.S.} + E_A \quad (11)$$

where

$$E_{L.S.} = \frac{RT}{F} \log_e \frac{A_{RCl}^{(RCl)}}{A_{R'Cl}^{(R'Cl)}} \quad (12)$$

corresponds to the formula of LEWIS and SARGENT¹ and

$$E_A = \frac{RT}{F} \log_e \frac{A_{RCl}^{(R'Cl)}}{A_{RCl}^{(RCl)}} = \frac{RT}{F} \log_e \frac{A_{R'Cl}^{(R'Cl)}}{A_{R'Cl}^{(RCl)}} \quad (13)$$

¹ LEWIS and SARGENT, Journ. Amer. Chem. Soc. **31**, 363 (1909).

is the correction corresponding to the non-independence of the ionic mobilities and to the less drastic assumption of LONGSWORTH.

$E_{L.S.}$ can be calculated exactly from our own conductivity data. The values calculated are given in the second column of table 4. In view of the meagreness of the data

Table 4.

Ag | AgCl, 0.1 N RCl | 0.1 N R'Cl, AgCl | Ag at 18°C.

Nature of cations.		$E_{L.S.}$ in m. v.	E_A in m. v.	E_D in m. v.	E_S in m. v.	$E_D + E_S$ in m. v. calculated.	E in m. v. observed.
R	R'						
H	Li	+ 36.3	- 1.3	+ 35.0	+ 0.05	+ 35.05	+ 34.85
H	K	+ 28.6	- 0.65	+ 27.95	+ 0.7	+ 28.65	+ 28.2
K	Li	+ 7.7	0.0	+ 7.7	- 0.4	+ 7.3	+ 7.0
(25°C)						(E. R. Smith)	
H	Na	+ 33.3	- 1.0	+ 32.3	+ 0.35	+ 32.65	+ 33.2

available, the correction term E_A can only be estimated roughly. We have to make two empirical assumptions:

- 1) For the HCl-KCl combination that $\frac{E_A}{T}$ has the same value at 18°C as at 25°C.
- 2) For the three pairs of chlorides E_A is proportional to the maximum deviation of the conductivities from the mixture-law for mixtures of the respective pair of chlorides.

From LONGSWORTH'S data we have at 25°C

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{HCl}^{(HCl)} &= 391.28 & \mathcal{A}_{HCl}^{(KCl)} &= 379.75 \\ \mathcal{A}_{KCl}^{(HCl)} &= 131.82 & \mathcal{A}_{KCl}^{(KCl)} &= 128.89 \end{aligned}$$

from which

$$\log_{10} \frac{A_{\text{HCl}}^{(\text{KCl})}}{A_{\text{HCl}}^{(\text{HCl})}} = -.0130 \quad \log_{10} \frac{A_{\text{KCl}}^{(\text{KCl})}}{A_{\text{KCl}}^{(\text{HCl})}} = -.0098$$

the deviation between these corresponding to the inexactness of the assumption made by LONGSWORTH and ourselves. Using these same values at 18°C we obtain for the combination HCl - KCl

$$E_J = -0.75 \text{ m. v.} \quad \text{or} \quad E_J = -0.55 \text{ m. v.}$$

We choose the mean of these namely -0.65 m. v.

For the combination HCl - LiCl by comparison of the deviations of the total conductivities from the mixture-law we estimate E_J to be -1.3 m. v. For the combination KCl - LiCl we assume E_J to be negligible.

The final computation is summarised in table 4. The agreement between the calculated and observed values given in the last two columns is only fair. There is a general discrepancy of about 0.3 m. v., which we believe to be outside the experimental error. Presumably the greatest uncertainty is in the values computed for the correction term E_J . It is possible that at 18°C the ratios $\frac{A_{\text{RCl}}^{(\text{RCl})}}{A_{\text{RCl}}^{(\text{R}'\text{Cl})}}$ differ more from unity than at 25°C. Moreover the assumption of LONGSWORTH that the ratios $\frac{A_{\text{II}}}{A_{\text{I}}}$ are the same for all ions is known to be inexact, but without it one cannot compute transport numbers by LONGSWORTH'S method, nor can one use HENDERSON'S formula. We therefore do not see how we could dispense with this approximation.

We have included at the bottom of table 4 values for the combination HCl - NaCl at 25°C. The value of $E_{\text{L.S.}}$ is computed from the data given in LANDOLT-BÖRNSTEIN¹,

¹ LANDOLT-BÖRNSTEIN, 5th edition. Ergänzungsbd. p. 599 (1927).

E_J is estimated by the method described above and E_S calculated from GÜNTEMBERG'S measurements as in the other cases. There is a discrepancy of about half a millivolt between the calculated value of E and that found by SMITH using the "flowing-junction". SMITH follows MAC INNES and SCATCHARD¹ in believing that the "flowing-junction", gives a continuous mixture layer, though, as admitted by SCATCHARD, there is no convincing evidence in favour of this belief. Further SMITH in his calculation assumes that the total E. M. F. is given simply by $E_{L.S.}$ and he ignores both E_J and E_S . The excellent agreement claimed by him between calculated and observed values is therefore fortuitous, being due to the accidental balancing of two, if not three, errors.

In conclusion we take great pleasure in expressing our gratitude to Professor BJERRUM for his ever ready advice and his continuous interest in our work.

¹ Vide: GUGGENHEIM, Journ. Amer. Chem. Soc. **52**, 1323 (1930).

Copenhagen, October 1930.

MATHEMATISK-FYSISKE MEDDELELSER

UDGIVNE AF

DET KGL. DANSKE VIDENSKABERNES SELSKAB

8. BIND (KR. 17,20):

	Kr. ø.
1. HILLE, EINAR: On the Logarithmic Derivatives of the Gamma Function. 1927	2.40
2. RASCH, G.: Beitrag zur Theorie der unvollständigen Gammafunktionen. Nach hinterlassenen Papieren von J. L. W. V. Jensen. 1927	0.85
3. KNUDSEN, MARTIN: Thermal Molecular Pressure in Tubes. 1927	1.50
4. PEDERSEN, P. O.: Den højere Atmosfæres Sammensætning, Tryk, Temperatur og elektriske Ledningsevne i Belysning af Radiobølgernes Udbredelsesforhold. 1927	0.60
5. BESICOVITCH, A. and BOHR, H.: Some remarks on Generalisations of almost Periodic Functions. 1927	1.50
6. PEDERSEN, ELLEN: Über einige besondere Klassen von fast-periodischen Funktionen. 1928	1.00
7. STEFFENSEN, J. F.: A general Summation Formula. 1928	1.25
8. NIELSEN, NIELS: Observations sur des recherches algébriques plus anciennes que le théorème d'Abel. 1928	1.40
9. BUCH-ANDERSEN, E. og ASMUSSEN, R. W.: Undersøgelser over Faradayeffekten hos vandige Opløsninger af nogle uni-univalente Elektrolyter. 1928	0.80
10. PEDERSEN, P. O.: On the Lichtenberg Figures. Part III. The positive Figures. With 28 Plates. 1929	10.00
11. HJELMSLEV, JOHANNES: Einleitung in die allgemeine Kongruenzlehre. Erste Mitteilung. 1929	1.60

9. BIND (KR. 19,50):

1. BJERRUM, NIELS, and UNMACK, AUGUSTA: Elektrometrische Messungen von Wasserstoffelektroden in Mischungen von Säuren und Basen mit Salzen. Die Dissoziationskonstanten von Wasser, Phosphorsäure, Citronensäure und Glycin. 1929	10.00
2. HARTMANN, JUL.: The Jet-Wave. Theory of the Periodic Jet-Wave. 1929	5.40
3. STRÖMGREN, ELIS: Asymptotische Lösungen im restringierten Dreikörperproblem (Problème restreint). Mit 1 Tafel. 1929	2.00
4. HARTMANN, JUL.: The Jet-Chain- and the Jet-Wave-Vibrator. 1929	3.50

	Kr. Ø.
5. PEDERSEN, P. O.: Wireles Echoes of Long Delay. 1929	2.40
6. STRÖMGREN, ELIS: Fortsetzung und Abschluss der Librationen um L_2 und L_3 im restringierten Dreikörperproblem (Problème restreint). Mit 1 Tafel. 1929	2.00
7. STRÖMGREN, ELIS: Periodische Bahnen um L_4 (bezw. L_5) im Problème restreint bei beliebigem Verhältnis der zwei endlichen Massen. Eine vorläufige Mitteilung. 1929	0.70

10. BIND (KR. 20,50):

1. HJELMSLEV, JOHANNES: Einleitung in die allgemeine Kongruenzlehre. Zweite Mitteilung. 1929	1.25
2. STRÖMGREN, BENGT: Formeln zur genäherten Störungsrechnung in Bahnelementen. 1929	1.75
3. STRÖMGREN, BENGT: Formeln und Tafeln zur Bestimmung parabolischer Bahnen. Mit zwei Nomogrammen. 1929	7.50
4. HARTMANN, JUL. and TROLLE, BIRGIT: Modus Operandi of the Air-Jet Pulsator. With 6 Plates. 1930	4.00
5. NIELSEN, NIELS: Sur l'introduction des fonctions sphériques dans l'analyse. 1929	0.50
6. JESSEN, BØRGE: Über monotone Funktionen. 1929	0.65
7. STRÖMGREN, ELIS: Fortgesetzte Untersuchungen über asymptotische Bahnen im Problème restreint. Über das System periodischer, in Bezug auf die ξ -Achse unsymmetrischer, asymptotischer Bahnen. Mit 2 Tafeln. 1930	4.00
8. UNMACK, A. and GUGGENHEIM, E. A.: Studies of Cells with Liquid-Liquid Junctions. Part III. Cells with a Bridge of Concentrated Potassium Chloride. 1930	1.25
9. STRÖMGREN, ELIS: Die retrograden periodischen Bahnen um die beiden endlichen Massen im Problème restreint, mit direkter absoluter Bewegung (Klasse I). Mit 7 Figuren. 1930	1.40
10. BOHR, HARALD: Kleinere Beiträge zur Theorie der fastperiodischen Funktionen. I—II. 1930	0.90
11. STRÖMGREN, ELIS: Das kritische Massenverhältniss bei der Bewegung um L_4 und L_5 im Problème restreint. Mit 6 Figuren. 1930	0.80
12. BOHR, HARALD: Kleinere Beiträge zur Theorie der fastperiodischen Funktionen. III—IV. 1930	0.75
13. HANSEN, JULIE M. VINTER: Bestimmung der Bahn des periodischen Kometen Comas Solá (1926 f). 1931	1.35
14. GUGGENHEIM, E. A. and UNMACK, A.: Studies of Cells with Liquid-liquid Junctions. Part IV. Cells with no Bridge Solution. 1931	1.20

11. BIND (under Pressen):

1. KNUDSEN, MARTIN: Radiometer Pressure and Coefficient of Accommodation. 1930	3.60
--	------